

УДК 621.3

ВЛИЯНИЕ ДЖИТТЕРА ТАКТОВОЙ ЧАСТОТЫ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ АНАЛОГО-ЦИФРОВЫХ И ЦИФРО-АНАЛОГОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

Зайцев Г.В., д.т.н., ОАО «ГСКБ «Алмаз - Антей», gennady-zaytsev@yandex.ru

Ключевые слова: джиттер, тактовая частота, аналого-цифровой, цифро-аналоговый, преобразователь, шум, сигнал, случайный, гармонический, цифровой код.

Введение

Узлы аналого-цифровых и цифро-аналоговых преобразователей (АЦП и ЦАП) являются неотъемлемой частью систем цифровой обработки сигналов в самых различных областях науки и техники. Более того, часто именно эти узлы определяют характеристики всей системы в целом. При реализации цифровых алгоритмов обработки сигналов повышение точности вычислений реализуется концептуально простым способом повышения разрядности используемых чисел. На современном уровне развития элементной базы такое повышение не вызывает затруднений. Что же касается преобразовательных узлов, то, с одной стороны, вносимые ими ошибки, как правило, являются неустраняемыми при дальнейшей обработке, а с другой, – повышение точностных характеристик этих узлов является весьма непростой задачей.

Одной из проблем, возникающей при разработке преобразователей, является обеспечение сигнала тактовой частоты с необходимым высоким качеством. Поясним суть проблемы на примере аналого-цифрового преобразователя. При этом будем рассматривать наиболее распространенный тип архитектуры АЦП, в котором на входе преобразователя имеется устройство выборки и хранения. Пусть на вход такого АЦП поступает некоторый сигнал $x(t)$ (рис. 1а). По положительному фронту тактового сигнала частоты дискретизации F_s (рис. 1б) в АЦП фиксируются выборки сигнала $x_k = x(t_k)$, $k = -\infty, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, \infty$, которые далее преобразуются в цифровой код. В идеальном случае моменты взятия выборок отстоят друг от друга на фиксированную величину $T_s = 1/F_s$, где T_s – интервал между выборками, и $t_k = kT_s$, $k = -\infty, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, \infty$.

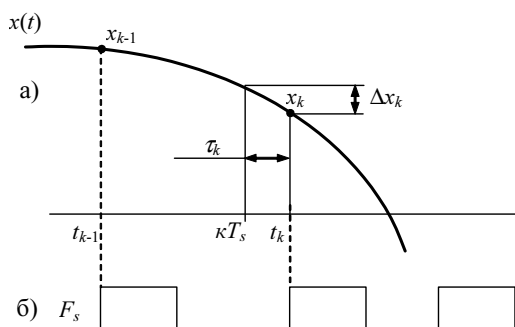


Рис.1. Влияние джиттера на работу АЦП.

Для аналого-цифровых и цифро-аналоговых преобразователей выводятся и анализируются соотношения для расчета уровня шумов и паразитных спектральных составляющих, вызванных джиттером тактовой частоты.

Однако в реальной аппаратуре из-за различных погрешностей расстояние между выборками несколько отличается от идеального на величину τ_k , что приводит к ошибке Δx_k в величине выборки, $k = -\infty, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, \infty$. Для прецизионных быстродействующих АЦП допустимое смещение фронта тактовых импульсов лежит в фемтосекундном диапазоне [1]. С другой стороны, известно, что при прохождении идеального тактового сигнала через обычный логический вентиль появляется случайное смещение фронтов со среднеквадратичным значением до нескольких пикосекунд [2]. Отсюда становятся понятными возникающие трудности.

Изменение величины τ_k от выборки к выборке называется джиттером (транслитерация английского термина jitter - дрожание). Джиттер может иметь как случайную, так и регулярную составляющие. Так как быстродействующие прецизионные АЦП получают все более широкое распространение, то проблемы, связанные с джиттером, довольно широко обсуждаются в литературе. Их можно разделить на несколько групп: оценка эффектов, возникающих из-за джиттера, методы генерации тактовых сигналов с малым джиттером, измерение джиттера и т.д. В данной работе рассматривается первая из перечисленных задач.

Для АЦП в литературе довольно полно описано влияние случайного джиттера при гармоническом входном сигнале [1]. Более сложные случаи рассмотрены слабо. Здесь можно упомянуть работу [3], в которой приведены количественные оценки влияния гармонического джиттера при гармоническом входном сигнале, полученные с помощью моделирования. Для ЦАП положение несколько хуже. Насколько известно автору, описаны лишь экспериментальные факты для некоторых частных случаев. В данной работе проводится простой количественный анализ влияния джиттера на характеристики АЦП и ЦАП для типовых вариантов сигнала и джиттера.

При анализе математических выражений будем считать, что все рассматриваемые функции конечны и имеют производные всех порядков, а анализируемые ряды и интегралы сходятся, так как сигналы, используемые в технике, легко могут быть представлены таким образом.

Влияние джиттера на характеристики АЦП

Пусть на входе АЦП присутствует сигнал $x(t)$. При отсутствии джиттера выходные выборки равны сигналу $x(t)$ в равноотстоящие моменты времени

$$t_k = kT_s = \frac{k}{F_s}, \quad k = -\infty, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, \infty,$$

где F_s – частота дискретизации, $T_s = 1/F_s$ – интервал между выборками.

При наличии джиттера моменты t_k смещаются: $t_k = kT_s + \tau_k$, где τ_k – значение джиттера для k -той выборки, и выходные выборки определяются соотношением

$$x_k = x(kT_s + \tau_k), \quad k = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty. \quad (1)$$

При малой величине джиттера (необходимая величина малости зависит от характера функции $x(t)$ и будет определена в дальнейшем) функцию (1) можно разложить в ряд Тейлора по малому параметру τ_k :

$$x_k = x(kT_s) + x'(kT_s)\tau_k + 0,5x''(kT_s)\tau_k^2 + O(\tau_k^3). \quad (2)$$

Первое слагаемое в этой формуле дает точное значение выборки сигнала. Второе слагаемое, которое будем обозначать e_{1k} , определяет основную составляющую ошибки, обусловленной джиттером:

$$e_{1k} = x'(kT_s)\tau_k. \quad (3)$$

Рассмотрим его более подробно для различных случаев сигнала и джиттера.

Случайный джиттер, гармонический сигнал. Особый интерес представляет гармонический входной сигнал, так как, во-первых, именно такой сигнал используется для измерения основных динамических параметров АЦП, а во-вторых, при дискретизации на промежуточной частоте входной сигнал близок к гармоническому.

Пусть на входе АЦП присутствует синусоидальный сигнал с круговой частотой $\omega \neq 0$ и амплитудой A :

$$x(t) = A \sin \omega t. \quad (4)$$

Случай $\omega = 0$ не представляет интереса, так как при этом джиттер не вызывает ошибки. Кроме того, не будем рассматривать также аномальный случай $\omega = 2m\pi F_s$, m – целое, так как при этом все выборки $x(kT_s)$ равны. Этот случай на практике не используется.

Подставляя (4) в (3), имеем

$$e_{1k} = A\omega\tau_k \cos \omega kT_s. \quad (5)$$

Заметим, что для быстрой сходимости ряда Тейлора (2) в этом случае необходимо выполнение соотношения $\omega\tau_k \ll 1$. При этом джиттер можно считать малым и оценивать основные паразитные эффекты, анализируя формулу (5) для второго члена разложения.

Положим теперь, что значение джиттера τ_k является случайной величиной с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим значением (СКЗ) σ , причем случайные величины τ_k с различными индексами независимы. При этом ошибка (5) имеет шумовой характер. Расчет ее СКЗ N путем вычисления дисперсии случайной величины (5) и усреднения по времени дает

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}} A\omega\sigma. \quad (6)$$

Так как СКЗ сигнала (4) равно $A/\sqrt{2}$, то отношение сигнал/шум q на выходе АЦП в линейном масштабе равно

$$q = \frac{1}{\omega\sigma}. \quad (7)$$

Формула (7) аналогична выражениям, полученным в литературе [1].

Отсюда по требуемому значению q можно вычислить необходимое значение σ :

$$\sigma \leq \frac{1}{\omega q}. \quad (8)$$

При очень малой величине джиттера отношение сигнал/шум на выходе АЦП ограничивается другими составляющими шумов. Поэтому выбор максимально достижимого значения q логично производить, сравнивая величину шума, обусловленного джиттером, с величиной собственного шума АЦП. Примем в качестве условия равенство СКЗ этих шумов (в общем случае можно задать соотношение между ними).

СКЗ (6) шума, вызванного джиттером, пропорционально амплитуде сигнала. Его максимальное значение для фиксированной частоты достигается при максимальной амплитуде сигнала, которое для АЦП можно выразить в виде $A = 2^{r-1}h$, где r – разрядность АЦП, а h – шаг квантования. При этом СКЗ шума (6) равно

$$N = 2^{r-2} \sqrt{2} h \omega \sigma. \quad (9)$$

СКЗ собственного шума АЦП σ_s не зависит от амплитуды сигнала. Для дальнейших выкладок его удобно выразить в долях шага квантования АЦП:

$$\sigma_s = ch, \quad (10)$$

где c – некоторый коэффициент. Приравнявая (9) и (10), получаем максимально допустимое значение СКЗ джиттера в виде:

$$\sigma = \frac{c}{2^{r-2} \sqrt{2} \cdot \omega}. \quad (11)$$

В литературе величина шума (10) обычно рассматривается для трех типовых случаев. Для идеального АЦП, для которого собственный шум обусловлен только шумом квантования, коэффициент c в формуле (10) равен $c = 1/\sqrt{12}$ (при $A > 0,5h$) [1]. Во втором случае для удобства оценок полагают $c = 1$. В этих двух случаях для 16-разрядного АЦП и частоты входного сигнала 50 МГц СКЗ джиттера, вычисленное по формуле (11), составляет, соответственно, 40 и 137 фс.

И, наконец, для реального АЦП величина собственного шума является его паспортной характеристикой и может быть найдена в справочных данных по используемой микросхеме. Например, для микросхемы 16-разрядного АЦП LTC2208 фирмы Linear Technology, США, для одного из режимов работы при входной частоте 50 МГц отношение сигнал/шум составляет $q_s \approx 75$ дБ, что соответствует величине $c = 4,12$ в (10). При этом расчет джиттера по формуле (11) дает $\sigma = 566$ фс. Из сравнения величин σ , полученных для трех рассмотренных значений коэффициента c , следует, что с практической точки зрения предпочтительнее использовать реальные характеристики микросхем АЦП, которые, несмотря на впечатляющие достижения современной микроэлектроники, все еще далеки от идеальных.

В заключение данного пункта сделаем еще одно замечание относительно уровня шума, обусловленного джиттером. До сих пор рассматривалось только полное значение СКЗ шума. Однако, если шумовой процесс является белым шумом, то выходной шум равномерно распределен в полной однозначной полосе АЦП шириной F_s . Во многих приложениях обрабатываемая далее полоса меньше полной. Если при этом после АЦП используется цифровой полосовой фильтр, обрезающий полосу до величины B , то СКЗ шума после фильтра снижается пропорционально корню квадратному из полосы. Поэтому вместо (6) после фильтра будем иметь

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} A \omega \sigma \sqrt{\frac{B}{F_s}}. \quad (12)$$

В этом случае и дальнейшие формулы (7)-(11) должны быть соответствующим образом откорректированы. Заметим, что величина B равна сумме полос пропускания фильтра в однозначном диапазоне частот. Например, если используется полосовой фильтр с действительными коэффициентами, то он имеет две равные полосы в области положительных и отрицательных частот, и их ширины должны складываться. Если же используется низкочастотный фильтр, то в (12) входит просто его полоса.

В связи со сказанным иногда удобнее для расчетов использовать не СКЗ, а спектральную плотность мощности шума, не зависящую от используемой полосы. Из (6) следует, что средняя мощность рассматриваемого шумового сигнала равна

$$P_n = 0,5(A\omega\sigma)^2.$$

Так как эта мощность для белого шума распределена равномерно в полосе шириной F_s , то спектральная плотность мощности определяется выражением

$$G = 0,5(A\omega\sigma)^2 T_s.$$

Нормируя это выражение к средней мощности сигнала $P_{sig} = 0,5A^2$, получаем отношение спектральной плотности мощности шума к мощности сигнала:

$$R = \omega^2 T_s \sigma^2.$$

Это отношение обычно рассчитывается в децибелах:

$$R_{dB} = 10 \log(\omega^2 T_s \sigma^2). \quad (13)$$

Единицы измерения величины (13) называются децибел относительно несущей на герц, или сокращенно дБн/Гц.

Спектральная плотность шума (13) снижается на 6 дБ при снижении величины джиттера в два раза или при снижении частоты сигнала в два раза, а также снижается на 3 дБ при увеличении частоты дискретизации вдвое. Например, для параметров $F_s=100$ МГц, $\sigma=1$ пс при частоте сигнала 50 МГц, получаем $R_{dB} \approx -150$ дБн/Гц. При шумовой полосе 10 МГц эта величина дает отношение сигнал/шум 80 дБ.

Случайный джиттер, сигнал на несущей. В настоящее время все более широкое распространение получают схемы дискретизации сигнала на промежуточной частоте, имеющие ряд преимуществ по сравнению со схемами дискретизации на видеочастоте. При этом

обычно ширина спектра сигнала гораздо меньше промежуточной частоты, и поэтому сигнал можно представить в виде

$$x(t) = a(t) \sin[\omega_0 t + \varphi + \psi(t)], \quad (14)$$

где $a(t)$ – функция амплитудной модуляции, $\psi(t)$ – функция фазовой модуляции сигнала, ω_0 – несущая частота, φ – случайная начальная фаза, отражающая тот факт, что контролировать фазу несущей на практике, как правило, не удается. Будем считать, что плотность распределения фазы φ является равномерной на отрезке $[0, 2\pi]$. Особенностью сигнала (14) является то, что скорость изменения модулирующих функций существенно меньше, чем несущей.

Для оценки ошибки, обусловленной джиттером, подставим выражение (14) в (3):

$$e_{1k} = \tau_k \{a(kT_s) \cos[\omega_0 kT_s + \varphi + \psi(kT_s)] [\omega_0 + \psi'(kT_s)] + a'(kT_s) \sin[\omega_0 kT_s + \varphi + \psi(kT_s)]\}$$

Так как скорость изменения функции $\psi(t)$ существенно меньше, чем несущей, то $\psi'(kT_s) \ll \omega_0$, и слагаемое $\psi'(kT_s)$ во второй квадратной скобке этой формулы можно опустить:

$$e_{1k} = \tau_k \{a(kT_s) \omega_0 \cos[\omega_0 kT_s + \varphi + \psi(kT_s)] + a'(kT_s) \sin[\omega_0 kT_s + \varphi + \psi(kT_s)]\} \quad (15)$$

Рассмотрим средний квадрат этой величины. Возводя (15) в квадрат и усредняя по значениям случайных величин τ и φ , после несложных преобразований получаем

$$M[e_{1k}^2] = 0,5 \sigma^2 \{ \omega_0^2 a^2(kT_s) + [a'(kT_s)]^2 \},$$

где $M[\]$ – символ математического ожидания.

Усредняя это выражение по времени (индексу k), получаем среднее значение для квадрата ошибки (15):

$$N_1^2 \approx 0,5 \sigma^2 (\{ \text{СКЗ}[a(kT_s)] \}^2 \omega_0^2 + \{ \text{СКЗ}[a'(kT_s)] \}^2).$$

При медленном изменении функции модуляции второе слагаемое существенно меньше первого:

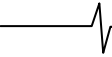
$$\text{СКЗ}[a(kT_s)] \gg \frac{\text{СКЗ}[a'(kT_s)]}{\omega_0^2},$$

так как правая часть этого неравенства есть, с точностью до константы, не что иное, как среднее изменение величины огибающей за период несущей частоты. Иными словами, это неравенство может рассматриваться как более точное определение медленности изменения огибающей. Поэтому, упрощая полученную формулу для среднего квадрата ошибки, получаем следующую оценку СКЗ ошибки (15)

$$N_1 \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \text{СКЗ}[a(t)] \omega_0 \sigma.$$

Эта формула аналогична формуле (6) для синусоидального сигнала и может быть получена из нее заменой ω на ω_0 и A на $\text{СКЗ}[a(t)]$. Следовательно, для этого случая можно использовать формулы (7)-(13) с учетом указанной замены.

Таким образом, при использовании дискретизации на промежуточной частоте повышаются требования к качеству формирования тактовой частоты, а необходимая



величина СКЗ джиттера обратно пропорциональна величине промежуточной частоты.

Гармонический джиттер, гармонический сигнал. Джиттер τ_k в (5) является синусоидальным:

$$\tau_k = \varepsilon \sin \omega_1 k T_s, \quad (16)$$

где ε - амплитуда отклонения по времени моментов выборок от номинального положения. При этом величина ошибки (5) равна

$$e_{1k} = A \omega \varepsilon \sin \omega_1 k T_s \cdot \cos \omega k T_s = 0,5 A \omega \varepsilon [\sin(\omega_1 + \omega) k T_s + \sin(\omega_1 - \omega) k T_s] \quad (17)$$

Представляя в этом выражении синусоидальные функции в виде суммы двух экспоненциальных функций, получаем

$$e_{1k} = -0,25 j A \omega \varepsilon \cdot (e^{j(\omega_1 + \omega) k T_s} - e^{j(-\omega_1 - \omega) k T_s} + e^{j(\omega_1 - \omega) k T_s} - e^{j(-\omega_1 + \omega) k T_s})$$

Таким образом, гармонический джиттер приводит к появлению паразитных спектральных составляющих на частотах $\pm \omega_1 \pm \omega$ с амплитудой $0,25 A \omega \varepsilon$. Так как амплитуда полезной спектральной составляющей равна $0,5 A$, то отношение Q амплитуды основной гармоники к амплитуде паразитных спектральных составляющих (ПСС) составляет

$$Q = \frac{2}{\omega \varepsilon}. \quad (18)$$

Например, для частоты 50 МГц и амплитуды джиттера $\varepsilon = 1$ пс это отношение составляет 76,1 дБ. Заметим, что по своему виду формула (18) совпадает с точностью до сомножителя два с формулой (7) для случайного джиттера.

По требуемому отношению Q можно вычислить необходимое значение амплитуды джиттера:

$$\varepsilon \leq \frac{2}{\omega Q}. \quad (19)$$

Например, для того, чтобы паразитные спектральные составляющие имели уровень не более минус 80 дБ ($Q = 10^4$) от амплитуды основной гармоники частоты 50 МГц необходимо, чтобы амплитуда джиттера составляла не более 637 фс.

Случай гармонического джиттера (16) может служить моделью системы, в которой тактовая частота формируется высококачественным кварцевым генератором, дающим синусоидальный сигнал

$$s(t) = \alpha \sin \omega_s t, \quad (20)$$

где $\omega_s = 2\pi F_s$, а моменты взятия выборок определяются переходом сигнала (20) через нуль от отрицательных к положительным значениям: $t_k = k T_s$, k - целое. При этом различные электромагнитные помехи и наводки на сигнал (20) смещают положение нуля и приводят к джиттеру моментов выборок. При синусоидальной аддитивной наводке гармонического сигнала с частотой ω_1 и амплитудой β вместо (20) имеем

$$s(t) = \alpha \sin \omega_s t + \beta \sin \omega_1 t. \quad (21)$$

Оценим смещение положения нуля из-за добавления второго члена в предположении его малости ($\beta \ll \alpha$).

Пусть новое положение нуля определяется выражением $t_k = k T_s + \tau_k$, где τ_k - смещение из-за наводки. Подставляя это выражение в (21), имеем

$$\alpha \sin \omega_s (k T_s + \tau_k) + \beta \sin \omega_1 (k T_s + \tau_k) = 0.$$

Производя с этой формулой элементарные преобразования и отбрасывая члены второго порядка малости, получаем уравнение для определения положения нуля:

$$\alpha \omega_s \tau_k + \beta \sin \omega_1 k T_s \approx 0.$$

Откуда имеем

$$\tau_k \approx \frac{\beta}{\alpha} \frac{1}{\omega_s} \sin \omega_1 k T_s.$$

Таким образом, джиттер из-за наводки имеет синусоидальный характер (16) с амплитудой

$$\varepsilon = \frac{\beta}{\alpha} \frac{1}{\omega_s}. \quad (22)$$

Подставляя это выражение в (19), получаем необходимое отношение амплитуды β наводки к амплитуде α тактового сигнала для получения заданного отношения Q на выходе АЦП:

$$\frac{\beta}{\alpha} \leq \frac{2 \omega_s}{\omega Q}. \quad (23)$$

Например, для получения отношения $Q = 10^4$ (80 дБ) при параметрах $\omega_s / \omega = 3$, и $\alpha = 1$ В из (23) имеем $\beta = 0,6$ мВ. Подобная малая величина означает, что цепи тактового сигнала должны быть тщательно изолированы от электромагнитных помех, в том числе и от цифровых сигналов с выхода АЦП.

Формулы (17)-(23) относятся к основной паразитной составляющей, обусловленной джиттером. Рассмотрим другие составляющие в (2). Член ряда Тейлора с номером $n > 0$ имеет вид

$$p_n(k T_s) = \frac{\tau_k^n}{n!} x^{(n)}(k T_s).$$

Подставляя в эту формулу выражения для τ_k из (16) и $x(t)$ из (4), имеем

$$p_n(k T_s) = \begin{cases} A(-1)^m \cos \omega k T_s \frac{(\omega \varepsilon \sin \omega_1 k T_s)^n}{n!} & \text{для нечетных } n = 2m + 1, m = 0, 1, \dots, \\ A(-1)^m \sin \omega k T_s \frac{(\omega \varepsilon \sin \omega_1 k T_s)^n}{n!} & \text{для четных } n = 2m, m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (24)$$

Функцию $\sin^n \omega_1 t$ можно представить в виде суммы гармоник следующим образом:

$$\sin^n \omega_1 t = \begin{cases} \sum_{k=0}^m a_k \sin(2k + 1)\omega_1 t & \text{для нечетных } n = 2m + 1, m = 0, 1, \dots, \\ \sum_{k=0}^m a_k \cos 2k\omega_1 t & \text{для четных } n = 2m, m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (25)$$

Тогда из выражения (24) и разложения (2) следует, что в спектре сигнала будут присутствовать все паразитные спектральные составляющие с частотами вида $\pm \omega \pm k \omega_1$, $k = 0, 1, 2, \dots$

В качестве примера на рис. 2 показан спектр выходного сигнала при гармоническом джиттере, полученный с помощью моделирования. Сигнал является гармоническим вида (4) с относительной частотой $\omega / \omega_s = 3/16$ и с добавлением небольшого уровня аддитивного шума. Синусоидальный джиттер имеет относительную частоту $\omega_1 / \omega_s = 1/64$ и амплитуду $\varepsilon F_s = 0,01$. Довольно значительная амплитуда джиттера взята для наглядности

рисунка. Частоты сигнала и джиттера выбраны таким образом, чтобы получить спектр без значительных лепестков. Расчет спектра производился с помощью быстрого преобразования Фурье порядка 1024.

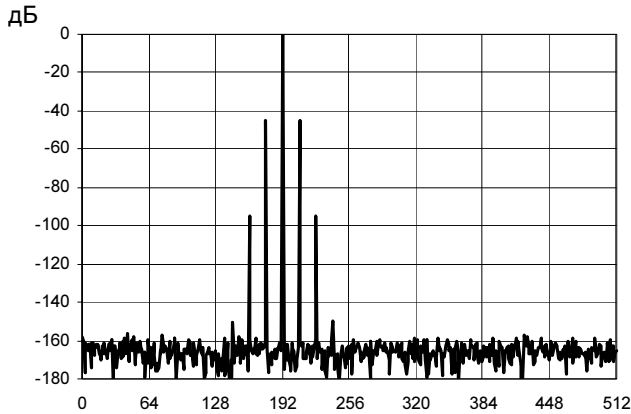


Рис. 2. Спектр синусоидального сигнала при гармоническом джиттере.

Из рисунка наглядно видно наличие рассмотренных выше паразитных спектральных составляющих. Их уровень быстро падает с увеличением порядка гармоники, однако в системах с большим динамическим диапазоном могут быть существенны не только первые, но и последующие паразитные спектральные составляющие. Уровень первых ПСС совпадает с теоретической оценкой (18) с точностью до тысячных долей децибела.

Гармонический джиттер, сложный сигнал. Аналогичные эффекты наблюдаются и в случае сигнала произвольного вида. Рассмотрим основную паразитную составляющую (3). Представим функцию $x(t)$ на рассматриваемом интервале, содержащем L отсчетов, в виде ряда Фурье:

$$x(t) = \sum_n c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad (26)$$

где $\omega_0 = 2\pi L / F_s$.

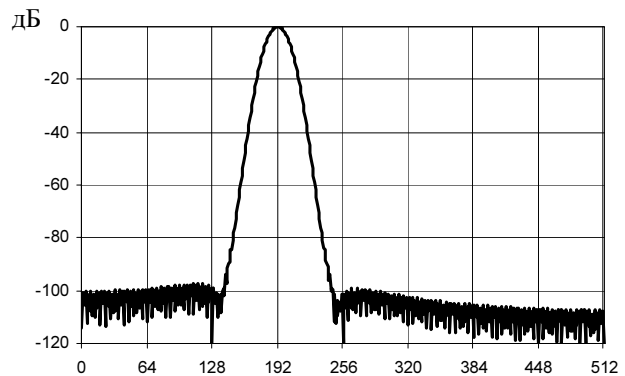
Подставляя (26) и (16) в (3), получаем следующее выражение для основной составляющей ошибки:

$$e(kT_s) = 0,5\varepsilon\omega_0 \left(\sum_n c_n n e^{j(n\omega_0 + \omega_1)kT_s} + \sum_n c_n n e^{j(n\omega_0 - \omega_1)kT_s} \right).$$

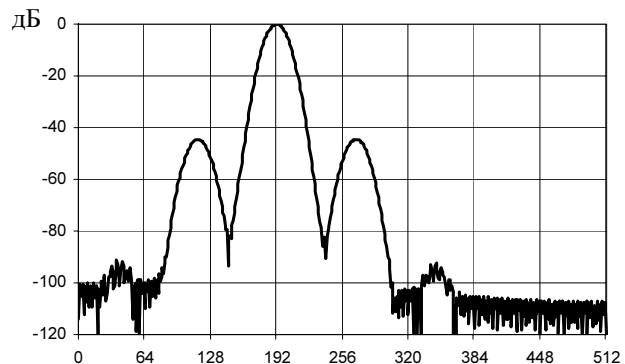
Отсюда следует, что паразитная составляющая в выходном сигнале имеет слагаемые, получаемые сдвигом спектра входного сигнала на $+\omega_1$ и $-\omega_1$ с одновременным масштабированием спектральных составляющих множителем n .

Указанное положение иллюстрируется рис. 3, где приведен спектр импульса с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ). Спектр рассчитан с помощью быстрого преобразования Фурье порядка 1024 для случаев отсутствия (рис. 3а) и наличия (рис. 3б) джиттера. Параметры модели: длительность сигнала – 400 отсчетов, девиация сигнала – $F_s/16$, центральная частота сигнала – $3F_s/16$, амплитуда джиттера $\varepsilon F_s = 0,01$, частота джиттера $\omega/\omega_s = 0,075$. Для наглядности рисунка амплитуда джиттера выбрана значительной, а при расчете спектра использована весовая функция с уровнем боковых лепестков минус 96 дБ.

При отсутствии джиттера спектр имеет вид одного лепестка. При наличии джиттера возникают паразитные лепестки, обусловленные рассмотренным выше сдвигом влево и вправо неискаженного спектра на величину частоты джиттера. Хорошо заметны и паразитные составляющие следующего порядка, определяемые следующими членами ряда Тейлора в (2) и вызванные сдвигом спектра на удвоенную величину частоты джиттера. Отметим, что уровень основных паразитных лепестков по-прежнему описывается формулой (18) с точностью до сотых долей децибела.



а)



б)

Рис. 3. Спектр ЛЧМ-импульса а) без джиттера б) с гармоническим джиттером.

Проанализированные в данном разделе случаи сигнала и джиттера позволяют сделать некоторые качественные выводы и на более общий случай. Если, например, джиттер представляет собой сумму двух гармонических составляющих с частотами ω_1 и ω_2 , то нетрудно видеть, что основная составляющая ошибки (3) будет содержать гармоники с частотами $\pm\omega \pm \omega_1$, $\pm\omega \pm \omega_2$. Однако, если рассматривать и следующие члены ошибки, то они будут содержать составляющие со всеми частотами вида $\pm\omega \pm m_1\omega_1 \pm m_2\omega_2$, $m_1, m_2 = 0, 1, 2, \dots$

Для общего случая сигнала и/или джиттера методика оценки возникающих эффектов, в силу линейности основной составляющей ошибки (3) по обеим функциям, может заключаться в разложении функций на элементарные аддитивные составляющие (независимые для случайных функций, ортогональные для детерминированных функций), оценки эффектов для каждой составляющей и их сложении.

Влияние джиттера на характеристики ЦАП

Характер ошибки. Пусть на входе ЦАП присутствуют выборки сигнала $x(t)$. Каждая выборка на выходе ЦАП преобразуется в ступеньку. На рис. 4а показаны три выборки x_1, x_2, x_3 (жирные точки) из сигнала $x(t)$ (штрихпунктирная линия на рисунке), поступающие на ЦАП в моменты t_1, t_2, t_3 , отстоящие друг от друга на интервал $T_s = 1/F_s$, где F_s – тактовая частота ЦАП.

На выходе идеального ЦАП каждая выборка дает прямоугольные ступеньки, показанные толстыми прямыми линиями на рисунке. Из-за джиттера моменты начала ступенек несколько смещаются. На рис. 4а показано смещение второй выборки на величину τ_2 (пунктирная вертикальная линия). Это приводит к смещению конца предыдущей ступеньки и начала следующей ступеньки на эту же величину. Возникающая ошибка с амплитудой $e_2 = x_2 - x_1$ показана на рисунке прямоугольником с шахматной заливкой. Общий вид функции ошибки $e(t)$ при ненулевых смещениях выборок показан на рис. 4б.

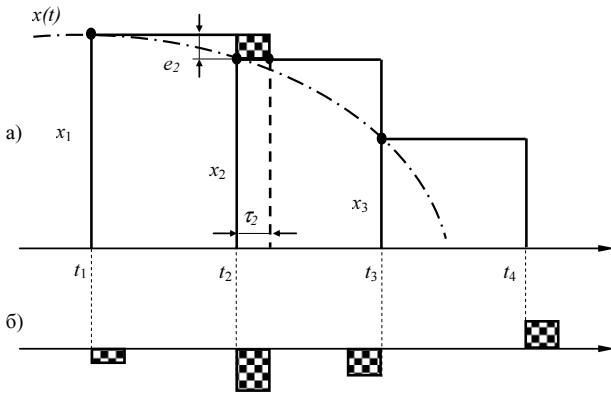


Рис. 4. Влияния джиттера на работу ЦАП.

Таким образом, ошибка на выходе идеального ЦАП, обусловленная джиттером тактовой частоты, представляет собой последовательность коротких импульсов длительностью τ_k с амплитудой $e_k = x_k - x_{k-1}$, $k = -\infty, \dots, 0, 1, \dots, \infty$.

Спектр k -того из этих импульсов имеет вид

$$S_k(f) = e_k \tau_k \frac{\sin \pi f \tau_k}{\pi f \tau_k} e^{-2\pi j f (kT_s + \frac{\tau_k}{2})}. \quad (27)$$

Ширина главного лепестка функции (27) равна $1/\tau_k$ по уровню минус 3,9 дБ, и в этой области сосредоточено 78% энергии импульса.

Случайный джиттер, гармонический сигнал.

Рассмотрим случай, когда значения джиттера τ_k являются случайными независимыми величинами со среднеквадратическим значением σ . Тогда длительность импульсов ошибки случайна, однако общий вид функции $e(t)$ трудно назвать случайным. Поэтому анализ ошибки целесообразно проводить в частотной области. Смысл перехода в частотную область состоит в следующем. В радиотехнических приложениях после ЦАП, как правило, имеется полосовой фильтр, пропускающий необходимую область частот и растягивающий короткие импульсы

сигнала. При этом функция $e(t)$ теряет импульсный характер. В частотной области спектр ошибки в полосе пропускания фильтра практически не изменится, и, следовательно, в этой области можно анализировать спектр непосредственно после ЦАП.

Проанализируем выражение (27) для случая синусоидального сигнала (4) с частотой ω и амплитудой A . Пусть на выходе ЦАП генерируется сигнал (4) на интервале длительностью T , содержащем L выборок сигнала: $T = LT_s$. Будем считать также, что $\omega \neq 0$, и выполняется основное условие теоремы Котельникова: $\omega T_s < \pi$. Случай $\omega = 0$ не представляет интереса, так как в этом случае джиттер не вызывает ошибок. Амплитуда ошибки для k -того импульса может быть выражена следующим образом

$$e_k = x_k - x_{k-1} \approx x'(kT_s)T_s = A\omega T_s \cos \omega k T_s, \quad (28)$$

При этом спектр (27) принимает вид

$$S_k(f) = A\omega T_s \tau_k \cos(\omega k T_s) \frac{\sin \pi f \tau_k}{\pi f \tau_k} e^{-2\pi j f (kT_s + \frac{\tau_k}{2})}. \quad (29)$$

Для упрощения этого выражения заметим, что диапазон полезных частот после ЦАП, как правило, не более тактовой частоты, а величина джиттера мала по сравнению с периодом T_s . Поэтому в интересующей области частот $f \tau_k \ll 1$, и, следовательно,

$$\frac{\sin \pi f \tau_k}{\pi f \tau_k} \approx 1 \quad \text{и} \quad e^{-2\pi j f \tau_k} \approx 1.$$

Тогда из (29) получаем:

$$S_k(f) \approx A\omega T_s \tau_k \cos(\omega k T_s) e^{-2\pi j f k T_s}. \quad (30)$$

Суммируя по k , получаем полный спектр ошибки $e(t)$ на рассматриваемом интервале:

$$S(f) = A\omega T_s \sum_{k=0}^{L-1} \tau_k \cos(\omega k T_s) e^{-2\pi j f k T_s}. \quad (31)$$

Спектральная плотность мощности функции $e(t)$ определяется через ее спектр $S(f)$ выражением:

$$G(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} M[S(f)S^*(f)], \quad (32)$$

где $M[\]$ – символ математического ожидания.

Подставляя (31) в (32), имеем

$$G(f) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{LT_s} (A\omega T_s)^2 M \left[\sum_{k=0}^{L-1} \tau_k \cos(\omega k T_s) e^{-2\pi j f k T_s} \times \sum_{m=0}^{L-1} \tau_m \cos(\omega m T_s) e^{2\pi j f m T_s} \right]$$

Так как случайные величины τ_k и τ_m с различными индексами независимы, то слагаемые под знаком математического ожидания, имеющие произведения таких величин, дают при усреднении нуль. Поэтому

$$G(f) = A^2 \omega^2 T_s^2 \sigma^2 \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} \cos^2(\omega k T_s).$$

Так как $\omega \neq 0$ и $\omega T_s < \pi$, то предел в этой формуле равен 0,5. Поэтому

$$G(f) = 0,5 A^2 \omega^2 T_s^2 \sigma^2.$$

Таким образом, спектральная плотность мощности шума, вызванного джиттером, постоянна в рассматриваемой области частот. Нормируя это выражение к средней мощности сигнала (4) $P_{sig} = 0,5A^2$, получаем:

$$R = \omega^2 T_s \sigma^2,$$

или в децибелах:

$$R_{dB} = 10 \log(\omega^2 T_s \sigma^2) \text{ дБн/Гц.} \quad (33)$$

Формула (33) совпадает с аналогичной формулой (13) для случая АЦП. Она показывает целесообразность увеличения тактовой частоты, причем это увеличение для ЦАП достигается проще, чем для АЦП, по технологическим причинам.

Например, для частоты 50 МГц и параметров $T_s = 1 \text{ нс}$, $\sigma = 1 \text{ пс}$ получаем $R_{dB} \approx -160 \text{ дБн/Гц}$. При шумовой полосе 10 МГц это дает отношение сигнал/шум 90 дБ.

Гармонический джиттер, гармонический сигнал. Пусть теперь джиттер является синусоидальным с частотой ω_1 и амплитудой ε :

$$\tau_k = \varepsilon \sin(\omega_1 k T_s) = -0,5 j \varepsilon (e^{j\omega_1 k T_s} - e^{-j\omega_1 k T_s}) \quad (17)$$

Подставляя это выражение в (31) для спектра ошибки сигнала из L выборок, имеем

$$S(f) = -0,25 j$$

$$A \omega T_s \varepsilon \sum_{k=0}^{L-1} (e^{j\omega k T_s} + e^{-j\omega k T_s}) e^{-2\pi j f k T_s} (e^{j\omega_1 k T_s} - e^{-j\omega_1 k T_s})$$

Отсюда следует, что в спектре выходного сигнала появились комбинационные составляющие с частотами $\pm \omega \pm \omega_1$, равные по величине

$$z = 0,25 A \varepsilon \omega T_s L.$$

Так как величина формируемой полезной спектральной составляющей для сигнала из L выборок равна $0,5 A T_s L$, то отношение амплитуды основной гармоники к паразитной равно

$$Q = \frac{2}{\omega \varepsilon}. \quad (34)$$

Эта формула совпадает с формулой (18) для синусоидального джиттера в АЦП.

В качестве примера рассмотрим влияние наводки порядка 1 мВ на тактовый сигнал с амплитудой 1 В и частотой 100 МГц. При этом амплитуда паразитного джиттера согласно (22) будет иметь величину $\varepsilon = 1,6 \text{ пс}$. Для формируемой частоты 30 МГц из (34) получаем, что отношение сигнал/ПСС примерно равно 76,4 дБ. Это показывает, что цепи тактовой частоты в ЦАП, так же, как и в АЦП, необходимо тщательно защищать от всякого рода помех и шумов.

Заключение

В работе получены простые аналитические соотношения для оценки СКЗ шума и амплитуды паразитных спектральных составляющих на выходе ЦАП и АЦП для типовых случаев сигнала и джиттера. Замечательно, что формулы для АЦП и ЦАП, как для случайного джиттера [формулы (13) и (33)], так и для гармонического джиттера [формулы (18) и (34)], идентичны. Этот факт можно рассматривать как еще одно свидетельство эквивалентности аналогового и цифрового способов представления информации, а также переходов между ними.

Литература

1. W. Kester, ed., Analog-Digital Conversion, Analog Devices, 2004, www.analog.com.
2. W. Kester, DAC Interface Fundamentals, Analog Devices, MT-019, 2009, www.analog.com.
3. М.Н. Быканов и др., Исследование влияния фазовой нестабильности тактового сигнала на характеристики тракта аналого-цифрового преобразования, Цифровая обработка сигналов, 2004, №2, 24-30.

IMPACT OF SAMPLING-FREQUENCY JITTER ON ADC AND DAC PERFORMANCE

Zaytsev G.V.

The paper describes effects caused by sampling-frequency jitter in analog-digital and digital-analog converters. Simple formulae are derived for output noise level and spurs amplitudes, induced by jitter.