

УДК 621.397

ЧАСТОТНЫЕ СВОЙСТВА ДВУМЕРНЫХ РЕКУРСИВНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА С СИММЕТРИЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Балусов И.Л., Приоров А.Л., Хрящев В.В.

Введение

Для эффективной цифровой обработки двумерных сигналов необходимо знание частотных свойств соответствующих цифровых фильтров различного порядка. Именно эти свойства являются одними из важнейших характеристик системы, определяющих возможность ее применения для конкретных задач обработки сигналов [1]. Поэтому получение заданных частотных характеристик является одним из исходных условий в задаче построения систем обработки информации, в том числе и в задаче синтеза цифровых фильтров. Возникает и обратная задача – определения влияния параметров системы на ее частотную избирательность.

Двумерная рекурсивная цифровая система (фильтр) второго порядка с симметричными коэффициентами определяется следующим разностным уравнением с постоянными коэффициентами:

$$y(m,n) = b_{10}y(m-1,n) + b_{01}y(m,n-1) + b_{11}y(m-1,n-1) + b_{20}y(m-2,n) + b_{02}y(m,n-2) + x(m,n), \quad (1)$$

где $x(m,n)$ и $y(m,n)$ – входной и выходной двумерные сигналы соответственно, а b_{ij} – коэффициенты (параметры) фильтра. Передаточная функция исследуемой системы (1) записывается следующим образом:

$$H(z_1, z_2) = \frac{1}{1 - b_{10}z_1^{-1} - b_{01}z_2^{-1} - b_{11}z_1^{-1}z_2^{-1} - b_{20}z_1^{-2} - b_{02}z_2^{-2}} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{1 - a(z_1^{-1} + z_2^{-1}) - b(z_1^{-2} + z_2^{-2}) - cz_1^{-1}z_2^{-1}}.$$

Здесь $b_{01} = b_{10} = a$, $b_{20} = b_{02} = b$, $b_{11} = c$. Анализируя (2), можно установить, что условия устойчивости для рассматриваемой системы имеют вид:

$$\begin{cases} c < 1 - 2a - 2b, \\ c < 1 + 2a - 2b, \\ c > 2b - 1, \\ c > -2b - 1, \\ c < 1 + 2b. \end{cases} \quad (3)$$

Фигура устойчивости системы, для которой условия (3) выполняются, изображена на рис. 1.

Частотную характеристику двумерного фильтра найдем, сделав подстановку $z_1 = e^{j\omega_1}$, $z_2 = e^{j\omega_2}$ в передаточную функцию (2)

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \frac{1}{1 - a(e^{-j\omega_1} + e^{-j\omega_2}) - b(e^{-j2\omega_1} + e^{-j2\omega_2}) - ce^{-j(\omega_1 + \omega_2)}}. \quad (4)$$

Объектом исследования является двумерный рекурсивный цифровой фильтр второго порядка с симметричными коэффициентами. Определены области существования двумерных фильтров нижних и верхних частот с монотонными амплитудно-частотными характеристиками. Установлено максимальное подавление сигнала, возможное в фильтрах нижних и верхних частот. Получено уравнение линии среза. В пространстве параметров определены и классифицированы области существования двумерных полосовых и режекторных фильтров. Приведены примеры амплитудно-частотных характеристик полученных фильтров.

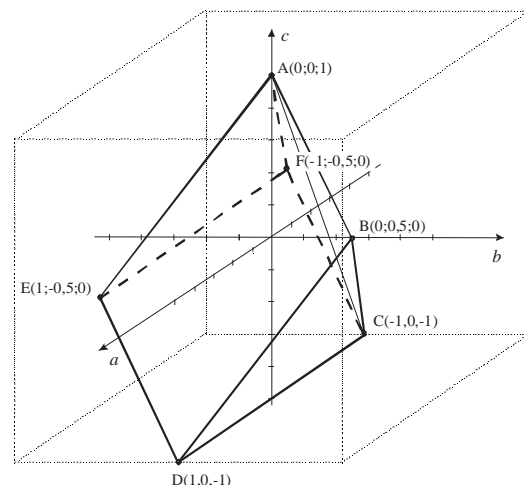


Рис. 1. Фигура устойчивости двумерного рекурсивного цифрового фильтра второго порядка с симметричными коэффициентами

Введем обозначение для квадрата модуля частотной характеристики (4)

$$|H(\omega_1, \omega_2)|^2 = \frac{1}{f(\omega_1, \omega_2)}, \quad (5)$$

где

$$f(\omega_1, \omega_2) = (1 - a(\cos\omega_1 + \cos\omega_2) - c\cos(\omega_1 + \omega_2) - b(\cos 2\omega_1 + \cos 2\omega_2))^2 + (a(\sin\omega_1 + \sin\omega_2) + c\sin(\omega_1 + \omega_2) + b(\sin 2\omega_1 + \sin 2\omega_2))^2. \quad (6)$$

Необходимо исследовать форму амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) системы. Анализ частотных свойств с использованием выражений (5-6) будем проводить методами дифференциальной геометрии в пространстве [2], ранее использованными при исследовании двумерных цифровых систем первого порядка [3].

Методика исследований

Предлагаемая методика исследования частотных характеристик двумерного цифрового фильтра основана на том, что его АЧХ представляется поверхностью в трехмерном пространстве $(\omega_1, \omega_2, |H|)$, имеющей свои экстремальные точки. Для анализа поведения поверхности в окрестности этих точек применим аппарат дифференциальной геометрии в пространстве [1], позволяющий определить, является ли точка локальным максимумом или минимумом или это какой-то другой тип точки.

Пусть $|H|^2$ – поверхность квадрата модуля частотной характеристики (рис. 2) и $\vec{r} = \vec{r}(\omega_1, \omega_2, |H|^2)$ – ее радиус-вектор. Выберем на поверхности $|H|^2$ некоторую точку X_0 и рассмотрим плоскость π_0 , которая касается поверхности $|H|^2$ в этой точке, а также точку S_0 , в которой поверхности $|H|^2$ касается плоскость π_1 .

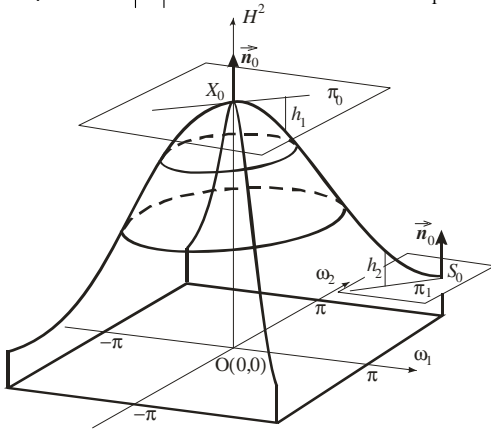


Рис. 2. Графическая иллюстрация метода исследования двумерной АЧХ

О типе фильтра (фильтр нижних частот (ФНЧ), фильтр верхних частот (ФВЧ), ...) можно судить по знаку отклонений h_1 и h_2 поверхности квадрата модуля его частотной характеристики (ЧХ) от касательных плоскостей π_0 и π_1 в точках $X_0(0,0)$ и $S_0(\pi, \pi)$ соответственно. Далее вместо отклонений h_1 и h_2 используется отклонение h , которое находится одинаково для обоих случаев.

Отклонение $h = h_1$ произвольной точки X поверхности $|H|^2$ от плоскости π_0 определим формулой

$$h = (\vec{r}(X) - \vec{r}(X_0), \vec{n}_0),$$

где $\vec{n}_0 = \frac{\mathbf{r}_{\omega_1} \times \mathbf{r}_{\omega_2}}{|\mathbf{r}_{\omega_1} \times \mathbf{r}_{\omega_2}|}$ – единичный вектор нормали

к поверхности в точке X_0 ; $\vec{r}_{\omega_1} = (1, 0, H_{\omega_1}^2)$, $\vec{r}_{\omega_2} = (0, 1, H_{\omega_2}^2)$ – производные радиуса-вектора по соответствующим координатам (для плоскости π_1 имеем $h = h_2$). Это отклонение, взятое по абсолютной величине, равно расстоянию от точки X до плоскости π_0 . Отклонение положительно, если точка X и конец вектора \vec{n}_0 лежат по одну сторону от плоскости π_0 и отрицательно, если эти точки лежат по разные стороны от плоскости π_0 . Разложим функцию $\mathbf{r}(X)$ в окрестности точки X_0 в ряд Тейлора с точностью до квадратичных членов, тогда разность $(\vec{r}(X) - \vec{r}(X_0))$ можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{r}(X) - \vec{r}(X_0) = & \mathbf{r}_{\omega_1}(X_0)(\omega_1 - \omega_{10}) + \mathbf{r}_{\omega_2}(X_0)(\omega_2 - \omega_{20}) + \\ & + \frac{1}{2} \{ \mathbf{r}_{\omega_1 \omega_1}(X_0)(\omega_1 - \omega_{10})^2 + 2\mathbf{r}_{\omega_1 \omega_2}(X_0)(\omega_1 - \omega_{10})(\omega_2 - \omega_{20}) + \\ & + \mathbf{r}_{\omega_2 \omega_2}(X_0)(\omega_2 - \omega_{20})^2 \} + o(\rho^2) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{где } \rho = \sqrt{(\omega_1 - \omega_{10})^2 + (\omega_2 - \omega_{20})^2}.$$

Умножив обе части равенства (7) на \vec{n}_0 , получим

$$\begin{aligned} h = & (\mathbf{r}_{\omega_1}, \vec{n}_0)(\omega_1 - \omega_{10}) + (\mathbf{r}_{\omega_2}, \vec{n}_0)(\omega_2 - \omega_{20}) + \\ & + \frac{1}{2} \{ (\mathbf{r}_{\omega_1 \omega_1}, \vec{n}_0)(\omega_1 - \omega_{10})^2 + 2(\mathbf{r}_{\omega_1 \omega_2}, \vec{n}_0) \times \\ & \times (\omega_1 - \omega_{10})(\omega_2 - \omega_{20}) + (\mathbf{r}_{\omega_2 \omega_2}, \vec{n}_0)(\omega_2 - \omega_{20})^2 \} + o(\rho^2) = \\ = & \frac{1}{2} \{ L(X_0)d\omega_1^2 + 2M(X_0)d\omega_1 d\omega_2 + N(X_0)d\omega_2^2 \} + o(\rho^2), \end{aligned}$$

где $d\omega_1 = \omega_1 - \omega_{10}$, $d\omega_2 = \omega_2 - \omega_{20}$, а

$$L = \frac{(\mathbf{r}_{\omega_1 \omega_1}, \mathbf{r}_{\omega_1}, \mathbf{r}_{\omega_2})}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad M = \frac{(\mathbf{r}_{\omega_1 \omega_2}, \mathbf{r}_{\omega_1}, \mathbf{r}_{\omega_2})}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$N = \frac{(\mathbf{r}_{\omega_2 \omega_2}, \mathbf{r}_{\omega_1}, \mathbf{r}_{\omega_2})}{\sqrt{EG - F^2}} -$$

коэффициенты второй квадратичной формы поверхности, причем $E = \mathbf{r}_{\omega_1}^2$, $G = \mathbf{r}_{\omega_2}^2$, $F = (\mathbf{r}_{\omega_1}, \mathbf{r}_{\omega_2})$, – коэффициенты первой квадратичной формы.

Для определения знака отклонения h проведем анализ знакоопределенности квадратичной формы. Составим матрицу квадратичной формы

$$A(X_0) = \begin{bmatrix} L(X_0) & M(X_0) \\ M(X_0) & N(X_0) \end{bmatrix}.$$

Согласно критерию Сильвестра, для положительной определенности требуется положительность главных миноров матрицы $A(X_0)$, т.е. в нашем случае

$$\begin{cases} L(X_0) > 0; \\ L(X_0)N(X_0) - M^2(X_0) > 0. \end{cases} \quad (8)$$

Для отрицательной определенности необходимо чередование знаков главных миноров матрицы $A(X_0)$, причем первый минор должен быть меньше нуля. В нашем случае имеем

$$\begin{cases} L(X_0) < 0; \\ L(X_0)N(X_0) - M^2(X_0) > 0. \end{cases} \quad (9)$$

При выполнении условий (8) или (9) отклонение h сохраняет знак (совпадающий со знаком второй квадратичной формы) для всех достаточно малых значений ρ независимо от выбора направления на поверхности.

Исследование частотных свойств

Первоначально найдем экстремальные точки поверхности. Частотная характеристика двумерной цифровой системы периодична с одинаковыми периодами по обоим частотам, равными 2π . Рассматриваемая система имеет действительную импульсную характеристику, что уменьшает интервал однозначности вдвое по каждой частоте. Рассмотрим квадрат амплитудно-частотной характеристики. Из условий симметрии коэффициентов достаточно рассмотреть поведение функ-

ции (4) на осях ω_1 и ω_2 , а также на диагоналях $\omega_1 = \omega_2$ и $\omega_1 = -\omega_2$ в верхней полуплоскости частотной плоскости (ω_1, ω_2) .

а) Пусть $\omega_1 = 0$, тогда

$$f(\omega_1, \omega_2) = f(\omega_2) = ((1-a-b) - (a+c)\cos\omega_2 - b\cos 2\omega_2)^2 + ((a+c)\sin\omega_2 + b\sin 2\omega_2)^2. \quad (10)$$

Найдем нули производной $\frac{df(\omega_2)}{d\omega_2}$:

$$\frac{df(\omega_2)}{d\omega_2} = \sin\omega_2(4b(1-a-b)\cos\omega_2 + 2(a+c)(1-a-2b)).$$

Видно, что $\frac{df(\omega_2)}{d\omega_2} = 0$ при $\sin(\omega_2) = 0$, откуда

$$\omega_{2,1,2} = 0, \pi \text{ на рассматриваемом отрезке, а из выражения } (a+c)(1-a-2b) + 2b(1-a-b)\cos\omega_2 = 0 \text{ получаем}$$

$$\cos\omega_2 = \frac{(a+c)(a+2b-1)}{2b(1-a-b)}, \quad (11)$$

причем должно выполняться условие

$$\left| \frac{(a+c)(a+2b-1)}{2b(1-a-b)} \right| \leq 1. \quad (12)$$

б) Пусть $\omega_2 = 0$, тогда

$$f(\omega_1, \omega_2) = f(\omega_1) = ((1-a-b) - (a+c)\cos\omega_1 - b\cos 2\omega_1)^2 + ((a+c)\sin\omega_1 + b\sin 2\omega_1)^2. \quad (13)$$

$$\frac{df(\omega_1)}{d\omega_1} = 2\sin\omega_1((a+c)(1-a-2b) + 4b\cos\omega_1).$$

Здесь $\frac{df(\omega_1)}{d\omega_1} = 0$ при $\omega_{1,1,2} = 0, \pm\pi$ и

$$(a+c)(1-a-2b) + 4b\cos\omega_1 = 0, \text{ откуда}$$

$$\cos\omega_1 = \frac{(a+c)(a+2b-1)}{4b}, \quad (14)$$

при этом

$$\left| \frac{(a+c)(a+2b-1)}{4b} \right| \leq 1. \quad (15)$$

в) Пусть $\omega_1 = \omega_2 = \omega_+$, тогда

$$f(\omega_1, \omega_2) = f(\omega_+) = (1-2a\cos\omega_+ - (2b+c)\cos 2\omega_+)^2 + (2a\sin\omega_+ + (2b+c)\sin 2\omega_+)^2. \quad (16)$$

$$\frac{df(\omega_+)}{d\omega_+} = 2\sin\omega_+(2a(1-2b-c) + 4(2b+c)\cos\omega_+).$$

Найдем нули полученной функции:

$$\frac{df(\omega_+)}{d\omega_+} = 0 \text{ при } \sin\omega_+ = 0, \text{ откуда } \omega_+ = 0, \pm\pi \text{ и}$$

$$2a(1-2b-c) + 4(2b+c)\cos\omega_+ = 0, \text{ откуда}$$

$$\cos\omega_+ = \frac{a(2b+c-1)}{2(2b+c)}, \quad (17)$$

при условии

$$\left| \frac{a(2b+c-1)}{2(2b+c)} \right| \leq 1. \quad (18)$$

г) Пусть $\omega_2 = -\omega_1 = \omega_-$, тогда

$$f(\omega_1, \omega_2) = f(\omega_-) = (1-2a\cos\omega_- - 2b\cos 2\omega_-)^2. \quad (19)$$

Найдем нули функции:

$$\frac{df(\omega_-)}{d\omega_-} = 4\sin\omega_-(a+4b\cos\omega_-)(1-c) - 2a\cos\omega_- - 2b\cos 2\omega_-$$

$$\frac{df(\omega_-)}{d\omega_-} = 0 \text{ при}$$

$$1) \sin\omega_- = 0, \text{ откуда } \omega_- = 0, \pi;$$

$$2) a+4b\cos\omega_- = 0, \text{ откуда}$$

$$\cos\omega_- = -\frac{a}{4b}, \quad (20)$$

при условии

$$\left| \frac{a}{4b} \right| \leq 1; \quad (21)$$

$$3) (1-c) - 2a\cos\omega_- - 2b\cos 2\omega_- = 0.$$

Решив это уравнение, получим

$$\cos\omega_{-1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b(1+2b-c)}}{4|b|}, \quad (22)$$

при выполнении условий

$$\left\{ \begin{aligned} \left| \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b(1+2b-c)}}{4|b|} \right| \leq 1. \\ a^2 + 4b(1+2b-c) \geq 0 \end{aligned} \right. \quad (23)$$

Таким образом, анализируя выражения (10-23), можно установить, что рассматриваемая система имеет 13 экстремумов по направлениям осей и диагоналей (рис. 3).

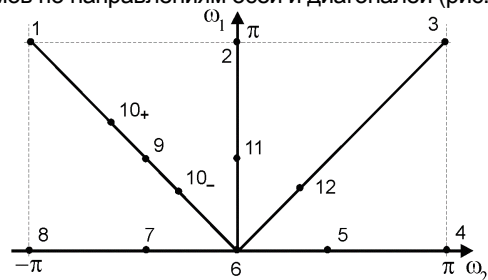


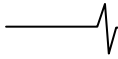
Рис. 3. Экстремумы амплитудно-частотной характеристики двумерного фильтра

Система является монотонной при отсутствии экстремумов у функций (10), (12), (16), (19). С учетом (20-23) этого можно достичь при выполнении следующих условий:

$$\left\{ \begin{aligned} \left| \frac{(a+c)(a+2b-1)}{2b(1-a-b)} \right| > 1; \\ \left| \frac{(a+c)(a+2b-1)}{4b} \right| > 1; \\ \left| \frac{a}{4b} \right| > 1; \\ \left| \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b(1+2b-c)}}{4|b|} \right| > 1; \\ a^2 + 4b(1+2b-c) > 0. \end{aligned} \right. \quad (24)$$

Фильтры нижних и верхних частот

Далее определим области существования фильтров нижних и верхних частот с монотонными характеристиками. Для этого достаточно рассмотреть отклонения произвольных точек



от касательных плоскостей, проведенных только в точках $(0,0)$ и (π, π) , причем рассматривать будем достаточно малые окрестности точек по всем направлениям от точки касания. Для этого, как уже отмечалось, необходимо вычислить коэффициенты второй квадратичной формы поверхности.

Найдем производные $\frac{\partial H^2}{\partial \omega_1}$ и $\frac{\partial H^2}{\partial \omega_2}$:

$$\frac{\partial H^2}{\partial \omega_1} = -\frac{1}{f^2(\omega_1, \omega_2)} \frac{\partial f(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial H^2}{\partial \omega_2} = -\frac{1}{f^2(\omega_1, \omega_2)} \frac{\partial f(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_2}. \quad (26)$$

В точках $(0,0)$ и (π, π) производные (25-26) равны нулю. Следовательно, в этих точках $\mathbf{r}_{\omega} = (1, 0, 0)$ и $\mathbf{r}_{\omega} = (0, 1, 0)$. Тогда коэффициенты второй квадратичной формы можно записать следующим образом:

$$L(0,0) = \frac{\partial^2 H^2}{\partial \omega_1^2} \Big|_{(0,0)}, \quad M(0,0) = \frac{\partial^2 H^2}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} \Big|_{(0,0)}, \quad N(0,0) = \frac{\partial^2 H^2}{\partial \omega_2^2} \Big|_{(0,0)},$$

$$L(\pi, \pi) = \frac{\partial^2 H^2}{\partial \omega_1^2} \Big|_{(\pi, \pi)}, \quad M(\pi, \pi) = \frac{\partial^2 H^2}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} \Big|_{(\pi, \pi)},$$

$$N(\pi, \pi) = \frac{\partial^2 H^2}{\partial \omega_2^2} \Big|_{(\pi, \pi)}$$

Получим выражения для вторых производных квадрата модуля ЧХ:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \omega_1^2} = \frac{1}{f^2(\omega_1, \omega_2)} \left(\frac{2}{f(\omega_1, \omega_2)} \left(\frac{\partial f(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1} \right)^2 - \frac{\partial^2 f(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1^2} \right), \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \omega_2^2} = \frac{1}{f^2(\omega_1, \omega_2)} \left(\frac{2}{f(\omega_1, \omega_2)} \left(\frac{\partial f(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 f(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_2^2} \right), \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} = \frac{1}{f^2(\omega_1, \omega_2)} \left(\frac{2}{f(\omega_1, \omega_2)} \frac{\partial f(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1} \frac{\partial f(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_2} - \frac{\partial^2 f(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} \right), \quad (29)$$

В точках $(0,0)$ и (π, π) производные (27-29) имеют значения

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \omega_1^2} \Big|_{(0,0)} = \frac{\partial^2 H}{\partial \omega_2^2} \Big|_{(0,0)} = \frac{2\{(1-2(a+b)-c) \times (c+a+4b) + (a+c+2b)^2\}}{(1-2(a+b)-c)^4},$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \omega_1^2} \Big|_{(\pi, \pi)} = \frac{\partial^2 H}{\partial \omega_2^2} \Big|_{(\pi, \pi)} = \frac{2\{(1+2(a-b)-c) \times (c-a+4b) + (c-a+2b)^2\}}{(1+2(a-b)-c)^4},$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} \Big|_{(0,0)} = -\frac{2c}{(1-2(a+b)-c)^3},$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} \Big|_{(\pi, \pi)} = -\frac{2c\{(1+2(a-b)+c)\}}{(1+2(a-b)-c)^4}.$$

Получим выражения для положительности и отрицательности отклонений поверхности квадрата модуля ЧХ

от касательных плоскостей в точках $(0,0)$ и (π, π) . В точке $(0,0)$ условие положительности имеет вид:

$$\begin{cases} (1-2(a+b)-c) \times (c+a+4b) + \\ + (a+c+2b)^2 < 0, \\ [(1-2(a+b)-c) \times (c+a+4b) + \\ + (a+c+2b)^2]^2 - [1-2(a+b)-c]^2 > 0, \end{cases} \quad (30)$$

а условие отрицательности

$$\begin{cases} (1-2(a+b)-c) \times (c+a+4b) + (a+c+2b)^2 > 0, \\ [(1-2(a+b)-c) \times (c+a+4b) + (a+c+2b)^2]^2 - [1-2(a+b)-c]^2 > 0. \end{cases} \quad (31)$$

В точке (π, π) условие положительности имеет вид:

$$\begin{cases} (1+2(a-b)-c) \times (c-a+4b) + (c-a+2b)^2 < 0, \\ [(1+2(a-b)-c) \times (c-a+4b) + (c-a+2b)^2]^2 - [1+2(a-b)+c]^2 > 0, \end{cases} \quad (32)$$

а условие отрицательности

$$\begin{cases} (1+2(a-b)-c) \times (c-a+4b) + (c-a+2b)^2 > 0, \\ [(1+2(a-b)-c) \times (c-a+4b) + (c-a+2b)^2]^2 - [1+2(a-b)+c]^2 > 0. \end{cases} \quad (33)$$

Для того чтобы система была фильтром нижних частот, необходимо чтобы в точке $(0,0)$ отклонение было отрицательно, а в точке (π, π) – положительно. Это достигается при выполнении условий (31) и (32).

Для того чтобы система была фильтром верхних частот, необходимо чтобы в точке $(0,0)$ отклонение было положительно, а в точке (π, π) – отрицательно. Это достигается при выполнении условий (30) и (33).

Решим уравнения (30)-(33) совместно с условиями устойчивости (3) и условиями монотонности (24). Получим области коэффициентов, соответствующие устойчивым фильтрам верхних и нижних частот с монотонными АЧХ.

В случае ФНЧ максимальное подавление входного сигнала будет осуществляться на частоте (π, π) , достигая значения:

$$D_{\max} = 20 \lg \left(\frac{1-2a-c-2b}{1+2a-c+2b} \right). \quad (34)$$

В случае ФВЧ максимальное подавление входного сигнала будет осуществляться на частоте $(0,0)$ и определяться количественно в виде:

$$D_{\max} = 20 \lg \left(\frac{1+2a-c-2b}{1-2a-c+2b} \right). \quad (35)$$

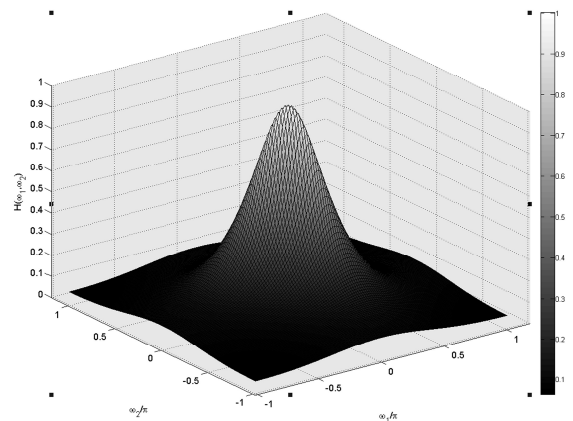


Рис. 4. Типичный вид АЧХ двумерного фильтра нижних частот

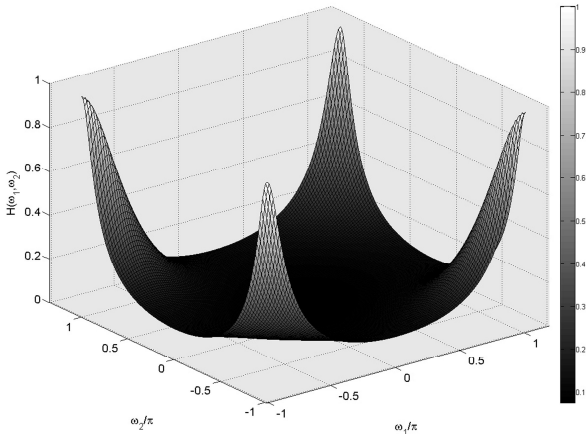


Рис. 5. Типичный вид АЧХ двумерного фильтра верхних частот

Типичный вид АЧХ фильтра нижних частот приведен на рис. 4. Он соответствует следующим параметрам фильтра: $a = 0.49, b = -0.06, c = 0.01, D_{\max} = 53$ дБ.

Типичный вид АЧХ фильтра верхних частот приведен на рис. 5. Он соответствует следующим параметрам фильтра: $a = -0.46, b = -0.04, c = 0.01$. При этом, исходя из (35), $D_{\max} = 50$ дБ.

Селектирующие свойства одномерных цифровых фильтров нижних и верхних частот принято характеризовать частотой среза, соответствующей затуханию АЧХ на уровне 3 дБ. Для двумерного случая введем понятие линии среза, точки которой имеют координаты $(\omega_{c1}, \omega_{c2})$. Найдем ее уравнение для случая низкочастотного фильтра.

Свое максимальное значение АЧХ принимает в точке с координатами $(0,0)$

$$|H|_{\max}^2 = |H(0,0)|^2 = \frac{1}{f(0,0)} = \frac{1}{(1-2a-c-2b)^2}. \quad (36)$$

Проведем нормировку квадрата АЧХ на максимальное значение (36) и найдем уравнение линии, на которой квадрат АЧХ спадает в два раза, что соответствует спаду самой АЧХ на 3 дБ

$$\frac{|H|^2(\omega_{c1}, \omega_{c2})}{|H|_{\max}^2} = \frac{(1-2a-c-2b)^2}{f(\omega_{c1}, \omega_{c2})} = \frac{1}{2}. \quad (37)$$

Используя (6), из (37) получим:

$$(1-a(\cos\omega_{c1} + \cos\omega_{c2}) - c \cos(\omega_{c1} + \omega_{c2}) - b(\cos 2\omega_{c1} + \cos 2\omega_{c2}))^2 + (a(\sin\omega_{c1} + \sin\omega_{c2}) + c \sin(\omega_{c1} + \omega_{c2}) + b(\sin 2\omega_{c1} + \sin 2\omega_{c2}))^2 = 2(1-2a-c-2b)^2. \quad (38)$$

Уравнение (38) достаточно сложно и неудобно для использования, так как необходимо определять количественные значения ω_{c1} и ω_{c2} . Аппроксимируем его более удобной кривой, используя разложения в ряд Тейлора вблизи точки $(0,0)$ функций $\sin \omega$ и $\cos \omega$.

После некоторых математических выкладок получим уравнение линии среза системы для случая фильтра нижних частот в следующем виде:

$$A\omega_{c1}^2 + C\omega_{c2}^2 + 2B\omega_{c1}\omega_{c2} = R^2, \quad (39)$$

где

$$R^2 = \frac{1-2a-c-2b}{a+4b},$$

$$A = C = (1-2a-c-2b)(a+c+4b) + (a+c+2b)^2, \quad (40)$$

$$2B = 2(1-2a-c-2b)c + (a+c+2b)^2.$$

Проведем аналогичные выкладки для случая фильтра верхних частот. Свое максимальное значение АЧХ принимает в точке с координатами (π, π)

$$|H|_{\max}^2 = |H(\pi, \pi)|^2 = \frac{1}{f(\pi, \pi)} = \frac{1}{(1+2a-c-2b)^2}. \quad (41)$$

Проведем нормировку квадрата АЧХ на максимальное значение (41) и найдем уравнение линии, на которой квадрат АЧХ спадает в два раза, что соответствует спаду самой АЧХ на 3 дБ

$$\frac{|H(\omega_{c1}, \omega_{c2})|^2}{|H|_{\max}^2} = \frac{(1+2a-c-2b)^2}{f(\omega_{c1}, \omega_{c2})} = \frac{1}{2}. \quad (42)$$

Используя (6), из (42) получим:

$$(1-a(\cos\omega_{c1} + \cos\omega_{c2}) - c \cos(\omega_{c1} + \omega_{c2}) - b(\cos 2\omega_{c1} + \cos 2\omega_{c2}))^2 + (a(\sin\omega_{c1} + \sin\omega_{c2}) + c \sin(\omega_{c1} + \omega_{c2}) + b(\sin 2\omega_{c1} + \sin 2\omega_{c2}))^2 = 2(1+2a-c-2b)^2. \quad (43)$$

Используя разложения в ряд Тейлора вблизи точки (π, π) функций $\sin \omega$ и $\cos \omega$, получим уравнение линии среза двумерного рекурсивного цифрового фильтра верхних частот в следующем виде, аналогичном (43), но с учетом, что

$$R^2 = \frac{1+2a-c-2b}{-a+4b},$$

$$A = C = (1+2a-c-2b)(-a+c+4b) + (-a+c-2b)^2, \quad (44)$$

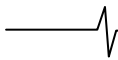
$$2B = 2(1+2a-c-2b)c + 2(-a+c+2b)^2.$$

Выражение (39) представляет собой уравнение эллипса. Анализируя его и (32), можно установить, что линии среза двумерных рекурсивных цифровых фильтров нижних и верхних частот – окружности. Равенства (40) и (44) позволяют количественно оценить значения ω_c по обеим частотным координатам.

Диагональный режекторный фильтр

В рассматриваемой системе АЧХ имеет экстремальные точки только на осях частот ω_1 и ω_2 и на диагоналях $\omega_1 = \omega_2$ и $\omega_1 = -\omega_2$. Под диагональным двумерным режекторным фильтром будем понимать фильтр, у которого области пропускания существуют только на диагоналях $\omega_1 = \omega_2$ и $\omega_1 = -\omega_2$ частотной плоскости, причем обязательно разделенные областями непропускания на интервале однозначности. Определим математически ограничения на коэффициенты исследуемой системы для получения областей существования диагонального режекторного фильтра.

Необходимо получить области пропускания в окрестностях точек (π, π) , $(0,0)$ и $(-\pi, \pi)$, разделенные между собой областями непропускания. В силу симметричности системы $|H(\pi, \pi)| = |H(-\pi, \pi)|$, будем рассматривать только точку с координатами (π, π) . В окрестностях точек (π, π) и $(0,0)$ необходимо, чтобы отклонение любой точки АЧХ от касательных плоскостей, проведенных к ее поверх-



ности в этих точках, было отрицательно, что достигается выполнением условий (26) и (28). При этом значения АЧХ в этих точках должны попадать в полосу пропускания, т.е. должны превышать значение $\frac{1}{\sqrt{2}}$ от максимального. Так как рассматривается симметричная система, то возможны два различных случая, меняющие все математические выкладки. Первый – наличие максимума АЧХ в точке $(0,0)$, и второй – наличие максимума АЧХ в точке (π, π) . Рассмотрим области подавления сигнала на диагоналях $\omega_1 = \omega_2$ и $\omega_1 = -\omega_2$.

Максимальное подавление сигнала на диагонали $\omega_1 = \omega_2$ будет происходить на частоте

$$\omega = \pm \arccos \frac{a(c+2b-1)}{2(c+2b)},$$

и равно

$$D_{\max 1} = 20 \lg \sqrt{[1-2a\omega - (c+2b)(2\omega^2-1)]^2 + 4(a+c\omega+2b\omega)^2(1-\omega^2)}.$$

Максимальное подавление сигнала на диагонали $\omega_1 = -\omega_2$ будет происходить на частоте

$$\omega = \pm \arccos \left(-\frac{a}{4b} \right),$$

и равно $D_{\max 2} = 20 \lg \{1 - 2a\omega - c - 2b - 2b(2\omega^2 - 1)\}$.

Пример типичной АЧХ диагонального режекторного фильтра приведен на рис. 6. Она соответствует следующим параметрам: $a = 0.01$, $b = 0.23$, $c = 0.35$.

Осевой режекторный фильтр

Введем понятие осевого режекторного фильтра. Под осевым режекторным фильтром будем понимать фильтр, у которого области пропускания существуют только на осях ω_1 и ω_2 частотной плоскости, причем обязательно разделенные областями непропускания. Области пропускания в окрестностях точек $(\pi, 0)$, $(0, 0)$, $(0, -\pi)$, $(-\pi, 0)$ и $(0, \pi)$ разделены между собой областями непропускания. В окрестностях точек $(\pi, 0)$ и $(0, 0)$ необходимо, чтобы отклонение h любой точки АЧХ от касательных плоскостей, проведенных к ее поверхности в этих точках, было отрицательно. При этом значения АЧХ характеристики в этих точках должны попадать в полосу пропускания, т.е. превышать значение $\frac{1}{\sqrt{2}}$ от максимального. Так как рассматривается симметричная система, то $|H(\pi, 0)| = |H(0, \pi)| = |H(-\pi, 0)| = |H(0, -\pi)|$, поэтому возможны два различных случая.

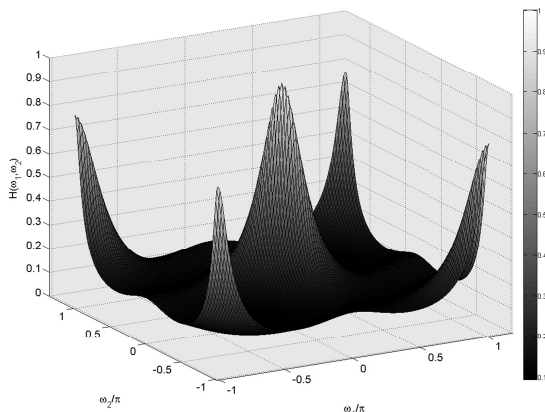


Рис. 6. Типичный вид АЧХ двумерного диагонального режекторного фильтра

Первый – наличие максимума АЧХ в точке $(0,0)$ и второй – наличие максимума АЧХ в точке $(\pi, 0)$. Получены математические ограничения на коэффициенты исследуемой системы для получения областей существования осевого режекторного фильтра.

Максимальное подавление сигнала по оси ω_1 совпадает с максимальным подавлением по оси ω_2 , реализуется в точке

$$\omega = \pm \arccos \frac{(a+c)(a+2b-1)}{4b(1-a-b)}$$

и равно

$$D_{\max} = 20 \lg \sqrt{[1-a-a\omega-c\omega-2b^2\omega]^2 + (a+c+2b\omega)^2(1-\omega^2)}.$$

Пример типичной АЧХ осевого режекторного фильтра приведен на рис. 7. Она соответствует следующим параметрам: $a = 0.245$, $b = 0.33$, $c = 0.33$, $D_{\max} = 18.5$ дБ.

Как и в случае режекторных фильтров, понятие полосового фильтра однозначно для одномерной системы. Для двумерного случая существует некоторая свобода в его определении. Рассматривать будем только некоторые направления АЧХ, а именно: обе оси частот ω_1 и ω_2 и обе диагонали $\omega_1 = \omega_2$ и $\omega_1 = -\omega_2$.

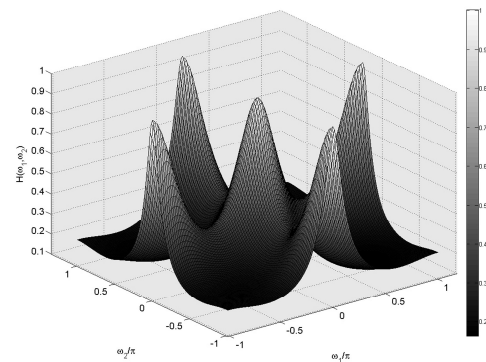


Рис. 7. Типичный вид АЧХ двумерного осевого режекторного фильтра

Диагональный полосовой фильтр

Введем понятие двумерного диагонального полосового фильтра. Под диагональным полосовым фильтром будем понимать фильтр, у которого области пропускания существуют только на диагоналях $\omega_1 = \omega_2$ и $\omega_1 = -\omega_2$ частотной плоскости, причем на интервале однозначности существует только одна область пропускания на каждой из диагоналей. Как и в случае диагональных режекторных фильтров, имеют место ограничения на коэффициенты исследуемой системы для получения областей существования диагонального полосового фильтра.

Необходимо получить области пропускания в окрестностях точек 5, 12, 11, 9 и 7 (рис. 3). В силу симметричности системы достаточно рассмотреть только точки 5, 12 и 9. В окрестностях точек (π, π) и $(0,0)$ необходимо, чтобы отклонение любой точки АЧХ от касательных плоскостей, проведенных к ее поверхности в этих точках, было положительно, что достигается выполнением условий (25) и (27). При этом значения АЧХ в этих точках не должны попадать в полосу пропускания, т.е. не должны превышать значение $\frac{1}{\sqrt{2}}$ от максимального. Так как рассматривается симметричная система, то возможны два различных случая. Первый – наличие максимума АЧХ в точке 12, и второй – наличие максимума АЧХ в точке 9.

Получена область существования диагональных полосовых фильтров. Ее форма в пространстве коэффициентов (рис. 1) достаточно сложна и может быть представлена в виде соответствующих сечений плоскостями $c = const$. Сечения позволяют оценить форму области и ее местоположение в пространстве коэффициентов. Определим резонансные частоты диагонального полосового фильтра. Первоначально рассмотрим диагональ $\omega_1 = \omega_2$. В этом случае

$$\omega_{p_1} = \pm \arccos \frac{a(c + 2b - 1)}{2(c + 2b)}.$$

На диагонали $\omega_1 = -\omega_2$ резонансная частота определяется следующим образом

$$\omega_{p_2} = \pm \arccos \left(-\frac{a}{4b} \right).$$

Пример типичной АЧХ диагонального полосового фильтра приведен на рис. 8. Она соответствует следующим параметрам: $a = 0.04$, $b = -0.275$, $c = -0.05$.

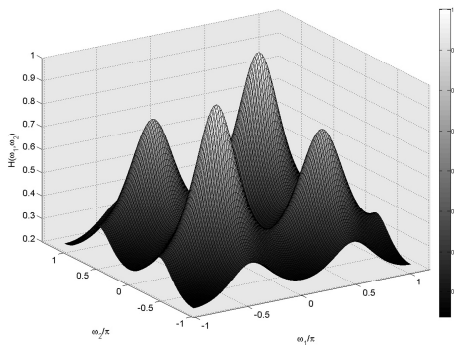


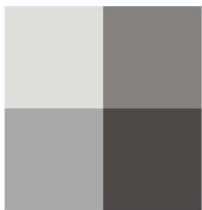
Рис. 8. Типичный вид АЧХ двумерного диагонального полосового фильтра

Заключение

В пространстве параметров двумерной рекурсивной цифровой системы второго порядка с симметричными коэффициентами получены аналитические ограничения на параметры, соответствующие фильтрам нижних и верхних частот. Найдены также аналитические ограничения на коэффициенты в указанных областях для отсутствия у этих фильтров пульсаций амплитудно-частотной характеристики. Предложена аппроксимация линии среза. В связи с тем, что АЧХ двумерной системы является поверхностью, понятие режекторных и полосовых фильтров в двумерном случае намного шире, чем в одномерном. Предложена классификация двумерных полосовых и режекторных фильтров. Введены понятия диагональных и осевых фильтров. Аналитически получены ограничения на параметры системы для существования диагональных полосовых и режекторных, осевых режекторных фильтров, определены резонансные частоты указанных фильтров.

Литература

1. Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов. – М.: Мир, 1988.
2. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. – М.: Наука, 1969.
3. Брюханов Ю.А., Приоров А.Л., Мясников Е.А., Калинин С.А. Частотные свойства двумерных рекурсивных цифровых систем первого порядка // Изв. высш. учеб. заведений. Радиоэлектроника. 1995. № 4. С. 26-30.



**MATROX
IMAGING**

Компания Matrox Imaging более 30 лет успешно поставляет свои ПК-ориентированные программные и аппаратные технологии разработчикам *систем машинного зрения, анализа объектов и изображений, цифрового видео наблюдения, систем визуализации в медицине и биологии, систем управления технологическими процессами.*

Линейка продуктов включает в себя: *фрейм-грабберы, процессоры обработки изображения, видео смарт-камеры, готовые системы машинного зрения, программное обеспечение для анализа изображения (библиотеки MIL). Штаб квартира в Монреале (Канада), офисы и представительства в 20 странах мира.*

Авторизованный представитель компании **Matrox Imaging** в России –
System Video Graphics Alliance (SVGA).