

УДК 621.397.2

## О КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ СЖАТИЯ СИГНАЛОВ

Казарян М.Л.

## Введение

Кодирование с использованием различных дискретных ортогональных преобразований являются эффективным методом сокращения избыточности изображений [1-3]. Сигнал подвергается унитарному преобразованию с дальнейшим отбором спектральных коэффициентов, используемых при решении задачи сжатия. Задачу восстановления сигнала можно рассматривать как обратную (некорректно поставленную) задачу [4]. Методика исследования некорректных задач достаточно известна [4-8]. А.Н. Тихонов предложил метод регуляризации, который является наиболее общим в настоящее время методом решения некорректных задач [4, 6, 7].

Поставленная задача  $z=R(u)$  на паре метрических пространств  $(F,U)$  является корректно поставленной, если удовлетворяются следующие условия:

- 1) для всякого элемента  $u \in U$  существует решение  $z$  из пространства  $F$ ;
- 2) решение определяется однозначно;
- 3) задача устойчива на пространствах  $(F,U)$ , т.е. для  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$  так, что из неравенства  $\rho_U(u_1, u_2) \leq \delta(\varepsilon)$  следует  $\rho_F(z_1, z_2) \leq \varepsilon$ .

При этом доказывается, что для дискретных преобразований Фурье и Уолша регуляризация спектра коэффициентами вида

$$\frac{1}{1 + \alpha k^{1+\varepsilon}}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad \varepsilon > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

позволяет произвести устойчивое суммирование рядов этих преобразований.

Найдена оценка погрешностей при сжатии сигналов с регуляризацией, получены оценки погрешностей для ДПФ (дискретного преобразования Фурье), преобразования Хартли, ДКП (дискретного косинусного преобразования), ДСП (дискретного синусного преобразования), ДПУА (дискретного преобразования Уолша – Адамара) с регуляризацией и без регуляризации. Проведено сравнение соответствующих оценок и найдены значения регуляризирующего параметра  $\alpha$  для этих преобразований. Из данного сравнения следует, что восстановленный сигнал с применением регуляризации ближе к оригиналу, чем сигнал восстановленный без применения метода регуляризации.

## Математическая постановка задачи

Пусть  $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$  исходный вектор данных размерности  $n$ , рассматриваемый как реализация некоторого случайного процесса с определенными свойствами и

*Исследуется применение метода регуляризации Тихонова в задаче сжатия сигналов посредством дискретных ортогональных преобразований. Данная задача исследуется с точки зрения некорректно поставленной. Находятся параметры регуляризации для различных дискретных ортогональных преобразований (ДОП). В работе определяются матрицы выбора спектральных компонент для разных ДОП. Получены оценки погрешностей восстановления сжатого сигнала кодированного посредством ортогональных преобразований с регуляризацией и без регуляризации. Из данных оценок следует, что сигнал, восстановленный с применением метода регуляризации Тихонова, ближе к исходному сигналу нежели сигнал, восстановленный без применения метода регуляризации.*

ковариационной матрицей  $\sum x$ ;  $F$  – ортогональное преобразование, задаваемое невырожденной  $n \times n$  - матрицей отсчетов базисных функций некоторой ортогональной системы  $\{\varphi_k(t)\}_{k \geq 0}$ :

$$F = \begin{bmatrix} \varphi_0(0) & \varphi_0(1) & \dots & \varphi_0(n-1) \\ \varphi_1(0) & \varphi_1(1) & \dots & \varphi_1(n-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{N-1}(0) & \varphi_{N-1}(1) & \dots & \varphi_{N-1}(n-1) \end{bmatrix}$$

$F^{-1}$  – обратное преобразование;  $S$  – матрица выбора размерности  $m \times n$  ранга  $m$ ,  $1 \leq m \leq n$ ;  $W$  – матрица восстановления размерности  $n \times m$ .

Задача состоит в выборе  $F, S, W$  таких, что

$$\rho(x, F^{-1} W S F x) \rightarrow \min, \quad (1)$$

где  $\rho$  – заданная метрика.

При решении более простой задачи зафиксируем базис  $F$  и положим  $W = S^T$ . Тогда в (1) минимизация производится только по  $S$ . В такой постановке это решение известно как задача отыскания оптимального метода зонного кодирования при сжатии данных посредством преобразования  $F$  [9]. Алгоритм зонного кодирования при сжатии данных описывается в следующем виде.

Пусть  $x$  – исходный вектор пространства  $(X, \rho)$  векторов размерности  $N$ .  $F$  – ортогональная матрица размерности  $N \times N$ .

1 шаг. Вектор – сигнал  $x$  подвергается преобразованию  $F$ :

$$y = Fx = (y_0, \dots, y_{n-1})^T.$$

2 шаг. Вектор – спектральных компонент  $y$  заменяется посредством «оператора выбора»  $S$  на меньший по размерности  $\hat{y}$ :

$$\hat{y} = Sy = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}),$$

который и подлежит передаче по каналам связи, хранению и т.д. Отметим, что матрица  $S$  размерности  $m \times n$  имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Величину  $k = \frac{n}{m}$  назовем коэффициентом сжатия.

3 шаг. На приемной стороне полученный вектор  $\hat{y}$  дополняется до размерности  $n$  (все компоненты, кроме отобранных, полагаются равными нулю), т.е.

$$\tilde{y} = S^T \hat{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, 0, \dots, 0).$$

4 шаг. Вектор  $\tilde{y}$  подвергается преобразованию  $F^{-1}$ , т.е. определяется вектор  $\hat{x} = F^{-1} \tilde{y}$ , который восстанавливает исходный вектор данных с погрешностью

$$\varepsilon = \rho(x, \hat{x}) \quad (2)$$

Задача состоит в определении оптимального способа зонного кодирования, т.е. такого выбора заменяемых нулями компонент, который гарантирует при заданном  $k$  минимум

$$\varepsilon^* = \sup_{x \in (X, \rho)} \varepsilon.$$

Очевидно, что заменять нулями целесообразно те компоненты вектора  $y$ , которые малы по абсолютной величине и, следовательно, вносят меньший вклад при восстановлении исходного вектора. Кроме того, следует иметь в виду, что при построении программ реализации дискретных ортогональных преобразований (ДОП) используется внутренняя структура преобразования. Матрица  $F$  разбивается на однотипные блоки, благодаря чему возможно распараллеливание вычислений. Поэтому целесообразно заменять нулями спектральные компоненты, соответствующие целиком блоку (или нескольким блокам) матрицы  $F$ .

Более детально остановимся на процессе кодирования и декодирования двумерных сигналов (изображений) посредством ортогональных преобразований.

Поступающие на вход системы исходные изображения размерности  $n \times n$  представим в виде их разверток, а именно  $m = n^2$  элементным вектором, т.е. рассматриваем одномерный сигнал.

Процесс кодирования производится в два этапа.

1. Посредством преобразования  $F$   $m$ -мерное пространство исходных векторов  $f$  отображается в  $m$ -мерное спектральное пространство векторов  $\hat{f}$ .

2. Переходом в  $k$ -мерное ( $k < m$ ) пространство посредством оператора  $S$  понижается размерность вектора  $\hat{f}$ , т.е. осуществляется отбор наиболее информативных спектральных компонент вектора  $\hat{f}$ .

Отметим, что наиболее информативными понимаются те спектральные компоненты, передача которых позволяет в декодере получить оценку  $g$  исходного вектора  $f$  с минимально возможными искажениями, определяемыми выбранной метрикой  $\rho(f, g)$ .

Процесс декодирования производится также в два этапа:

1. Посредством оператора  $W$  осуществляется фильтрация зашумленного усеченного вектора  $\hat{f}$  и переход из  $k$ -мерного в  $m$ -мерное пространство спектральных компонент.

2. Посредством оператора  $F^{-1}$   $m$ -мерное пространство спектральных компонент отображается в  $m$ -мерное пространство исходных векторов.

Приведенный выше анализ показывает, что в процессе кодирования и декодирования изображений посредством ортогональных преобразований, важное значение имеет решение задачи определения матрицы выбора для различных типов ортогональных дискретных преобразований.

Итак, в процессе сжатия и восстановления сигнала важное место занимает задача определения вида матрицы выбора для различных ортогональных преобразований. В соответствии с этим удобно ввести следующее обозначение:

$$N = r^n; \text{ вектор } y_s = (0, \dots, 0, y_{r^s}, y_{r^{s+1}}, \dots, 0, \dots, 0), \\ s = 0, \dots, n-1 \text{ называется } s\text{-й пачкой вектора } y; \\ X_\delta = \{x = (x_0, \dots, x_{N-1}) : \max_{1 \leq k \leq n} |x_{k-1} - x_k| \leq \delta\}. \quad (3)$$

где  $x_i$  - действительные числа,  $\delta > 0$ .

Перейдем к вопросу оценки спектров различных ортогональных преобразований.

Пусть  $F = (f_{i,j})_{i,j=0}^{N-1}$  матрица дискретного преобразования Фурье,  $x = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1}) \in X_\delta$  - исходный сигнал. Компоненты спектрального вектора  $y = Fx$  имеют вид

$$y_l = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \exp\left\{\frac{-2\pi i k l}{N}\right\}.$$

В работе [10] было доказано, что

$$\max_{x \in X_\delta} |y_l| \geq \frac{\delta}{2 \sin \frac{\pi l}{N}}, \quad l=1,2,\dots,n-1. \quad (4)$$

Дискретная функция  $\sin \frac{\pi l}{N}$ ,  $l=1,2,\dots,n-1$  имеет вид:

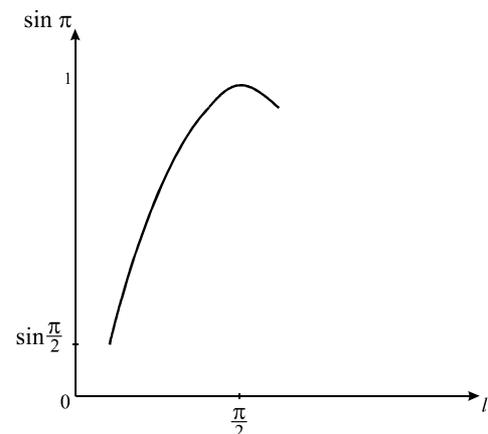


Рис.1. Поведение дискретной функции  $\sin \frac{\pi l}{N}$ ,  $l=1,2,\dots,n-1$ .

Из рис.1 и формулы (4) заключаем, что центральные компоненты спектра  $y = Fx$ ,  $y = (y_0, \dots, y_{N-1})$  менее информативны. Следовательно, при сжатии данных рекомендуется использовать матрицу выбора следующего вида:

$$\begin{pmatrix} I & N_0 & N_0 \\ N_0 & N_0 & N_0 \\ N_0 & N_0 & I \end{pmatrix},$$

где  $N_0$  - нулевые матрицы соответствующих порядков.

Например, пусть длина исходного вектора  $x$  равна  $n=64$ , а коэффициент сжатия равен 4, т.е. при сжатии необходимо сохранить 16 компонент спектрального вектора  $y$ . В этом случае матрица выбора имеет следующий вид

$$\begin{matrix} I_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 \\ 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 \\ 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 \\ 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 \\ 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 \\ 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 \\ 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 \\ 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 & 0_8 & I_8 \end{matrix}$$

Пользуясь той же методикой и оценками, приведенными в [10], можно прийти к следующему утверждению.

При сжатии сигнала необходимо заменять нулями:

- центральные компоненты спектра для преобразования Фурье и Хартли;

- последние компоненты спектра для дискретного косинусного преобразования (ДКП), дискретного синусного преобразования (ДСП), дискретного преобразования Уолша-Пэли (ДПУП), дискретного преобразования Уолша (ДПУ);

- компоненты спектра с номерами

$$2^{r-1} \cdot (2^i - 1), \quad r = 1, 2, \dots, k; \quad i = 1, 2, \dots, 2^{n-r}$$

для дискретного преобразования Уолша – Адамара (ДПУА), где  $2^n$  - длина сигнала,  $2^k$  - коэффициент сжатия.

Оценим погрешности восстановления сжатого сигнала кодированного посредством ДОП с регуляризацией и без регуляризации.

Пусть  $F$  – матрица дискретного преобразования Фурье. Если  $x$  – исходный сигнал, а  $\bar{x}$  - восстановленный после сжатия сигнал, то, согласно равенства Парсевала и линейности преобразования Фурье, имеет место равенство:

$$\frac{1}{n} \cdot \rho_{l_2}(x, F^{-1}WSFx) = \rho_{l_2}(Fx, WSFx) = \rho_{l_2}(y, \bar{y}),$$

где  $\rho_{l_2}$  - среднеквадратическая метрика.

Следовательно, для оценки погрешности при сжатии сигналов достаточно иметь оценку вида

$$\varepsilon(n, k) = \sup_{x \in X_\delta} \rho_{l_2}(y, \bar{y}). \quad (5)$$

Если спектр сигнала рассматривать как исходный сигнал  $y = Fx$ , то после сжатия, передачи и экстраполяции этот сигнал отличается от исходного сигнала (спектра), и это отличие можно с некоторой точностью устранить при помощи регуляризации исходного сигнала. Ошибка восстановления с регуляризацией имеет вид:

$$\varepsilon(n, k, \alpha) = \sup_{x \in X_\delta} \rho_{l_2}(y_r, \bar{y}_r), \quad (6)$$

где  $k$  – заданный коэффициент,  $y_r$  – исходный регуляризованный сигнал,  $\bar{y}_r$  - соответствующий сжатый сигнал,  $\alpha$ -параметр регуляризации.

Возникает задача нахождения оценки погрешности восстановления исходного сигнала  $x$  без регуляризации и с регуляризацией, т.е. сравнение (5) с равенством

$$\varepsilon_r(n, k, \alpha) = \sup_{x \in X_\delta} \rho_{l_2}(x, x_r), \quad (7)$$

где  $x_r$  - восстановленный сигнал, что согласно (3) эквивалентно задаче определения  $\rho_{l_2}(y, y_r)$ .

Последующее утверждение посвящено получению оценок вида (5) – (7) для различных дискретных ортогональных преобразований и их сравнению.

Справедливы следующие оценки для:

- дискретного преобразования Фурье (ДПФ)

$$\varepsilon(n, k) \leq \frac{\delta}{2} \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} \cdot \sqrt{n - \frac{n}{k}},$$

$$\varepsilon_r(n, k, \alpha) \leq \frac{\alpha \cdot (n-1)^{1+\varepsilon} \cdot \delta}{2 \cdot (1+\alpha)} \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} \cdot \sqrt{n - \frac{n}{k}},$$

$$\alpha \leq \frac{1}{(n-1)^{1+\varepsilon} - 1};$$

- дискретного преобразования Хартли (ДПХ)

$$\varepsilon(n, k) \leq \frac{\delta}{2} \cdot \sqrt{n - \frac{n}{k}},$$

$$\varepsilon_r(n, k, \alpha) \leq \frac{\alpha \cdot (n-1)^{1+\varepsilon} \cdot \delta}{2 \cdot (1+\alpha)} \cdot \sqrt{n - \frac{n}{k}},$$

$$\alpha \leq \frac{1}{(n-1)^{1+\varepsilon} - 1};$$

- дискретного косинусного преобразования (ДКП)

$$\varepsilon(n, k) \leq \frac{\delta \cdot \sqrt{2 \cdot n}}{\pi} \cdot \sqrt{n - \frac{n}{k}},$$

$$\varepsilon_r(n, k, \alpha) \leq \frac{\alpha \cdot \sqrt{2 \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{k} + 1\right)^{1+\varepsilon} \cdot \delta}{\pi \cdot (1+\alpha)} \cdot \sqrt{n - \frac{n}{k}},$$

$$\alpha \leq \frac{1}{\left(\frac{n}{k} + 1\right)^{1+\varepsilon} - 1};$$

- дискретного синусного преобразования (ДСП)

$$\varepsilon(n, k) \leq \frac{\delta \cdot \sqrt{n+1}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{n - \frac{n}{k}},$$

$$\varepsilon_r(n, k, \alpha) \leq \frac{\alpha \cdot \sqrt{2 \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{k} - 1\right)^{1+\varepsilon} \cdot \delta}{\pi \cdot \sqrt{2} \cdot (1+\alpha)} \cdot \sqrt{n - \frac{n}{k}},$$

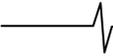
$$\alpha \leq \frac{1}{\left(\frac{n}{k} - 1\right)^{1+\varepsilon} - \pi};$$

- дискретного преобразования Уолша-Адамара (ДПУА), Уолша – Пэли (ДПУП), Уолша (ДПУ) (здесь коэффициент сжатия равен  $2^k$ )

$$\varepsilon(n, k) \leq \frac{\delta \cdot \sqrt{2^n} \cdot 2^t}{\pi} \cdot \sqrt{2^n - 2^{n-t}},$$

$$\varepsilon_r(n, k, \alpha) \leq \frac{\alpha \cdot 2^{(n-t) \cdot (1+\varepsilon) - 1} \cdot \sqrt{2^n} \cdot 2^t \cdot \delta}{(1+\alpha)} \cdot \sqrt{2^n - 2^{n-t}},$$

$$\alpha \leq \frac{1}{2^{(n-t) \cdot (1+\varepsilon) - 1} - 1}.$$



Для доказательства последних утверждений докажем следующую теорему 1.

**Теорема 1.** Если  $\hat{y}$  - вектор, который получается из вектора  $y = Fx$  заменой нулями  $2m$  центральных компонент ( $m < \frac{n}{2}$ ), т.е. коэффициент сжатия имеет вид

$k = \frac{n}{n-2m}$  .., то справедливо следующее соотношение

$$\frac{\delta}{2} \cdot \sqrt{n - \frac{n}{k}} \leq \varepsilon(n, k) \leq \frac{\delta}{2} \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} \cdot \sqrt{n - \frac{n}{k}}. \quad (7)$$

Доказательство. Согласно теореме [10], для  $j = 1, 2, \dots, n-1$  имеем

$$\frac{\delta}{2 \cdot \sin \frac{\pi \cdot j}{n}} \leq \max_{x \in X_\delta} |y_j| \leq \frac{\delta \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}}}{2 \cdot \sin \frac{\pi \cdot j}{n}}. \quad (8)$$

Обозначим

$$y_1(j) = \frac{\delta}{2 \cdot \sin \frac{\pi \cdot j}{n}}, \quad y_2(j) = \frac{\delta \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}}}{2 \cdot \sin \frac{\pi \cdot j}{n}}. \quad (9)$$

Очевидно, что и для вектора  $\hat{y}$  также выполняется соотношение (8). Следовательно, используя равенство Парсеваля, из (8) находим

$$\left[ \sum_{j=\frac{n}{2}-m}^{\frac{n}{2}+m-1} y_1^2(j) \right]^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon(n, k) \leq \left[ \sum_{j=\frac{n}{2}-m}^{\frac{n}{2}+m-1} y_2^2(j) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

Сначала оценим выражение в правой части (10). Из формул (8), (9) имеем

$$\left[ \sum_{j=\frac{n}{2}-m}^{\frac{n}{2}+m-1} y_2^2(j) \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\delta \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}}}{2} \cdot \left[ \sum_{j=\frac{n}{2}-m}^{\frac{n}{2}+m-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi \cdot j}{n}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

Так как  $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi \cdot m}{n}\right) = \cos \frac{\pi \cdot m}{n}$ , то при  $j \neq \frac{n}{2}$  находим

$$\begin{aligned} \sum_{j=\frac{n}{2}-m}^{\frac{n}{2}+m-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi \cdot j}{n}} &= \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi \cdot m}{n}\right)} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi \cdot (m-1)}{n}\right)} + \dots \\ &+ \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}\right)} + \dots + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi \cdot (m-1)}{n}\right)} = (12) \\ &= 2 \cdot \sum_{j=1}^m \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi \cdot j}{n}} - \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi \cdot m}{n}}. \end{aligned}$$

В силу монотонности на интервале  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  функции  $\frac{1}{\cos^2 x}$  находим

$$2 \cdot \sum_{j=1}^m \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi \cdot j}{n}} \leq \frac{2 \cdot n}{\pi} \cdot \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi \cdot (m+1)}{n}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{2 \cdot n}{\pi} \cdot \left( \operatorname{tg} \frac{\pi \cdot (m+1)}{n} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \right). \quad (13)$$

Подставляя значения (13) в (11), получим

$$\varepsilon(n, k) \leq \frac{\delta \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}}}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot n}{\pi} \cdot \left( \operatorname{tg} \frac{\pi \cdot (m+1)}{n} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \right)}.$$

Это неравенство для достаточно больших значений  $n$  можно записать в виде

$$\varepsilon(n, k) \leq \frac{\delta \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}}}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot m} \quad (14)$$

Аналогичными вычислениями получается также оценка

$$\varepsilon(n, k) \geq \frac{\delta}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot n}{\pi} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi \cdot m}{n}} \quad (15)$$

Подставляя в (14) и (15) значения  $m$ ,

$m = \frac{n \cdot k - n}{2 \cdot k}$ , при больших значениях  $n$  окончательно находим

$$\frac{\delta}{2} \cdot \sqrt{n - \frac{n}{k}} \leq \varepsilon(n, k) \leq \frac{\delta}{2} \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} \cdot \sqrt{n - \frac{n}{k}}.$$

Следовательно, теорема доказана.

Проанализируем полученный результат с точки зрения сжатия и восстановления изображений. При помощи матрицы выбора  $S$  вместо исходного вектора  $y = (y_i)_{i=0}^{n-1}$  рассматриваем вектор  $z = (y_i + \gamma_i)_{i=0}^{n-1}$  вида

$$z = (z_0, z_1, \dots, z_{\frac{n}{2}-m-1}, 0, \dots, 0, z_{\frac{n}{2}+m}, \dots, z_{n-1}),$$

где

$$\gamma_i = \begin{cases} 0, & i \text{ дè } i = 0, 1, \dots, \frac{n}{2} - m - 1, \\ -y_i, & i \text{ дè } i = \frac{n}{2} - m, \frac{n}{2} - m + 1, \dots, \frac{n}{2} + m - 1, \\ 0, & i \text{ дè } i = \frac{n}{2} + m, \frac{n}{2} + m + 1, \dots, n - 1 \end{cases}$$

В этих условиях, согласно теореме 1, ошибка восстановления имеет вид (7),

где  $k = \frac{n}{n-2m}$  - коэффициент сжатия.

Регуляризацию суммирования с приближенными коэффициентами можно произвести при помощи регулирующих множителей вида:

$$R(k, \alpha) = \frac{1}{1 + \alpha \cdot k^{1+\varepsilon}},$$

$k = 1, 2, \dots, n-1, 0 < \alpha \leq 1, R(0, \alpha) = 1, \varepsilon > 0$ .

Использование метода регуляризации при сжатии и восстановлении сигналов означает, что вместо исходного вектора  $y$  рассматривается вектор

$$\hat{y} = (\hat{y}_i)_{i=0}^{n-1}, \text{ где}$$

$$\hat{y}_0 = y_0, \quad \hat{y}_j = \frac{y_j}{1 + \alpha \cdot j^{1+\varepsilon}}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \quad (16)$$

При помощи матрицы выбора производится сжатие вектора  $\hat{y}$ , т.е. рассматриваем вектор  $z = (z_i)_{i=0}^{n-1}$ , где

$$z_j = \begin{cases} y_0, & i \text{ дè } j = 0 \\ \frac{y_j}{1 + \alpha \cdot j^{1+\varepsilon}}, & i \text{ дè } j = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} + m - 1, \\ \frac{y_j}{1 + \alpha \cdot j^{1+\varepsilon}}, & i \text{ дè } j = \frac{n}{2} + m, \frac{n}{2} + m + 1, \dots, n - 1. \end{cases} \quad (17)$$

Так как имеет место неравенство (8), то очевидно также следующее соотношение

$$\frac{\delta}{2 \cdot (1 + \alpha \cdot j^{1+\varepsilon}) \cdot \sin \frac{\pi \cdot j}{n}} \leq \max_{x \in X_\delta} |z_j| \leq \frac{\delta \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}}}{2 \cdot (1 + \alpha \cdot j^{1+\varepsilon}) \cdot \sin \frac{\pi \cdot j}{n}} \quad (18)$$

Условия (18) имеют место также для вектора  $\hat{y}$ . Следовательно, используя равенство Парсеваля и, учитывая формулы (16), (17), из (18) находим

$$\left[ \sum_{j=\frac{n}{2}-m}^{\frac{n}{2}+m-1} z_1^2(j) \right]^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon(n, k, \alpha) \leq \left[ \sum_{j=\frac{n}{2}-m}^{\frac{n}{2}+m-1} z_2^2(j) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

где

$$z_1(j) = \frac{\delta}{2 \cdot (1 + \alpha \cdot j^{1+\varepsilon}) \cdot \sin \frac{\pi \cdot j}{n}},$$

$$z_2(j) = \frac{\delta \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}}}{2 \cdot (1 + \alpha \cdot j^{1+\varepsilon}) \cdot \sin \frac{\pi \cdot j}{n}}.$$

Оценим сверху выражение в правой части (19).

$$\left[ \sum_{j=\frac{n}{2}-m}^{\frac{n}{2}+m-1} z_2^2(j) \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\delta \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}}}{2} \left[ \sum_{j=\frac{n}{2}-m}^{\frac{n}{2}+m-1} \frac{1}{(1 + \alpha \cdot j^{1+\varepsilon})^2 \cdot \sin^2 \frac{\pi \cdot j}{n}} \right]^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{\delta \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}}}{2 \cdot (1 + \alpha (\frac{n}{2} - m)^{1+\varepsilon})} \left[ \sum_{j=\frac{n}{2}-m}^{\frac{n}{2}+m-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi \cdot j}{n}} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Используя формулы (12) и (13), окончательно находим

$$\varepsilon(n, k, \alpha) \leq \frac{\delta \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}}}{2 \cdot (1 + \alpha (\frac{n}{2} - m)^{1+\varepsilon})} \cdot \sqrt{2 \cdot n \cdot \left( \operatorname{tg} \frac{\pi(m+1)}{n} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \right)}. \quad (20)$$

Аналогичными вычислениями получаем оценку снизу

$$\varepsilon(n, k, \alpha) \geq$$

$$\frac{\delta}{2 \cdot (1 + \alpha (\frac{n}{2} + m - 1)^{1+\varepsilon})} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot n}{\pi} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi \cdot m}{n}}. \quad (21)$$

Подставляя в (20) и (21) значения  $m = \frac{n \cdot k - n}{2 \cdot k}$  при больших числах  $n$ , находим

$$\frac{\delta}{2 \cdot (1 + \alpha (n - \frac{n}{2 \cdot k})^{1+\varepsilon})} \cdot \sqrt{n - \frac{n}{k}} \leq \varepsilon(n, k, \alpha) \leq$$

$$\frac{\delta \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}}}{2 \cdot (1 + \alpha (\frac{n}{2 \cdot k})^{1+\varepsilon})} \cdot \sqrt{n - \frac{n}{k}}. \quad (22)$$

Сравнивая оценки (7) и (22), можно заключить, что при фиксированном  $n$  ошибка восстановления с использованием ДПФ уменьшается, если применять метод регуляризации.

Теперь вычислим погрешность между вектором  $y$  и регуляризованным и сжатым вектором  $z$ . Учитывая, что

$$y = \left( y_0, y_1, \dots, y_{\frac{n}{2}-m-1}, y_{\frac{n}{2}-m}, \dots, y_{\frac{n}{2}+m-1}, y_{\frac{n}{2}+m}, \dots, y_{n-1} \right)$$

$$z = \left( y_0, \frac{y_1}{1 + \alpha}, \frac{y_2}{1 + \alpha \cdot 2^{1+\varepsilon}}, \dots, \frac{y_{\frac{n}{2}-m-1}}{1 + \alpha \cdot (\frac{n}{2} - m - 1)^{1+\varepsilon}}, 0, \dots, 0, \right.$$

$$\left. \frac{y_{\frac{n}{2}+m}}{1 + \alpha \cdot (\frac{n}{2} + m)^{1+\varepsilon}}, \dots, \frac{y_{n-1}}{1 + \alpha \cdot (n - 1)^{1+\varepsilon}} \right)$$

Вычислим

$$\varepsilon_r(n, k, \alpha) =$$

$$\left[ \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-m-1} \left( y_j - \frac{y_j}{1 + \alpha \cdot j^{1+\varepsilon}} \right)^2 + \sum_{j=\frac{n}{2}+m}^{n-1} \left( y_j - \frac{y_j}{1 + \alpha \cdot j^{1+\varepsilon}} \right)^2 + \sum_{j=\frac{n}{2}-m}^{\frac{n}{2}+m-1} y_j^2 \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[ \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-m-1} \left( \frac{\alpha \cdot j^{1+\varepsilon}}{1 + \alpha \cdot j^{1+\varepsilon}} \right)^2 \cdot y_j^2 + \sum_{j=\frac{n}{2}+m}^{n-1} \left( \frac{\alpha \cdot j^{1+\varepsilon}}{1 + \alpha \cdot j^{1+\varepsilon}} \right)^2 \cdot y_j^2 + \sum_{j=\frac{n}{2}-m}^{\frac{n}{2}+m-1} y_j^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (23)$$

Отсюда, используя (8), находим

$$\varepsilon_r(n, k, \alpha) \leq \frac{\alpha (n - 1)^{1+\varepsilon} \cdot \delta}{2 \cdot (1 + \alpha)} \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} \cdot \sqrt{n - \frac{n}{k}}. \quad (24)$$

Теперь сравним оценки (7) и (24) и определим  $\alpha$ , требуя выполнение соотношения

$$\varepsilon_r(n, k, \alpha) \leq \varepsilon(n, k).$$

Вычислим

$$\frac{\varepsilon_r(n, k, \alpha)}{\varepsilon(n, k)} \leq \frac{\alpha \cdot (n - 1)^{1+\varepsilon}}{1 + \alpha} \leq 1.$$

Отсюда находим

$$\alpha \leq \frac{1}{(n - 1)^{1+\varepsilon} - 1}.$$

Аналогичными рассуждениями доказываются оценки для преобразований Хартли, ДКП, ДСП, ДПУА, ДПУП и ДПУ.

Для наглядности ниже приводится график, на котором прослеживается поведение ошибки сжатия с регуляризацией и без регуляризации сигналов с применением вышерассмотренных ДОП.

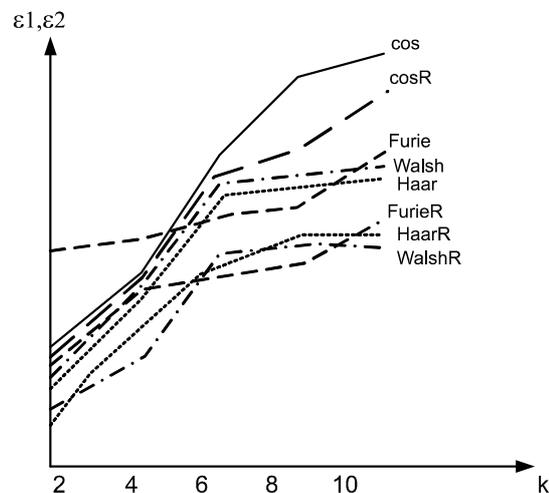


Рис.2. Ошибки сжатия с регуляризацией и без регуляризации.

Здесь  $\varepsilon_1$  - ошибка сжатия без регуляризации;  $\varepsilon_2$  - ошибка сжатия с регуляризацией;  $k$  – коэффициент сжатия.

Таким образом, получены оценки погрешностей восстановления сжатого сигнала кодированного посредством ортогональных преобразований с регуляризацией и без регуляризации.

Проведено сравнение оценок погрешностей и найдены значения регуляризирующего параметра  $\alpha$  для ДПФ, преобразования Хартли, ДКП, ДСП и ДПУА при которых восстановленный сигнал более близок к оригиналу, чем сигнал восстановленный без применения метода регуляризации.

#### Литература

1. Н. Ахмед, К.Р. Рао. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. – М.: Связь, 1980.
2. У. Прэтт. Цифровая обработка изображений. – М.: Мир, 1982.
3. П. Уинтц. Кодирование изображения посредством преобразований. // ТИИЭР, 1972, т.60, стр.69-83.
4. А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. Методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука, 1979.
5. В.К. Иванов. О линейных некорректных задачах. // Докл. АН СССР, 1962, т.145, №2, с.270-272.
6. А.Н. Тихонов. О регуляризации некорректно поставленных задач. // Докл. АН СССР, 1963, т.153, №1, с.49-52.
7. А.Н. Тихонов. Об устойчивых методах суммирования рядов Фурье. // Докл. АН СССР, 1964, т.156, №2, с.268-271.
8. М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. Некорректные задачи математической физики и анализа. – М.: Наука, 1980, 288 с.
9. Б.И. Голубов, А.В. Ефимов, В.А. Скворцов. Ряды и преобразования Уолша. – М.: Наука, 1987.
10. С.С. Агаян, А.А. Петросян. Оптимальные методы зонного кодирования посредством дискретных ортогональных преобразований. – Препринт №89-3, 1989.
11. С.С. Агаян, С.Б.Алавердян. Разработка автоматизированных систем цифровой обработки многомерных сигналов (изображений). В сб. «Системные и математические вопросы создания автоматизированных научных исследований (АСНИ) коллективного пользования» Ереван, 1984, с.61-66.
12. Тесчер А.Г. Кодирование изображений с преобразованием. В кн. Методы передачи изображений. Сокращение избыточности. Под ред. У.К. Прэтта. М., Радио и связь, 1983г. с. 103-143

## ПРЕСС-РЕЛИЗ

### Предприятия радиоэлектронного комплекса России намерены принять участие в подготовке и проведении Олимпиады-2014 в г. Сочи

Радиоэлектронный комплекс России выступил с инициативой по оснащению олимпийских объектов отечественным радиоэлектронным оборудованием. Федеральным агентством по промышленности (Роспром) создан оргкомитет по подготовке необходимых предложений, в который вошли руководители следующих компаний: ОПК «Оборонпром», ОАО «Телеком», РТОС, ОАО «Концерн «Созвездие», ОАО «ЭКОС», ОАО «НИИВК им. М.А. Карцева», ОАО «Концерн «РТИ Системы», ОАО «ЦНИИ «Электроника», ОАО «Компания «Импульс», ФГУП «НТЦ «Промтехазро», ОАО «Концерн ПВО «Алмаз-Антей», ОАО «Концерн «Вега», ЗАО «ЧипЭКСПО».

Для оснащения олимпийских объектов и инфраструктуры может быть использована следующая продукция радиоэлектронной промышленности: аппаратура цифрового телерадиовещания; связанное оборудование; оборудование для управления воздушным движением; системы и средства обеспечения охраны, безопасности и борьбы с терроризмом; навигационная аппаратура; информационные системы; оборудование для коммунального хозяйства; системы для управления дорожным движением, городским транспортом, электронные системы слежения; оборудование для оснащения офисов, гостиниц, корреспондентских пунктов, культурных центров, спортивных комплексов и других объектов инфраструктуры; медицинская аппаратура и др.

Участие предприятий радиоэлектронного комплекса России в подготовке и проведении Олимпиады-2014 в г.Сочи обеспечит оснащение инфраструктуры олимпийских объектов высококачественным отечественным оборудованием и даст динамичный толчок в научно-техническом и производственном развитии радиоэлектронной промышленности.

**Оргкомитет по подготовке предложений РЭК к Олимпиаде 2014 года**  
**Председатель оргкомитета – заместитель руководителя Роспрома Борисов Ю.И.**