УДК 621.396.2

# ДВЕ ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛОСОВЫХ И РЕЖЕКТОРНЫХ РЕКУРСИВНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ КАСКАДНОЙ СТРУКТУРЫ

***Гадзиковский В.И.***

*Рассматривается представление ЦФ полосового и режекторного типов каскадной структуры, элементарные блоки которых имеют либо четвёртый, либо второй порядки. Проводится расчёт дисперсии собственных шумов квантования.*

Проектирование рекурсивных ЦФ обычно осуществляется по аналоговым нормированным ФНЧ-прототипам [2, 3]. Процедура проектирования состоит из трёх этапов (рис. 1).

Первый этап — синтез аналогового нормированного ФНЧ-прототипа. В результате его выполнения получают передаточную функцию $\mathrm{H}(s)$. Нормирование заключается в том, что используется «безразмерная» частота $\Omega = f / f_{\text{п}}$, где $f_{\text{п}}$ — верхняя граничная частота полосы пропускания ( при $f = f_{\text{П}}$ частота среза полосы пропускаения $\Omega_{\text{п}} = 1$). Для синтеза необходимо задать максимально допустимое затухание (или неравномерность АЧХ) в полосе пропускания $a_{\text{п}}$, минимальное достаточное затухание в полосе задерживания $a_{\text{з}}$ и нижнюю граничную частоту полосы задерживания $\Omega_{\text{з}}$. На практике обычно используют ФНЧ прототипы с характеристиками Баттерворта, Чебышева 1, Чебышева 2 и эллиптические (Кауэра). Методики синтеза этих ФНЧ-прототипов описаны в [2, 3]. Передаточная функция $\mathrm{H}(s)$ может быть представлена в различных формах: дробно-рациональной, нуль-полюсной, в виде суммы простых дробей, в каскадной и др.

Второй этап — денормирование частоты в аналоговой области. В результате получают передаточную функцию $\mathrm{H}(p)$ аналогового фильтра, частоты среза которого соответствуют заданным. Операция денормирования соответствует отображению комплексной *S*-плоскости в комплексную *P*-плоскость. При этом используется следующая замена аргумента:

$$\mathrm{H}(p) = \mathrm{H}(s)\big|_{s=\xi(p)}. \tag{1}$$

Выражения для функций $s = \xi(p)$ сведены в табл.1.

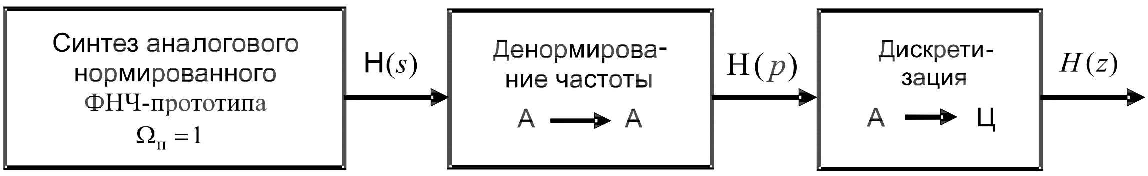


*Рис. 1. Этапы проектирования рекурсивных ЦФ*

Таблица 1

| Тип аналогового фильтра | Формула замены оператора $s = \xi(p)$ |
|---|---|
| ФНЧ | $s = p / \omega_{\text{п}}$ |
| ФВЧ | $s = \omega_{\text{п}} / p$ |
| Полосовой фильтр (ПФ) | $s = \left(p^2 + \omega_0^2\right) / (\Delta\omega\, p)$ |
| Режекторный фильтр (РФ) | $s = (\Delta\omega\, p) / \left(p^2 + \omega_0^2\right)$ |
| Примечание: $\omega_{\text{п}} = 2\pi f_{\text{п}}$ — частота среза; $\omega_0 = 2\pi f_0$ — центральная частота; $\Delta\omega = \omega_{\text{п}2} - \omega_{\text{п}1} = 2\pi\,\Delta f$ - ширина полосы пропускания | |

В результате денормирования частоты по формулам $s=\xi(p)$ табл.1 из передаточной функции дробно-рационального вида $\mathsf{H}(s)$ получается передаточная функция $\mathrm{H}(p)$ также дробно-рационального вида. Порядок $N$ передаточной функции $\mathrm{H}(p)$ равен порядку $n$ передаточной функции $\mathsf{H}(s)$ ФНЧ-прототипа при переходе к ФНЧ или к ФВЧ и удвоенному порядку $2n$ функции $\mathsf{H}(s)$ при переходе к полосовому или к режекторному фильтрам.

Третий этап — дискретизация, в результате выполнения которого получают передаточную функцию ЦФ $H(z)$. Операция дискретизации соответствует отображению комплексной *P*-плоскости в комплексную *Z*-плоскость. При этом мнимая ось *P*-плоскости должна отображаться в единичную окружность *Z*-плоскости, а левая полуплоскость *P* -плоскости — во внутреннюю часть круга единичного радиуса *Z*-плоскости. Выполнение этих требований гарантирует сохранение селективных свойств и устойчивости фильтра при дискретизации. При этом

$$H(z)=\mathrm{H}(p)\big|_{p=\eta(z)}. \tag{2}$$

Наиболее часто при дискретизации используют билинейное преобразование:

$$p=\eta(z)=\frac{2}{T}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}=2f_{\text{д}}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}, \tag{3}$$

где $f_{\text{д}}=1/T$ — частота дискретизации.

Однако при билинейном преобразовании происходит деформация частотной шкалы, описываемая выражением

$$\omega_{\text{а}}=2f_{\text{д}}\,\operatorname{tg}\left(\omega_{\text{ц}}T/2\right), \tag{4}$$

где $\omega_{\text{а}}$ — «аналоговая», а $\omega_{\text{ц}}$ — «цифровая» частота. Эта деформация должна учитываться на этапе синтеза ФНЧ-прототипа при задании частоты $\Omega_{\text{з}}$.

Возможно также объединение этапов денормирования и дискретизации:

$$H(z)=\mathsf{H}(s)\big|_{s=\xi(\eta(z))=\varphi(z)}. \tag{5}$$

При этом получается двухэтапная процедура синтеза. Если используется для дискретизации билинейное преобразование, то процедура (5) называется обобщённым билинейным преобразованием [4]. Формулы $s=\varphi(z)$ обобщённого билинейного преобразования приведены в табл.2.

Таблица 2

| Тип цифрового фильтра | Формула замены оператора $s=\varphi(z)$ |
|---|---|
| ФНЧ | $s=g\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$, где $g=\operatorname{ctg}(\pi W_{\text{п}})$ |
| ФВЧ | $s=g\,\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$, где $g=\operatorname{tg}(\pi W_{\text{п}})$ |
| Полосовой фильтр (ПФ) | $s=g\,\frac{1-2\zeta\,z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-2}}$, где $g=\operatorname{ctg}[\pi(W_{\text{п}2}-W_{\text{п}1})]$; $\zeta=\frac{\cos[\pi(W_{\text{п}2}+W_{\text{п}1})]}{\cos[\pi(W_{\text{п}2}-W_{\text{п}1})]}$ |
| Режекторный фильтр (РФ) | $s=g\,\frac{1-z^{-2}}{1-2\zeta\,z^{-1}+z^{-2}}$, где $g=\operatorname{tg}[\pi(W_{\text{п}2}-W_{\text{п}1})]$; $\zeta=\frac{\cos[\pi(W_{\text{п}2}+W_{\text{п}1})]}{\cos[\pi(W_{\text{п}2}-W_{\text{п}1})]}$ |
| Примечание: $g$ и $\alpha$ — параметры преобразования, определяемые нормированными граничными частотами полос пропускания ЦФ: $W_{\text{п}}=f_{\text{п}}/f_{\text{д}}$ | |

Описанные в [2, 3] методы синтеза передаточных функций аналоговых нормированных ФНЧ-прототипов Баттерворта, Чебышева и эллиптических, позволяют представить $\mathsf{H}(s)$ в обобщённой форме, соответствующей каскадной форме реализации в виде соединения блоков первого и второго порядка:

$$\mathsf{H}(s)=\frac{K_0}{Fs+Q}\prod_{k=1}^{r}\frac{Cs^2+A_{0k}}{s^2+B_{1k}s+B_{0k}}, \tag{6}$$

где коэффициенты $F$, $Q$, $C$, $A_{0k}$ $\left(k=\overline{1,r}\right)$ для различных типов аналоговых нормированных ФНЧ-прототипов определяются согласно табл.3.

Таблица 3

| Коэффициент в (6) | Порядок фильтра $n$ | Тип аналогового нормированного ФНЧ-прототипа | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Баттерворта | Чебышева типа 1 | Чебышева типа 2 | эллиптический |
| $F$ | нечётн. | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | чётн. | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $Q$ | нечётн. | 1 | $\sigma$ | $\sigma$ | $\sigma$ |
| | чётн. | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $C$ | нечётн. | 0 | 0 | 1 | 1 |
| | чётн. | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $A_{0k}$ | нечётн. | 1 | 1 | $A_{0k}$ | $A_{0k}$ |
| | чётн. | 1 | 1 | $A_{0k}$ | $A_{0k}$ |
| Примечание: $k=\overline{1,\ r}$ | | | | | |

Применение подстановок $s=\varphi(z)$ из табл.2 к выражению (6) приводит к передаточным функциям ЦФ:

$$H(z)=\frac{a_0+a_1 z^{-1}}{1+b_1 z^{-1}}\prod_{k=1}^{r}\frac{a_{0k}+a_{1k}z^{-1}+a_{2k}z^{-2}}{1+b_{1k}z^{-1}+b_{2k}z^{-2}} \qquad (7)$$

при синтезе фильтров нижних и верхних частот и

$$H(z)=\frac{a_0++a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}}{1+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}}\times$$
$$\prod_{k=1}^{r}\frac{a_{0k}+a_{1k}z^{-1}+a_{2k}z^{-2}+a_{3k}z^{-3}+a_{4k}z^{-4}}{1+b_{1k}z^{-1}+b_{2k}z^{-2}+b_{3k}z^{-3}+b_{4k}z^{-4}} \qquad (8)$$

при синтезе полосовых и режекторных фильтров.

Каждый блок четвёртого порядка в (8) можно представить каскадным соединением двух блоков второго порядка. Тогда передаточная функция полосовых и режекторных фильтров может быть представлена в виде

$$H(z)=\frac{a_0+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}}{1+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}}\times$$
$$\prod_{k=1}^{r}\frac{a_{0k}+a_{1k}z^{-1}+a_{2k}z^{-2}}{1+b_{1k}z^{-1}+b_{2k}z^{-2}}\times\frac{\overline{a}_{0k}+\overline{a}_{1k}z^{-1}+\overline{a}_{2k}z^{-2}}{1+\overline{b}_{1k}z^{-1}+\overline{b}_{2k}z^{-2}} \qquad (9)$$

Переход от формы представления передаточной функции ЦФ (8) к форме (9) требует определения полюсов и нулей передаточных функций блоков четвёртого порядка с целью разбиения каждого из них на два блока второго порядка. Для того чтобы избежать процедуры нахождения корней полиномов четвёртого порядка, используем следующий приём.

Передаточную функцию $\mathrm{H}(s)$ аналогового нормированного ФНЧ-прототипа (6) представим в нуль-полюсной форме

$$\mathrm{H}(s)=\begin{cases}\dfrac{K_0}{F\,s+Q}\displaystyle\prod_{k=1}^{r}\frac{1}{(s-s_{pk})(s-s_{pk}^{*})}, & \text{для фильтра, не имеющего нулей ;}\\[2ex] \dfrac{K_0}{F\,s+Q}\displaystyle\prod_{k=1}^{r}\frac{(s-s_{0k})(s-s_{0k}^{*})}{(s-s_{pk})(s-s_{pk}^{*})}, & \text{для фильтра, имеющего нули ,}\end{cases} \qquad (10)$$

где комплексно-сопряжённые полюсы $s_{pk}$, $s_{pk}^{*}$ и нули (если они имеются) $s_{0k}$, $s_{0k}^{*}$ $\left(k=\overline{1,r}\right)$ передаточной функции $\mathrm{H}(s)$ определяются либо непосредственно в процессе синтеза ФНЧ-прототипа, либо вычисляются исходя из выражения (6).

После подстановки в выражение (10) формул замены оператора из табл.2 $s=g\left(1-2\zeta\ z^{-1}+z^{-2}\right)/\left(1-z^{-2}\right)$ полосового ЦФ и $s=g\left(1-z^{-2}\right)/\left(1-2\zeta\ z^{-1}+z^{-2}\right)$ режекторного ЦФ и избавления от «многоэтажности» дробей, каждый бином в (10) превращается в квадратный трёхчлен комплексной переменной $z$, корни которых легко вычислить. Численные расчёты, проведённые с использованием системы компьютерной математики Mathcad, показали, что комплексно-сопряжёнными являются полюсы $z_{pk}^{(1)}$ и $z_{pk}^{(3)}$, $z_{pk}^{(2)}$ и $z_{pk}^{(4)}$, а также нули $z_{0k}^{(1)}$ и $z_{0k}^{(3)}$, $z_{0k}^{(1)}$ и $z_{0k}^{(4)}$ $\left(k=\overline{1,\ r}\right)$ передаточной функции фильтра $H(z)$, т.е. $z_{pk}^{(3)}=z_{pk}^{(1)*}$; $z_{pk}^{(4)}=z_{pk}^{(2)*}$; $z_{0k}^{(3)}=z_{0k}^{(1)*}$; $z_{0k}^{(4)}=z_{0k}^{(2)*}$ $\left(k=\overline{1,\ r}\right)$.

Для получения блоков второго порядка, передаточные ф-ции которых имеют вещественные коэффициенты, комплексно-сопряжённые полюсы (и нули, если они имеются) следует сгруппировать попарно. В результате передаточная функция полосового фильтра будет представлена в виде

$$H(z)=\begin{cases}\dfrac{a_0+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-1}}{1+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-1}}\displaystyle\prod_{k=1}^{r}\frac{\overline{\Gamma}_k\left(1-z^{-2}\right)}{\left(1-z_{pk}^{(1)}z^{-1}\right)\left(1-z_{pk}^{(3)}z^{-1}\right)}\,\frac{\overline{\Gamma}_k\left(1-z^{-2}\right)}{\left(1-z_{pk}^{(2)}z^{-1}\right)\left(1-z_{pk}^{(4)}z^{-1}\right)};\\[2ex] \dfrac{a_0+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-1}}{1+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-1}}\displaystyle\prod_{k=1}^{r}\frac{\overline{\mathrm{K}}_k\left(1-z_{0k}^{(1)}z^{-1}\right)\left(1-z_{0k}^{(3)}z^{-1}\right)}{\left(1-z_{pk}^{(1)}z^{-1}\right)\left(1-z_{pk}^{(3)}z^{-1}\right)}\,\frac{\overline{\mathrm{K}}_k\left(1-z_{0k}^{(2)}z^{-1}\right)\left(1-z_{0k}^{(4)}z^{-1}\right)}{\left(1-z_{pk}^{(2)}z^{-1}\right)\left(1-z_{pk}^{(4)}z^{-1}\right)},\end{cases} \qquad (11)$$

а режекторного фильтра в виде

$$H(z)=\begin{cases}\dfrac{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-1}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-1}}\prod\limits_{k=1}^{r}\dfrac{\overline{\Gamma}_k\left(1-2\alpha\ z^{-1}+z^{-2}\right)}{\left(1-z_{pk}^{(1)}z^{-1}\right)\left(1-z_{pk}^{(3)}z^{-1}\right)}\dfrac{\overline{\Gamma}_k\left(1-2\alpha\ z^{-1}+z^{-2}\right)}{\left(1-z_{pk}^{(2)}z^{-1}\right)\left(1-z_{pk}^{(4)}z^{-1}\right)};\\[2ex] \dfrac{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-1}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-1}}\prod\limits_{k=1}^{r}\dfrac{\overline{\mathrm{K}}_k\left(1-z_{0k}^{(1)}z^{-1}\right)\left(1-z_{0k}^{(3)}z^{-1}\right)}{\left(1-z_{pk}^{(1)}z^{-1}\right)\left(1-z_{pk}^{(3)}z^{-1}\right)}\dfrac{\overline{\mathrm{K}}_k\left(1-z_{0k}^{(2)}z^{-1}\right)\left(1-z_{0k}^{(4)}z^{-1}\right)}{\left(1-z_{pk}^{(2)}z^{-1}\right)\left(1-z_{pk}^{(4)}z^{-1}\right)},\end{cases} \qquad (12)$$

где первые выражения в правых частях (11) и (12) соответствует случаю отсутствия, а вторые — случаю наличия нулей передаточной функции ФНЧ-прототипа $\mathrm{H}(s)$.

После перемножения соответствующих биномов в знаменателях (11) и (12) $\left(1-z_{pk}^{(1)}z^{-1}\right)\left(1-z_{pk}^{(3)}z^{-1}\right)$ и $\left(1-z_{pk}^{(2)}z^{-1}\right)\left(1-z_{pk}^{(4)}z^{-1}\right)$, а также биномов в числителях (если они имеются) $\left(1-z_{0k}^{(1)}z^{-1}\right)\left(1-z_{0k}^{(3)}z^{-1}\right)$ и $\left(1-z_{0k}^{(2)}z^{-1}\right)\left(1-z_{0k}^{(4)}z^{-1}\right)$, получим передаточные функции полосового и режекторного фильтров в форме (9), соответствующей каскадному соединению блоков второго порядка с вещественными коэффициентами. Формулы для вычисления коэффициентов $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2$, а также $a_{0k}, a_{1k}, a_{2k}, b_{1k}, b_{2k}, \overline{a}_{0k}, \overline{a}_{1k}, \overline{a}_{2k}, \overline{b}_{1k}, \overline{b}_{2k}$ $\left(k=\overline{1,r}\right)$ выражаются через параметры передаточной функции (10) ФНЧ-прототипа и параметры обобщённого билинейного преобразования $g$, $\zeta$. Эти коэффициенты сведены в табл.4 для полосового (ПФ) и табл.5 для режекторного (РФ) фильтров, где использованы следующие обозначения:

$$\overline{\Gamma}_k=1\Big/\sqrt{(g-\sigma_k)^2+\Omega_k^2},\quad k=\overline{1,\ r}; \qquad (13)$$

$$\overline{\mathrm{K}}_k=\sqrt{\frac{g^2+\lambda_k^2}{(g-\sigma_k)^2+\Omega_k^2}},\quad k=\overline{1,\ r}. \qquad (14)$$

$$\begin{cases}\alpha_k=\dfrac{g\zeta}{g-\sigma_k-j\Omega_k};\quad \beta_k=\dfrac{g\zeta}{g-\sigma_k+j\Omega_k};\\ \gamma_k=\sqrt{\left(\dfrac{g\zeta}{g-\sigma_k-j\Omega_k}\right)^2-\dfrac{g+\sigma_k+j\Omega_k}{g-\sigma_k-j\Omega_k}};\quad k=\overline{1,\ r}.\\ \eta_k=\sqrt{\left(\dfrac{g\zeta}{g-\sigma_k+j\Omega_k}\right)^2-\dfrac{g+\sigma_k-j\Omega_k}{g-\sigma_k+j\Omega_k}},\end{cases} \qquad (15)$$

$$\begin{cases}\mu_k=\dfrac{g\zeta}{g-j\lambda_k};\quad \nu_k=\dfrac{g\zeta}{g+j\lambda_k};\\ \chi_k=\sqrt{\left(\dfrac{g\zeta}{g-j\lambda_k}\right)^2-\dfrac{g+j\lambda_k}{g-j\lambda_k}};\quad k=\overline{1,\ r};\\ \vartheta_k=\sqrt{\left(\dfrac{g\zeta}{g+j\lambda_k}\right)^2-\dfrac{g-j\lambda_k}{g+j\lambda_k}},\end{cases} \qquad (16)$$

$$\begin{cases}\widehat{\alpha}_k=\dfrac{-\zeta\,(\sigma_k+j\Omega_k)}{g-\sigma_k-j\Omega_k},\quad \widehat{\beta}_k=\dfrac{-\zeta\,(\sigma_k-j\Omega_k)}{g-\sigma_k+j\Omega_k};\\ \widehat{\gamma}_k=\sqrt{\left[\dfrac{\zeta\,(\sigma_k+j\Omega_k)}{g-\sigma_k-j\Omega_k}\right]^2+\dfrac{g+\sigma_k+j\Omega_k}{g-\sigma_k-j\Omega_k}};\quad k=\overline{1,\ r};\\ \widehat{\eta}_k=\sqrt{\left[\dfrac{\zeta\,(\sigma_k-j\Omega_k)}{g-\sigma_k+j\Omega_k}\right]^2+\dfrac{g+\sigma_k-j\Omega_k}{g-\sigma_k+j\Omega_k}},\end{cases} \qquad (17)$$

$$\begin{cases}\widehat{\mu}_k=\dfrac{-j\lambda_k\zeta}{g-j\lambda_k},\quad \widehat{\nu}_k=\dfrac{j\lambda_k\zeta}{g+j\lambda_k};\\ \widehat{\chi}_k=\sqrt{\left(\dfrac{-j\lambda_k\zeta}{g-j\lambda_k}\right)^2+\dfrac{g+j\lambda_k}{g-j\lambda_k}};\quad k=\overline{1,\ r}\\ \widehat{\vartheta}_k=\sqrt{\left(\dfrac{j\lambda_k\zeta}{g+j\lambda_k}\right)^2+\dfrac{g-j\lambda_k}{g+j\lambda_k}},\end{cases}. \qquad (18)$$

Таблица 4

| Коэффициенты в (9) | ФНЧ-прототип без нулей передаточной функции (6): $C=0$ | | ФНЧ-прототип с нулями передаточной функции (6): $C=1$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $n$ нечётн. | $n$ чётн. | $n$ нечётн. | $n$ чётн. |
| $a_0$ | $K_0/(Fg+Q)$ | $K_0$ | $K_0/(Fg+Q)$ | $K_0$ |
| $a_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $a_2$ | $-K_0/(Fg+Q)$ | 0 | $-K_0/(Fg+Q)$ | 0 |
| $b_1$ | $-2Fg\zeta/(Fg+Q)$ | 0 | $-2Fg\zeta/(Fg+Q)$ | 0 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $b_2$ | $(Fg-Q)/(Fg+Q)$ | 0 | $(Fg-Q)/(Fg+Q)$ | 0 |
| $a_{0k}$ | $\overline{\Gamma}_k$ | | $\overline{K}_k$ | |
| $a_{1k}$ | 0 | | $-\overline{K}_k[(\mu_k+\chi_k)+(\nu_k+\vartheta_k)]$ | |
| $a_{2k}$ | $-\overline{\Gamma}_k$ | | $\overline{K}_k(\mu_k+\chi_k)(\nu_k+\vartheta_k)$ | |
| $b_{1k}$ | $-(\alpha_k+\gamma_k)-(\beta_k+\eta_k)$ | | $-(\alpha_k+\gamma_k)-(\beta_k+\eta_k)$ | |
| $b_{2k}$ | $(\alpha_k+\gamma_k)(\beta_k+\eta_k)$ | | $(\alpha_k+\gamma_k)(\beta_k+\eta_k)$ | |
| $\overline{a}_{0k}$ | $\overline{\Gamma}_k$ | | $\overline{K}_k$ | |
| $\overline{a}_{1k}$ | 0 | | $-\overline{K}_k[(\mu_k-\chi_k)+(\nu_k-\vartheta_k)]$ | |
| $\overline{a}_{2k}$ | $-\overline{\Gamma}_k$ | | $\overline{K}_k(\mu_k-\chi_k)(\nu_k-\vartheta_k)$ | |
| $\overline{b}_{1k}$ | $-(\alpha_k-\gamma_k)-(\beta_k-\eta_k)$ | | $-(\alpha_k-\gamma_k)-(\beta_k-\eta_k)$ | |
| $\overline{b}_{2k}$ | $(\alpha_k-\gamma_k)(\beta_k-\eta_k)$ | | $(\alpha_k-\gamma_k)(\beta_k-\eta_k)$ | |
| Примечание: $n$ — порядок ФНЧ-прототипа; $k=\overline{1,\ r}$ | | | | |

Таблица 5

| Коэффициенты в (9) | ФНЧ-прототип без нулей передаточной функции (6): $C=0$ | | ФНЧ-прототип с нулями передаточной функции (6): $C=1$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $n$ нечётн. | $n$ чётн. | $n$ нечётн. | $n$ чётн. |
| $a_0$ | $K_0/(Fg+Q)$ | $K_0$ | $K_0/(Fg+Q)$ | $K_0$ |
| $a_1$ | $-2K_0\zeta/(Fg+Q)$ | 0 | $-2K_0\zeta/(Fg+Q)$ | 0 |
| $a_2$ | $K_0/(Fg+Q)$ | 0 | $K_0/(Fg+Q)$ | 0 |
| $b_1$ | $-2Q\zeta/(Fg+Q)$ | 0 | $-2Q\zeta/(Fg+Q)$ | 0 |
| $b_2$ | $(Q-Fg)/(Fg+Q)$ | 0 | $(Q-Fg)/(Fg+Q)$ | 0 |
| $a_{0k}$ | $\overline{\Gamma}_k$ | | $\overline{K}_k$ | |
| $a_{1k}$ | $-2\zeta\overline{\Gamma}_k$ | | $-\overline{K}_k[(\widehat{\mu}_k+\widehat{\chi}_k)+(\widehat{\nu}_k+\widehat{\vartheta}_k)]$ | |
| $a_{2k}$ | $\overline{\Gamma}_k$ | | $\overline{K}_k(\widehat{\mu}_k+\widehat{\chi}_k)(\widehat{\nu}_k+\widehat{\vartheta}_k)$ | |
| $b_{1k}$ | $-(\widehat{\alpha}_k+\widehat{\gamma}_k)-(\widehat{\beta}_k+\widehat{\eta}_k)$ | | $-(\widehat{\alpha}_k+\widehat{\gamma}_k)-(\widehat{\beta}_k+\widehat{\eta}_k)$ | |
| $b_{2k}$ | $(\widehat{\alpha}_k+\widehat{\gamma}_k)(\widehat{\beta}_k+\widehat{\eta}_k)$ | | $(\widehat{\alpha}_k+\widehat{\gamma}_k)(\widehat{\beta}_k+\widehat{\eta}_k)$ | |
| $\overline{a}_{0k}$ | $\overline{\Gamma}_k$ | | $\overline{K}_k$ | |
| $\overline{a}_{1k}$ | $-2\zeta\overline{\Gamma}_k$ | | $-\overline{K}_k[(\widehat{\mu}_k-\widehat{\chi}_k)+(\widehat{\nu}_k-\widehat{\vartheta}_k)]$ | |
| $\overline{a}_{2k}$ | $\overline{\Gamma}_k$ | | $\overline{K}_k(\widehat{\mu}_k-\widehat{\chi}_k)(\widehat{\nu}_k-\widehat{\vartheta}_k)$ | |
| $\overline{b}_{1k}$ | $-(\widehat{\alpha}_k-\widehat{\gamma}_k)-(\widehat{\beta}_k-\widehat{\eta}_k)$ | | $-(\widehat{\alpha}_k-\widehat{\gamma}_k)-(\widehat{\beta}_k-\widehat{\eta}_k)$ | |
| $\overline{b}_{2k}$ | $(\widehat{\alpha}_k-\widehat{\gamma}_k)(\widehat{\beta}_k-\widehat{\eta}_k)$ | | $(\widehat{\alpha}_k-\widehat{\gamma}_k)(\widehat{\beta}_k-\widehat{\eta}_k)$ | |
| Примечание: $n$ — порядок ФНЧ-прототипа; $k=\overline{1,\ r}$ | | | | |

**Пример.** Используя обобщённое билинейное преобразование, спроектировать полосовой рекурсивный ЦФ с характеристикой Чебышева типа 2 при следующих исходных данных:

— граничные частоты полосы пропускания: $f_{п1} = 20$ кГц, $f_{п2} = 22$ кГц;

— максимальное затухание в полосе пропускания $a_{п_{дБ}} = 1,5$ дБ;

— граничные частоты полос задерживания: $f_{з1} = 19,3$ кГц, $f_{з2} = 22,7$ кГц;

— минимальное затухание в полосах задерживания $a_{з_{дБ}} = 40$ дБ;

— частота дискретизации $f_д = 70$ кГц;

— максимальный по модулю уровень входного сигнала $X = \max_n |x[n]| = 1$;

— динамический диапазон входного сигнала $Д = 40$ дБ;

— отношение сигнал/шум на выходе ЦФ при входном сигнале, соответствующем нижней границе динамического диапазона, $Ш = 40$ дБ;

— для представления чисел в DSP используется дополнительный код ($\chi_2 = 12$).

Передаточную функцию ЦФ представить в формах (8) и (9).

Используя формулу $W = f / f_д$, вычисляем нормированные граничные «цифровые» частоты полосы пропускания ($W_{п1} = 0,286$; $W_{п2} = 0,314$) и полос задерживания ($W_{з1} = 0,276$; $W_{з2} = 0,324$), а по формулам табл.2 находим параметры преобразования ($g = 11,111$ и $\zeta = -0,31$), входящие в формулу замены аргумента передаточной функции $\mathrm{H}(s)$, и нормированную граничную частоту полосы задерживания аналогового нормированного ФНЧ-прототипа $\Omega_з = 1,682$.

По методике, описанной в [2, 3], при $\Omega_з = 1,682$, $a_п = 1,5$ дБ и $a_з = 40$ дБ проведём синтез нормированного аналогового ФНЧ-прототипа Чебышева 2. В результате получим передаточную функцию $\mathrm{H}(s)$ 6-го порядка в форме (6), коэффициенты которой равны соответственно (см. табл.3):

$n = 6$; $r = 3$; $K_0 = 0,01$; $F = 0$; $Q = 1$;

$C = 1$; $A_{01} = 3,032$; $B_{11} = 0,45$; $B_{01} = 1,46$;

$A_{02} = 5,657$;

$B_{12} = 1,584$; $B_{02} = 1,88$; $A_{03} = 42,228$;

$B_{13} = 3,039$; $B_{03} = 2,639$.

Используя формулы табл.2 для полосового фильтра, вычислим коэффициенты передаточной функции $H(z)$ проектируемого ЦФ 12-го порядка в форме (8):

$a_0 = 0,01$; $a_1 = 0$; $a_2 = 0$; $b_1 = 0$; $b_2 = 0$;

$a_{01} = 0,974$; $a_{11} = 1,179$; $a_{21} = 2,22$;

$a_{31} = 1,179$; $a_{41} = 0,974$;

$b_{11} = 1,203$; $b_{21} = 2,244$; $b_{31} = 1,155$; $b_{41} = 0,923$;

$a_{02} = 0,903$; $a_{12} = 1,072$; $a_{22} = 1,981$;

$a_{32} = 1,072$; $a_{42} = 0,903$;

$b_{12} = 1,148$; $b_{22} = 2,034$; $b_{32} = 0,995$; $b_{42} = 0,754$;

$a_{03} = 1,036$; $a_{13} = 0,958$; $a_{23} = 1,314$;

$a_{33} = 0,958$; $a_{43} = 1,036$;

$b_{13} = 1,09$; $b_{23} = 1,809$; $b_{33} = 0,827$; $b_{43} = 0,578$.

По формулам табл.4 с использованием выражений (13) — (16) вычислим коэффициенты передаточной функции $H(z)$ проектируемого полосового ЦФ 12-го порядка в форме (9):

$a_0 = 0,01$; $a_1 = 0$; $a_2 = 0$; $b_1 = 0$; $b_2 = 0$;

$a_{01} = 0,987$; $a_{11} = 0,307$; $a_{21} = 0,987$;

$b_{11} = 0,403$; $b_{21} = 0,959$;

$\overline{a}_{01} = 0,987$; $\overline{a}_{11} = 0,888$; $\overline{a}_{21} = 0,987$;

$\overline{b}_{11} = 0,8$; $\overline{b}_{21} = 0,962$;

$a_{02} = 0,95$; $a_{12} = 0,185$; $a_{22} = 0,95$;

$b_{12} = 0,394$; $b_{22} = 0,864$;

$\overline{a}_{02} = 0,95$; $\overline{a}_{12} = 0,943$; $\overline{a}_{22} = 0,95$;

$\overline{b}_{12} = 0,754$; $\overline{b}_{22} = 0,872$;

$a_{03} = 1,018$; $a_{13} = -0,52$; $a_{23} = 1,018$;

$b_{13} = 0,456$; $b_{23} = 0,756$;

$\overline{a}_{03} = 1,018$; $\overline{a}_{13} = 1,461$; $\overline{a}_{23} = 1,018$;

$\overline{b}_{12} = 0,633$; $\overline{b}_{22} = 0,764$.

АЧХ спроектированных полосовых ЦФ Чебышева второго типа 12-го порядка ($N = 12$) с передаточными функциями (8) и (9) полностью совпадают. Они изображены на рис. 2 в линейном и логарифмическом масштабах. На граничных частотах полосы пропускания $f_{п1} = 20$ кГц и $f_{п2} = 22$ кГц затухание $a_п = 0,276$ дБ (что меньше допустимого $a_п = 1,5$ дБ). На граничных частотах полос задерживания затухания получились различные: на $f_{з1} = 19,3$ кГц $a_з = 40$ дБ, а на $f_{з2} = 22,7$ кГц $a_з = 68,648$ дБ. Минимальное затухание в полосе задерживания $a_{з_{\min}} = 40$ дБ. Таким образом, все параметры АЧХ спроектированных полосовых ЦФ соответствуют заданным техническим требованиям.

По методике [1] при заданных динамическом диапазоне входного сигнала $Д = 40$ дБ, отношении сигнал/шум $Ш = 40$ дБ рассчитывались дисперсии (мощности) собственных шумов квантования на выходах спроектированных ЦФ при разрядности вычислителя в формате с фиксированной точкой $S = 22$. Результаты расчётов следующие:

- для ЦФ с передаточной функцией (8)

$D_{вых_{собст}} = 8,410 \cdot 10^{-8}$; $\sigma_{вых_{собст}} = 2,902 \cdot 10^{-4}$;

- для ЦФ с передаточной функцией (9)

$D_{вых_{собст}} = 7,59 \cdot 10^{-9}$; $\sigma_{вых_{собст}} = 8,712 \cdot 10^{-5}$.

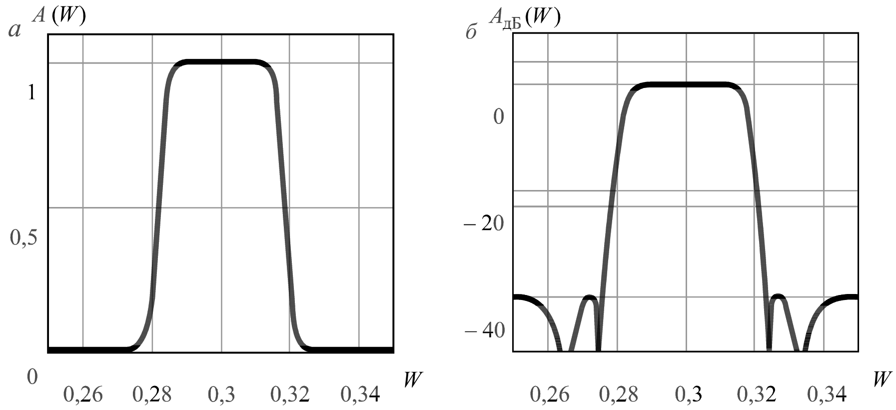


*Рис. 2. АЧХ цифрового полосового фильтра Чебышева второго типа 12-го порядка, спроектированного в примере: а — линейный масштаб; б — логарифмический масштаб*

Приведённый пример показывает, что реализация полосовых и режекторных ЦФ каскадной структуры на основе блоков второго порядка [см. (9)] обеспечивает гораздо меньший уровень собственных шумов квантования на выходе, чем реализация на основе блоков четвёртого порядка [см. (8)]. Аналогично, чувствительность АЧХ ЦФ к точности задания коэффициентов ЦФ для передаточной функции (9) ниже, чем для передаточной функции (8). Здесь проявляется общая закономерность, впервые установленная Кайзером [2]: чувствительность к точности задания коэффициентов передаточной функции минимальная у ЦФ каскадной структуры с наименьшим порядком блоков (у вещественных ЦФ наименьший порядок равен 2).

**Литература**

1. Гадзиковский В.И. Теоретические основы цифровой обработки сигналов. — М.: Радио и связь, 2004. — 344 с.
2. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. — М.: Мир, 1978. — 848 с.
3. Гадзиковский В.И. Основы теории и проектирования цифровых фильтров: Учебное пособие для радиотехн. спец. вузов. — М.: Высш. шк., 1996. — 256 с.
4. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов: Справочник. — М.: Радио и связь, 1985. — 312 с.