УДК 519.254, 621.391

ДЕКОМПОЗИЦИЯ НА ЭМПИРИЧЕСКИЕ МОДЫ: ТЕМАТИЧЕСКИЙ ОБЗОР (ЧАСТЬ 2)

Егоров В.В., *д.т.н., профессор, заведующий кафедрой радиостроения и средств связи Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения, e-mail: egorovrimr@mail.ru*
Клионский Д.М., *к.т.н., доцент, доцент кафедры «Информационные системы» Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ», e-mail: klio2003@list.ru*

EMPIRICAL MODE DECOMPOSITION: THEMATIC REVIEW (PART 2)

Egorov V.V., Klionskiy D.M.

In the first part of the thematic review devoted to empirical mode decomposition (EMD) the main modifications of EMD were considered along with their advantages and applications. The present thematic review represents advantages of adaptive signal processing of non-stationary signals using the most well-known classical empirical mode decomposition (EMD). We also show the general application scheme of EMD at different stages. The paper discusses the important tasks of signal preprocessing including signal denoising and estimation of chaotic properties of signals. EMD interpretation as a dyadic filter bank is provided. We consider the application of the Hilbert-Huang transform and the use of intrinsic mode functions (IMFs) in the form of monocomponent functions in the time-frequency domain.

Key words: empirical mode decomposition, adaptive signal processing, dyadic filter bank, signal preprocessing, denoising, chaotic properties of signals, Hilbert-Huang transform.

Ключевые слова: декомпозиция на эмпирические моды, адаптивная обработка сигналов, диадический банк фильтров, предварительная обработка сигналов, очистка от шума, степень хаотичности сигналов, преобразование Гильберта-Хуанга.

В первой части тематического обзора, посвященного методу декомпозиции на эмпирические моды (ДЭМ), рассмотрены основные известные модификации ДЭМ, их преимущества и особенности применения. В данном тематическом обзоре представлены преимущества адаптивной обработки нестационарных сигналов с использованием наиболее известного классического метода ДЭМ, а также схема применения технологии ДЭМ на различных этапах. Описаны актуальные задачи предварительной обработки сигналов на основе ДЭМ, включая очистку сигналов от шума и оценивание степени хаотичности сигналов. Приведена интерпретация ДЭМ как диадического (двоичного) банка фильтров. Рассматривается применение преобразования Гильберта-Хуанга и использование эмпирических мод (ЭМ) в виде монокомпонентных функций для исследования сигналов в частотно-временной области.

Введение

Метод декомпозиции на эмпирические моды (*ДЭМ*, англ. *EMD – Empirical Mode Decomposition*) и технология Гильберта-Хуанга [1-16] вышли в свет в 1998 году и были впервые применены при анализе поверхностных волн тайфунов. Термин «декомпозиция» означает «разложение», а *эмпирические моды* (*ЭМ*, англ. *IMF – Intrinsic Mode Function*) – семейство базисных функций, на которые осуществляется разложение исходного сигнала в соответствии с определенной детерминированной процедурой [1-5, 11, 14-16]. Разложение по методу ДЭМ ориентировано в основном на обработку нестационарных многокомпонентных сигналов сложной структуры, которые можно аналитически представить в следующем виде:

$$s(k) = \sum_i g_i f_i(k),$$

где $s(k)$ – исследуемый сигнал; k – дискретное нормированное время (номер отсчета сигнала); g_i – весовые коэффициенты для каждой компоненты $f_i(k)$.

Нестационарные сигналы часто требуют специализированных подходов к обработке, обладающих *адаптивными свойствами*. ДЭМ относится именно к таким адаптивным подходам. Пример нестационарного сигнала сложной структуры представлен на рисунке 1.

Адаптивность позволяет добиться следующего:

1) визуализировать и проанализировать с высокой точностью изолированные *локальные особенности* в сигналах (включая разрывы функции и ее производной, резкие пики и др.) и учитывать эти особенности при формировании разложения и построении амплитудно-частотно-временного распределения. Структура локальных особенностей может быть представлена на различных временных масштабах и с различной точностью;

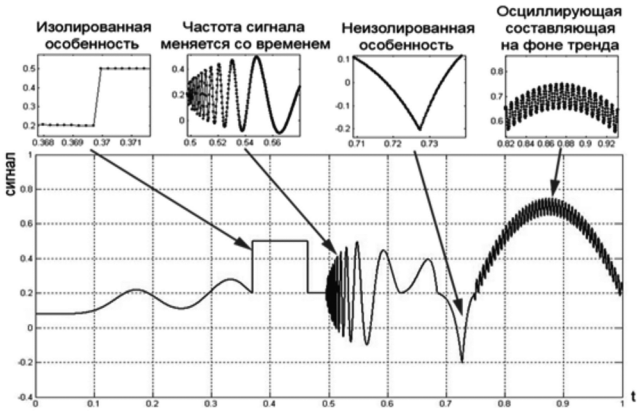


Рисунок 1. Пример нестационарного сигнала с различными особенностями

2) извлекать стационарные и нестационарные шумы (в частности, шумы с изменяющимися средним значением и дисперсией) и выполнять очистку сигналов от шума;

3) выделять участки в сигнале с изменяющейся *мгновенной частотой* (англ. – *Instantaneous Frequency*);

4) обрабатывать сигналы с выбросами на фоне осциллирующей составляющей и тренда;

5) извлекать при разложении базисные функции, имеющие высокую степень корреляции с самим исходным сигналом, и тем самым в разложении учитывается структура и характерные особенности самого сигнала;

6) формировать базис непосредственно из самих исходных данных, как это делается при использовании ДЭМ, что повышает точность обработки и анализа нестационарных сигналов;

7) получать частотно-временное представление (при использовании метода ДЭМ – частотно-временного представления Гильберта-Хуанга [1-3, 5, 7, 14-16], англ. *HHT – Hilbert-Huang Transform*) с высоким разрешением на частотно-временной плоскости и рассчитывать маргинальный спектр (англ. *Marginal Spectrum*) [2, 3] – аналог спектрального представления Фурье для нестационарных сигналов и мгновенную плотность энергии во временной области (англ. – *Instantaneous Energy Density*) [2, 3];

8) осуществлять сегментацию сигнала (англ. – *Signal Segmentation*) [17-19] с использованием адаптивных подходов (выделять в сигнале однородные участки с одинаковыми свойствами).

Цель обзора – провести анализ методов предварительной обработки сигналов на основе ДЭМ (очистка от шума, оценивание степени хаотичности) и возможностей частотно-временного представления Гильберта-Хуанга при исследовании многокомпонентных нестационарных сигналов. Целью обзора также является обозначение преимуществ адаптивной обработки сигналов на основе ДЭМ и представление общей схемы применения ДЭМ для решения различных задач обработки сигналов.

Алгоритм ДЭМ. Технология обработки сигналов на основе ДЭМ

ДЭМ математически представляет собой двойной итерационный процесс, причем внешние итерации отвечают за извлечение конкретной ЭМ, а внутренние итерации – за проведение процесса отсеивания (англ. *Sifting Process*) [2, 3, 5, 14, 15] в рамках извлечения этой ЭМ. В ходе выполнения алгоритма ДЭМ используются численные методы и алгоритмы из теории многочленов, линейной алгебры, математического анализа и других областей [20-23].

Как было отмечено ранее, ДЭМ обладает адаптивными свойствами. Аналитически задача выбора адаптивного базиса может быть сформулирована следующим образом. Вначале записывается выражение, представляющее собой аппроксимацию $\tilde{s}_{(l)}(t)$ анализируемого сигнала $s(t)$ по базису $\{\varphi_k^{(l)}(t)\}$:

$$\tilde{s}_{(l)}(t) = \sum_{k=n_1^{(l)}}^{n_2^{(l)}} c_k^{(l)} \varphi_k^{(l)}(t),$$

где $c_k^{(l)}$ – коэффициенты разложения исходного сигнала по базису, l – индекс, определяющий вид базиса, $n_1^{(l)}, n_2^{(l)}$ – верхний и нижний пределы суммирования, соответственно, зависящие от вида базиса.

Индекс номера базиса определяется так, чтобы выполнялось следующее условие:

$$l_{opt} = \arg\min_p \left| n_2^{(p)} - n_1^{(p)} \right|.$$

При этом, в результате нахождения l_{opt} минимизируется невязка (с учетом используемой метрики A):

$$\left\| s(t) - \tilde{s}_{(l)}(t) \right\|_A < \varepsilon_l,$$

где ε_l – величина невязки.

Таким образом, выбирается тот базис, в котором наименьшее число членов в разложении.

Другой подход к определению адаптивности основывается на том, что фиксируется число членов разложения и выбирается тот базис, который минимизирует невязку в заданной метрике:

$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=n_1}^{n_2} c_k^{(l)} \varphi_k^{(l)}(t),$$

при этом $\left| n_2 - n_1 \right| = \text{const}$. Таким образом, номер базиса l_{opt} определяется следующим образом:

$$l_{opt} = \arg\min_p \left\| \tilde{s}_{(l)}(t) - s(t) \right\|_A ..$$

Схема алгоритма извлечения ЭМ представлена на рисунке 2.



Рисунок 2. Схема алгоритма ДЭМ

Использованы следующие обозначения:

$\{M_i\}, \{m_i\}, i = 1, 2, 3, ...$ – множества локальных максимумов и минимумов функции.

$M_j(k) = f_M(M_i, k)$ – верхняя огибающая функции на j -й итерации процесса отсеивания, полученная путем интерполяции локальных максимумов кубическим сплайном.

$m_j(k) = f_M(m_i, k)$ – нижняя огибающая функции на j -й итерации процесса отсеивания, полученная путем интерполяции локальных минимумов кубическим сплайном.

$e_j(k)$ – локальное среднее функции (полусумма верхней и нижней огибающих) на j-й итерации процесса отсеивания.

p – переменная-счетчик, отвечающая за номер извлекаемой ЭМ.

j – переменная-счетчик, отвечающая за номер итерации процесса отсеивания.

$h_j(k)$ – аппроксимация ЭМ на текущей j-й итерации процесса отсеивания.

$r_p(k)$ – текущий остаток для извлечения очередной p-й ЭМ.

$c_p(k)$ – p-я ЭМ.

Альтернативой методу ДЭМ является дискретное вейвлет-преобразование (англ. *DWT – Discrete-time Wavelet Transform*) на основе схемы диадического (двоичного) банка фильтров (англ. *Dyadic Filter Bank*) [24-27]. Вейвлет-преобразование имеет хорошо разработанный математический аппарат, быстрые вычислительные алгоритмы (пирамидальный алгоритм Малла, алгоритм «с дырами», вейвлет-алгоритмы на основе дискретного преобразования Фурье (ДПФ), реализуемые на практике с помощью алгоритмов БПФ, и др.). Благодаря особенностям конструирования вейвлет-базиса на основе масштабных растяжений и сдвигов вдоль временной оси материнской вейвлет-функции появляется возможность обрабатывать сигналы путем довольно точного учета локальных временных особенностей. Вместе с тем, главная проблема, порой затрудняющая эффективное практическое применение вейвлет-преобразования, – большое многообразие и неочевидность выбора вейвлета (тип вейвлета, длина вейвлет-фильтра) для решения конкретной задачи, если нет формализованных или эвристических критериев выбора вейвлет-базиса. В связи с этим метод ДЭМ открывает новые возможности адаптивного анализа и обработки сигналов со сложной внутренней структурой.

Общая схема обработки сигнала в соответствии с методом ДЭМ и более общей технологией Гильберта-Хуанга представлена на рисунке 3. Она включает в себя предварительную обработку сигналов на основе ДЭМ, анализ структуры многокомпонентных сигналов путем исследования полученного разложения и частотно-временной анализ на основе технологии Гильберта-Хуанга.

Ниже приведены комментарии по данной схеме:

1) на первом этапе необходимо проверить, содержит ли исходный сигнал $s(k)$ хотя бы один максимум и один минимум. Это необходимо для запуска алгоритма ДЭМ, т.е. построения верхней огибающей $M_j(k)$ путем кубической сплайн-интерполяции локальных максимумов $\{M_i\}$ и нижней огибающей $m_j(k)$ путем кубической сплайн-интерполяции локальных минимумов $\{m_i\}$. В дальнейшем для извлечения каждой ЭМ применяется процесс отсеивания, а общее количество ЭМ в разложении определяется в соответствии с представлением ДЭМ как диадического (двоичного) банка фильтров: $I = \log_2 N$ или $I = \log_2 N \pm 1$,

где I – общее число компонент (ЭМ) в разложении, N – длина сигнала (общее число отсчетов).

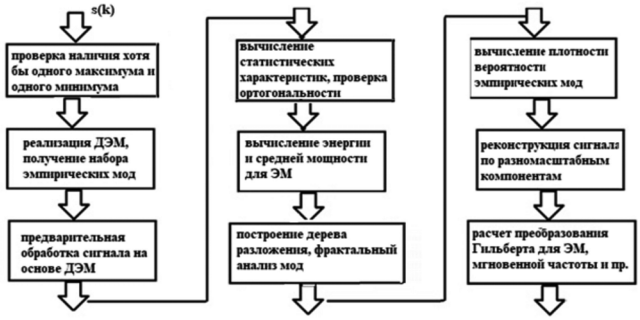


Рисунок 3. Схема обработки сигнала на основе ДЭМ

2) реализуется алгоритм ДЭМ или одна из его модификаций (классический алгоритм ДЭМ, ДЭМ с параболической интерполяцией огибающих, локальный или online алгоритм ДЭМ, ДЭМ с вейвлет-пакетным разложением, ансамблевая ДЭМ, многомерная модификация ДЭМ и др.).

3) проводится предварительная обработка сигнала на основе ДЭМ. Предварительная обработка включает в себя следующие основные задачи:

– очистку сигнала от шума;

– выделение тренда в сигнале;

– оценивание степени хаотичности сигнала на основе определения показателя Херста.

4) оценивание статистических характеристик базисных функций разложения (ЭМ) и статистических характеристик исследуемого сигнала. К числу основных статистических характеристик относятся среднее значение, дисперсия, коэффициент асимметрии, эксцесс.

5) оценивается энергия и средняя мощность извлеченных ЭМ для определения их вклада в исходный сигнал.

6) дерево декомпозиции (дерево разложения, англ. – *Decomposition Tree*) строится для наглядного представления разложения исходного сигнала, в том числе, на каждом этапе – на высокочастотную и низкочастотную составляющие. Дерево разложения может быть получено для каждого сигнала, для которого реализуется алгоритм ДЭМ. Пример дерева декомпозиции приведен на рисунке 4.

Корнем дерева будет сам исходный сигнал $s(k)$, а ветвиться дерево разложения будет в основном «влево», то есть в сторону низких частот, поскольку p-я ЭМ $c_p(k)$ как высокочастотная компонента не подвергается дальнейшему разложению. В данном случае высокочастотная составляющая остается неизменной, в то время как при использовании математического аппарата вейвлетов и вейвлет-пакетов есть возможность декомпозиции и низкочастотной, и высокочастотной составляющей, обеспечивая тем самым более тонкое разбиение частотно-временной плоскости.

7) проверка свойства ортогональности разложения. На текущий момент времени свойство ортогональности ЭМ не является теоретически доказанным [3]. Ортого-

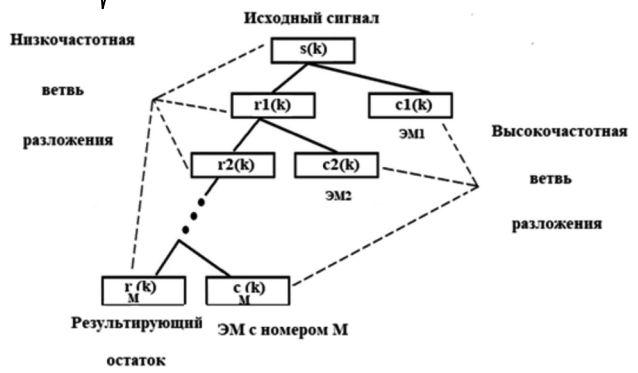


Рисунок 4. Дерево декомпозиции сигнала

нальность компонент при ДЭМ может быть проверена численно следующим образом: сначала записывается выражение, определяющее свойство полноты разложения:

$$s(k)=\sum_{i=1}^{M-1}c_i(k)+r_M(k), \quad (1)$$

где $\{c_i(k)\}_{i=1}^{M-1}$ – семейство извлеченных ЭМ, $r_M(k)$ – результирующий остаток в разложении, M – общее число компонент в разложении.

Для проверки ортогональности ЭМ вводится специальный показатель (индекс ортогональности, англ. – *Orthogonality Index*) [2, 3]. Для этого необходимо записать выражение для квадрата сигнала, непосредственно получающееся из выражения (1):

$$s^2(k)=\left(\sum_{i=1}^{M-1}c_i(k)\right)^2+r_M{}^2(k)+2r_M(k)\sum_{i=1}^{M-1}c_i(k).$$

Если разложение строго ортогонально, то все попарные скалярные произведения различных компонент $c_i(k)$ и $c_j(k)$ обращаются в нуль. С помощью этого выражения общий (интегральный) показатель ортогональности IO определяется следующим образом:

$$IO=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{i=1}^{M-1}\sum_{j=1}^{M-1}c_i(k)c_j(k)\right),\ i\neq j.$$

Результирующий остаток $r_M(k)$ обычно не учитывается при вычислении индекса ортогональности, так как он не относится к классу ЭМ. *Чем ближе показатель к нулю, тем точнее выполняется свойство ортогональности*.

Для практики ортогональность разложения важна. Если $IO=0,$ то это свидетельствует об отсутствии рассеяния энергии в процессе процедуры декомпозиции и отсутствии взаимной энергии между различными ЭМ. Это обстоятельство является особенно важным, если требуется аппроксимировать сигнал либо одной ЭМ, либо суммой нескольких ЭМ, ведь для этого все ЭМ должны быть независимыми функциями.

Основные преимущества технологии обработки сигналов на основе ДЭМ следующие:

– ДЭМ является адаптивным методом обработки сигналов, поскольку сами базисные функции (ЭМ) извлекаются непосредственно из исходного сигнала, в связи с этим имеется возможность обеспечить высокую точность решения различных задач (предварительная обработка, структурный анализ, частотно-временной анализ);

– Этап предварительной обработки обеспечивает адаптивные решения задачи очистки сигналов от шумов различной природы с целью повышения достоверности дальнейшего анализа структуры сигналов. Кроме того, имеется возможность выделять тренд (общую тенденцию изменений в сигнале) и оценивать степень хаотичности сигналов;

– Этап частотно-временного анализа позволяет анализировать сигналы в частотно-временной области и извлекать из сигналов полезную информацию;

– В составе технологии на основе ДЭМ объединены различные задачи обработки сигналов, которые могут решаться с помощью единого математического аппарата и, как правило, последовательно;

– При выполнении декомпозиции имеется возможность выбрать конкретную модификацию ДЭМ.

К недостаткам технологии обработки сигналов на основе ДЭМ можно отнести довольно значительные вычислительные затраты на получение разложения, что объясняется, главным образом, необходимостью расчета огибающих путем кубической сплайн-интерполяции при извлечении каждой ЭМ и проведении процесса отсеивания.

Предварительная обработка сигналов. Очистка сигналов от шума

Предварительная обработка предшествует частотно-временному анализу сигналов с использованием преобразования Гильберта-Хуанга и включает в себя, главным образом, очистку сигналов от шума, выделение тренда, оценивание степени хаотичности сигналов. Эффективность дальнейшего анализа во многом зависят от того, насколько точно решены задачи предварительной обработки.

Далее рассмотрена задача очистки сигналов от шума с помощью ДЭМ как одна из наиболее часто встречающихся и известных [2, 3, 11-16]. Имеется исходный зашумленный сигнал $s(k)$. Известно, что он содержит аддитивный шум $e(k)$ с неизменяющейся дисперсией: $D\{e(k)\}=\text{const}$. Полагается, что $P_e<<P_s$, где P_e, P_s – мощность шума и полезного сигнала соответственно. Распределение отсчетов шума аппроксимируется нормальным законом.

Выражение для исходной аддитивной смеси полезного сигнала и шума имеет вид:

$$s(k)=\tilde{s}(k)+e(k),$$

где $s(k)$ – зашумленный сигнал; $\tilde{s}(k)$ – полезный сигнал; $e(k)$ – аддитивный шум.

В результате очистки от шума необходимо получить оценку $\hat{\tilde{s}}(k)$. Операция получения данной оценки в общем виде записывается следующим образом:

$$\hat{\tilde{s}}(k)=F\left[s(k)\right],$$

где $F[...]$ – оператор, вид которого зависит от метода очистки от шума.

В качестве оператора $F[...]$ может использоваться оператор *пороговой обработки отсчетов* (англ. – *Thresholding*) [27-30], относящийся к *нелинейным опе-*

раторам усечения. Именно пороговая обработка обеспечивает наилучшие результаты при проведении шумоочистки как на основе вейвлет-преобразования, так и на основе ДЭМ.

Одним из алгоритмов очистки сигналов от шума является алгоритм на основе вычисления энергий ЭМ и сравнения энергий с порогом, вычисленным для энергии ЭМ [2, 14, 15]. Практика показывает, что этот порог, определенный однажды на нескольких различных сигналах из одной группы, дает хорошие результаты на других аналогичных сигналах. Принадлежность к одному классу определяется в данном случае по структуре найденной декомпозиции. Недостатком данного метода является сложность в различении полезного высокочастотного сигнала и вредного высокочастотного шума.

Пороговая обработка отсчетов является одним из наиболее эффективных методов очистки сигналов от шума [27-29]. Пороговая обработка – непараметрический метод, поскольку модифицируются отсчеты компонент $c_p(k)$ и не вводятся дополнительные математические модели сигнала. Пороговая обработка применяется к начальным ЭМ в разложении, которые содержат наибольшую долю шума.

ЭМ $c_j(k)$ из числа начальных, содержащих значительную долю шума, представляется в следующем виде:

$$c_j(k) = g_j(k) + e_j(k),$$

где j – номер уровня разложения; $g_j(k)$, $e_j(k)$ – компоненты, соответствующие полезному сигналу и шуму на j-м уровне разложения. Интересующая компонента $g_j(k)$ определяется следующим образом:

$$g_j(k) = F\left[c_j(k), \rho_j\right], \quad (2)$$

где $F[...]$ – некоторый нелинейный (в общем случае) оператор модификации отсчетов; ρ_j – пороговое значение, применяемое для модификации отсчетов.

На основании общей формулы (2) различают *мягкую* и *жесткую* пороговую обработку:

– жесткая пороговая обработка (англ. – Hard Thresholding) отсчетов ЭМ:

$$g_j(k) = \begin{cases} c_j(k), & |c_j(k)| > \rho_j; \\ 0, & |c_j(k)| \le \rho_j; \end{cases}$$

– мягкая пороговая обработка (англ. – Soft Thresholding) отсчетов ЭМ:

$$g_j(k) = \begin{cases} c_j(k) - \rho_j, & c_j(k) > \rho_j; \\ 0, & -\rho_j < c_j(k) < \rho_j; \\ c_j(k) + \rho_j, & c_j(k) \le -\rho_j. \end{cases}$$

Процедура жесткой пороговой обработки отсчетов также получила название «keep or kill» («сохрани или обнули»), что означает неизменность значения отсчета в случае, если он по модулю превышает пороговое значение, и его обнуление в противном случае.

Процедура мягкой пороговой обработки получила название «modify or kill» («измени или обнули»), что означает, в отличие от жесткой пороговой обработки, не обнуление соответствующих отсчетов, а их модификацию по соответствующей формуле.

Существует также значительное количество альтернативных процедур пороговой обработки, занимающих промежуточное положение между мягкой и жесткой.

Ключевую роль играют именно значения порогов ρ_j, которые вычисляются следующим образом [27]:

$$\rho_j = \sigma_j \sqrt{2 \ln N},$$

где σ_j – оценка среднеквадратического отклонения (СКО, англ. – *Standard Deviation*) шумовой составляющей для j-й ЭМ. При этом возможно вычисление СКО для каждой ЭМ и использование различных порогов для различных ЭМ, а также использование универсального порога для всех компонент одновременно.

Оценку СКО можно проводить по формуле медианы абсолютных отклонений [30]:

$$\sigma_j = \frac{Med\left\{\left|c_j(k) - Med\{c_j(k)\}\right|\right\}}{0.6745}. \quad (3)$$

Приведенная медианная оценка $\sigma_j = Med\{...\}$ учитывает нормальное распределение отсчетов шума и является робастной по отношению к выбросам в сигнале.

Альтернативной является оценка СКО по методу наименьших квадратов:

$$\sigma_j = \frac{1}{N-1} \sqrt{\left(c_j(k) - \overline{c_j(k)}\right)^2}, \quad (4)$$

где $\overline{c_j(k)}$ – среднее значение ЭМ.

На рисунке 5 проиллюстрировано применения мягкой пороговой обработки с использованием медианной оценки уровня шума к сигналу, имеющему гладкую природу, но с локальными особенностями.

На рисунке 6 показан пример применения жесткой пороговой обработки для шумоочистки при использовании первых пяти уровней декомпозиции и медианной оценки СКО шума. Жесткая пороговая обработка наиболее целесообразна при обработке сигналов с резкими пиками, разрывами функции и ее производных. Именно такой сигнал проиллюстрирован на рисунке 6, где показан случай с разрывами функции в двух локальных моментах времени.

К преимуществам очистки сигналов от шума на основе ДЭМ относятся следующие:

– возможность выбора алгоритма шумоочистки (на основе сравнения энергий ЭМ или пороговой обработки отсчетов);

– адаптивное проведение шумоочистки за счет формирования ЭМ из исходного сигнала и учет локальных особенностей при удалении шума;

– возможность удаления шумов с равномерной дисперсией, так и шумов с изменяющейся дисперсией (гетероскедастических шумов);

К недостаткам можно отнести опять же некоторую вычислительную сложность процедуры шумоочистки за счет вычисления кубических сплайн-интерполированных огибающих у ЭМ, а также ограничение по работе данной процедуры в том случае, если уровень шума превышает уровень полезного сигнала (в этом случае требуются иные подходы).

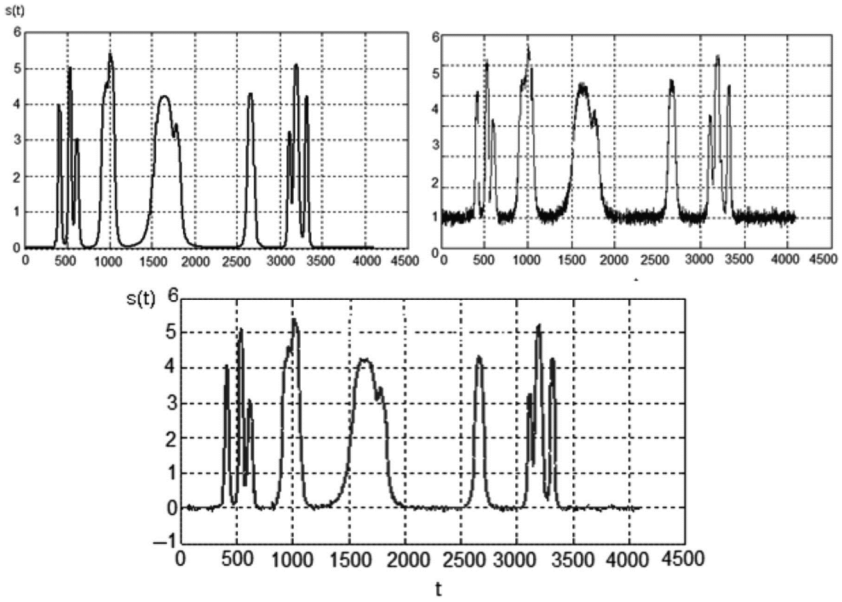


Рисунок 5. Исходный сигнал (слева вверху), он же с аддитивным гауссовским шумом (справа вверху) с параметрами $N(0;0,1^2)$ и очищенный сигнал после применения мягкой пороговой обработки отсчетов (внизу)

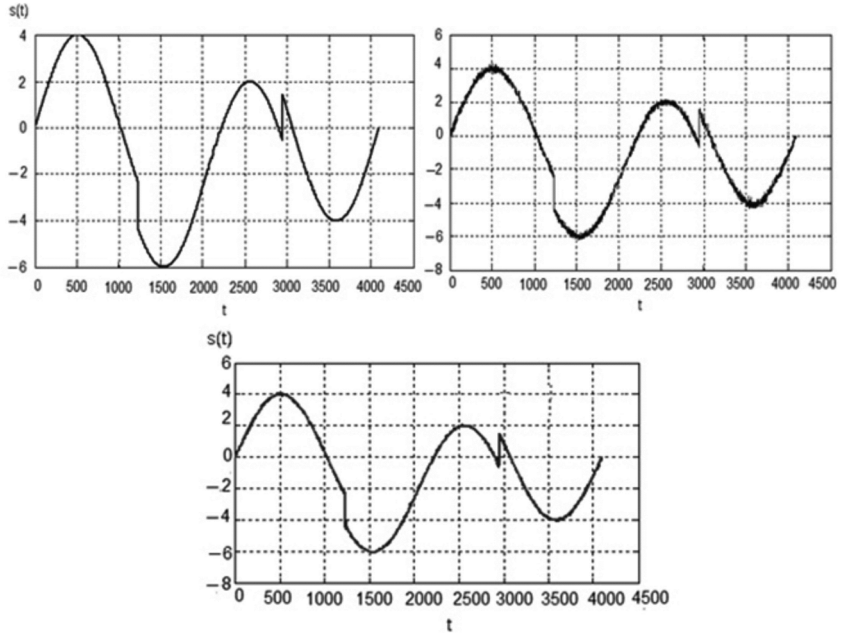


Рисунок 6. Исходный сигнал (слева вверху), он же с аддитивным гауссовским шумом (справа вверху) с параметрами $N(0;0,1^2)$ и очищенный сигнал после применения жесткой пороговой обработки отсчетов (внизу)

Интерпретация ДЭМ как диадического (двоичного) банка фильтров. Оценивание степени хаотичности сигналов

При проведении ДЭМ все извлекаемые компоненты (ЭМ) имеют четкую динамику [2-4, 14, 15]:

Первая ЭМ является наиболее осциллирующей и содержит наибольшее число максимумов, минимумов и нулей на длительности сигнала. Она содержит наибольшую долю шума и является самой высокочастотной, поскольку она самая широкополосная.

При переходе к ЭМ с более высокими номерами число экстремумов и нулей уменьшается, каждый раз примерно в 2 раза. Поэтому вторая ЭМ – менее высокочастотная, чем первая и т.д.

Результирующий остаток имеет наименьшую среднюю частоту и является либо константой, либо монотонной функцией (трендом) на длительности сигнала.

На рисунке 7 показано представление ЭМ на основе банка цифровых фильтров (показаны амплитудные Фурье-спектры ЭМ, соответствующие амплитудно-частотным характеристикам эквивалентных полосовых фильтров).

Динамику свойств ЭМ можно перенести частотную область:

– Амплитудный спектр первой ЭМ самый широкополосный, поскольку наблюдается большой удельный вес спектральных компонент с высокими частотами.

– С увеличением номера ЭМ эффективная ширина ее Фурье-спектра уменьшается, что связано с сокращением общего числа осцилляций в ее временной реализации.

– Последняя ЭМ имеет самый узкий спектр, объясняющий ее выраженную монотонную природу либо ра-

венство некоторой константе.

Если расположить амплитудно-частотные характеристики всех фильтров на одной частотной оси, то станет очевидно, что процесс декомпозиции представляет собой, по сути, *синтез совокупности перекрывающихся по частоте полосовых фильтров* с эффективной полосой, уменьшающейся по мере увеличения номера-соответствующей ЭМ. Такая тенденция в частотной области позволяет создавать банки фильтров и использовать их как для быстрого выделения конкретных ЭМ, так и для применения к анализу похожих по свойствам сигналов, позволяя сэкономить значительное количество времени и ресурсов памяти компьютера.

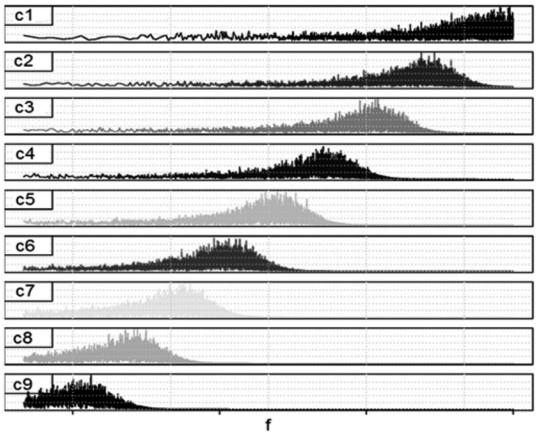


Рисунок 7. Представление ДЭМ как диадического банка фильтров

Основываясь на том факте, что ДЭМ можно интерпретировать как диадический банк фильтров, можно сделать вывод, что эффективная ширина Фурье-спектра каждой ЭМ уменьшается в число раз, равное степени 2. Исходя из этого, энергетический спектр очередной моды определяется как

$$S_{p',H}(f) = 2^{\alpha(p'-p)} S_{p,H}(2^{p'-p} f), \quad (5)$$

где $\alpha = 2H + 1$ – экспериментально определенная константа, p, p' – номера ЭМ, причем $p' > p \geq 2$, H – показатель Херста для ЭМ. Реккурентная формула (5) определяет энергетический спектр очередной ЭМ на основе известных спектров предыдущих ЭМ.

Зная энергетические спектры всех ЭМ, можно определить их дисперсии, и для удобства дальнейших вычислений представим выражение для дисперсий ЭМ в реккурентном виде:

$$V_H[p'] = \int_{-1/2}^{1/2} S_{p',H}(f)df = 2^{\alpha(p'-p)} \int_{-1/2}^{1/2} S_{p,H}(2^{p'-p} f)df = \quad (6)$$
$$= 2^{\alpha(p'-p)} V_H[p].$$

Формула (6) получена на основе теоремы Винера-Хинчина, а также то, что интегрирование ведется по симметричному промежутку частот, нормированных к частоте Найквиста. Из нее можно получить в явном виде выражение для дисперсии p-й ЭМ как функции ее номера:

$$V_H[p] = C \cdot 2^{2Hp},$$

где C – некоторая константа. После логарифмирования данного выражения по основанию 2 получается окончательный результат:

$$\log_2 V_H[p] = \log_2 C + 2Hp.$$

Из этого выражения непосредственно вытекает способ экспериментальной оценки *показателя Херста*, являющегося *мерой хаотичности* сигнала:

– выполняется ДЭМ для исследуемого сигнала;

– рассчитываются значения дисперсий каждой ЭМ;

– двоичные логарифмы дисперсий откладываются на графике;

– на основе регрессии методом наименьших квадратов строится линейная зависимость и определяется ее угловой коэффициент. Тогда само значение H будет найдено следующим образом:

$$H = \frac{|k_H|}{2},$$

где k_H – угловой коэффициент регрессионной прямой. Знак модуля необходим потому, что в отдельных случаях линеаризованная зависимость логарифма дисперсии ЭМ от ее номера может иметь отрицательный наклон, а показатель Херста – априорно положительная величина.

Альтернативный способ оценивания показателя Херста с использованием среднего периода ЭМ иллюстрируется формулой:

$$V_H[p] = C' \cdot (T_H[p])^{2H},$$

где C' – константа, $T_H[p'] = 2^{p'-p} T_H[p]$ для $p' > p \geq 2$, $T_H[k]$ – средний период p-й ЭМ, определяемый как расстояние между первым и последним нулем (или максимумом, или минимумом) функции, деленное на число нулей (или максимумов, или минимумов). Реккурентная формула, связывающая средние периоды 2-х ЭМ, основывается на интерпретации ДЭМ как диадического банка фильтров:

$$T_H[p] = 2^p.$$

Из описанных процедур следует, что для оценки значения H необходимо определение дисперсии каждой ЭМ, что выполняется на основе формул (3) и (4), дающих оценки СКО по методу наименьших квадратов и медиане абсолютных отклонений.

Частотно-временной анализ на основе представления Гильберта-Хуанга

Распределение Гильберта–Хуанга относится к классу частотно-временных распределений, позволяющих добиться лучшего, чем преобразование Фурье и вейвлет-преобразование, частотного разрешения применительно к анализу нестационарных сигналов. В преобразовании Гильберта-Хуанга оба основных шага направлены, в том числе, на извлечение локальных особенностей в данных как во временной, так и в частотно-временной областях:

– разложение исходного сигнала на ЭМ;

– вычисление частотно-временного распределения Гильберта-Хуанга.

Частотно-временное распределение также может быть использовано при выявлении кратковременных быстро меняющихся фрагментов (процессов) в исходном анализируемом сигнале.

После применения преобразования Гильберта к

каждой из ЭМ формируются комплексные аналитические сигналы [2-5, 14, 15, 31], которые могут быть представлены в следующем виде:

$$z_1(k) = c_1(k) + jH\left[c_1(k)\right] = a_1(k)e^{j\varphi_1(k)};$$

$$z_2(k) = c_2(k) + jH\left[c_2(k)\right] = a_2(k)e^{j\varphi_2(k)};$$

…

$$z_i(k) = c_i(k) + jH\left[c_i(k)\right] = a_i(k)e^{j\varphi_i(k)};$$

…

$$z_M(k) = c_M(k) + jH\left[c_M(k)\right] = a_M(k)e^{j\varphi_M(k)},$$

где $z_i(k)$ – комплексный аналитический сигнал, соответствующий i-й ЭМ $c_i(k)$; $H\left[c_i(k)\right]$ – ЭМ, сопряженная по Гильберту, $a_i(k)$ – амплитудная огибающая i-й ЭМ, $\varphi_i(k)$ – фазовая функция (фаза) i-й ЭМ.

Непрерывный сигнал $s(t)$ или дискретный сигнал $s(k)$ представляются следующим образом:

$$s(t) = \mathrm{Re}\left\{\sum_{i=1}^{M-1} a_i(t)e^{\left(j\int\omega_i(t)dt\right)}\right\}$$

для случая непрерывного сигнала и

$$s(k) = \mathrm{Re}\left\{\sum_{i=1}^{M-1} a_i(k)e^{\left(j\sum\limits_k\omega_i(k)\Delta k\right)}\right\}$$

для случая дискретного сигнала, где функции $a_i(t)$ и $a_i(k)$ характеризуют зависимость амплитуды i-й ЭМ от времени, то есть описывают закон амплитудной модуляции, $\omega_i(t)$ и $\omega_i(k)$ показывают, как изменяется мгновенная частота со временем, то есть описывают закон частотной модуляции. Сам сигнал представляется в виде конечного набора амплитудно-модулированных и частотно-модулированных функций.

Мгновенная амплитуда, фаза и мгновенная частота определяются по формулам [32, 33]:

$$a_i(k) = \sqrt{\left[c_i(k)\right]^2 + \left[H\left[c_i(k)\right]\right]^2};$$

$$\varphi_i(k) = arctg\left(\frac{H\left[c_i(k)\right]}{c_i(k)}\right);$$

$$\omega_i(k) = \varphi_i'(k) = \frac{\left[H\left[c_i(k)\right]\right]'c_i(k) - c_i'(k)\left[H\left[c_i(k)\right]\right]}{\left[H\left[c_i(k)\right]\right]^2 + c_i^2(k)}.$$

При применении преобразования Гильберта ЭМ должна иметь свойства как можно ближе к *монокомпонентной функции* (англ. – *Monocomponent Function*). Функция $f(t)$ является монокомпонентной, если она удовлетворяет следующим условиям [34-36]:

функция представима в виде $f(t) = a(t)\cos\theta(t)$, что называется каноническим амплитудно-фазовым представлением. Для монокомпонентной функции также должно выполняться условие $H[\rho(t)\cos\theta(t)] = \rho(t)\sin\theta(t)$, что соответствует квадратурному сдвигу тригонометрической функции при действии на нее преобразования Гильберта. Если исходная функция $f(t)$ является комплекснозначной, т.е. $f(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$, то условие квадратурного сдвига запишется в виде: $H[\rho(t)e^{i\theta(t)}] = -i\rho(t)e^{i\theta(t)}$. Повторное применение преобразования Гильберта $H\left[H\left[\rho(t)e^{i\theta(t)}\right]\right] = -\rho(t)e^{i\theta(t)}$ позволяет установить следующее тождество для комплекснозначных монокомпонентных функций $H^2 = -I$, где I – тождественный оператор.

$\theta'(t) > 0$, т.е. монокомпонентная функция должна иметь неотрицательную мгновенную частоту, которая будет иметь физический смысл.

$\rho(t) > 0$, то есть монокомпонентная функция должна иметь неотрицательный модуль (неотрицательную амплитудную огибающую).

В отдельных случаях функцию считают монокомпонентной только если выполняются условия неотрицательности мгновенной частоты (условие 2), и при этом 1-е и 3-е условия не учитываются.

При вычислении преобразования Гильберта-Хуанга применяются две важные теоремы: теорема Бедросиэна и теорема Натолла.

Теорема Бедросиэна [37] утверждает, что если спектральные представления двух функций $g_1(t)$ и $g_2(t)$ являются разнесенными (их спектры не перекрываются), то есть выполняются следующие условия:

$$G_1(f) = \begin{cases} G_1(f), & f_1 \le f \le f_2;\ -f_2 \le f \le -f_1 \\ 0, & f > f_2;\ -f_1 \le f \le f_1;\ f < -f_2 \end{cases};$$

$$\mathrm{supp}\left\{G_1(f)\right\} = [f_1, f_2] \cup [-f_2, -f_1],$$

$$G_2(f) = \begin{cases} G_2(f), & f_3 \le f \le f_4;\ -f_4 \le f \le -f_3 \\ 0, & f > f_4;\ -f_3 \le f \le f_3;\ f < -f_4 \end{cases};$$

$$\mathrm{supp}\left\{G_2(f)\right\} = [f_3, f_4] \cup [-f_4, -f_3],$$

$$f_3 \ge f_2$$

где $\mathrm{supp}\{...\}$ – обозначение *носителя функции* (интервала, на котором функция отлична от нуля), $G_1(f)$ и $G_2(f)$ – результаты преобразования Фурье от $g_1(t)$ и $g_2(t)$ соответственно, f_1, f_2 – граничные частоты спектра $G_1(f)$, f_3, f_4 – граничные частоты спектра $G_2(f)$, то выполняется соотношение

$$H[g_1(t)g_2(t)] = g_1(t)H[g_2(t)].$$

Применительно к рассматриваемым ЭМ в роли $g_1(t)$ выступает амплитудная огибающая $\rho(t)$, а в роли $g_2(t)$ – функция $\cos\theta(t)$. Предполагается, что спектры $\rho(t)$ и $\cos\theta(t)$ являются разнесенными по частоте, поскольку $\rho(t)$ меняется значительно медленнее, чем $\cos\theta(t)$, и имеет низкочастотный спектр. Таким образом, получаем

$$H[a(t)\cos\theta(t)] = a(t)H[\cos\theta(t)]$$

при условии

$$\mathrm{supp}\left\{a(\omega)\right\} \subset \left(-\omega_0, \omega_0\right);$$

$$\mathrm{supp}\left\{\cos\theta(\omega)\right\} \subset R \setminus \left(-\omega_0, \omega_0\right);\ \omega_0 > 0,$$

где $a(\omega)$ – спектр амплитудной огибающей $a(t)$,

$\theta(\omega)$ – спектр фазовой функции $\theta(t)$, $(-\omega_0, \omega_0)$ – интервал, на котором спектры амплитудной огибающей и фазовой функции отличны от нуля, R – множество действительных чисел.

Теорема Натолла [38] позволяет определить различие DE между квадратурной составляющей исходного сигнала $s(t) = a(t)\sin\theta(t)$ и результатом вычисления преобразования Гильберта от $a(t)\sin\theta(t)$:

$$DE = \int_0^{\infty} \left| s_q(t) - s_h(t) \right|^2 dt = 2 \int_{-\infty}^{0} \left| F_q(\omega) \right|^2 d\omega,$$

где $s_q(t)$ – квадратурная составляющая, $s_h(t)$ – результат вычисления преобразования Гильберта, $F_q(\omega)$ – спектр квадратурной составляющей $s_q(t)$.

Таким образом, существует несоответствие между квадратурной составляющей сигнала и результатом вычисления преобразования Гильберта.

Основным недостатком меры DE ошибки является то, что она определяет величину ошибки *интегрально*, то есть в совокупности всего рассматриваемого сигнала, не позволяя определить конкретные отсчеты, где эта ошибка значительнее, чем у остальных. Это, в свою очередь, существенно затрудняет возможность корректировки данной ошибки. Вместе с тем, необходимо отметить, что для большинства рассматриваемых на практике сигналов результаты квадратурного сдвига и преобразования Гильберта совпадают, и эти операции эквивалентны друг другу.

С учетом ДЭМ, представление исходного сигнала в виде набора ЭМ может быть записано в виде:

$$s(t) = \sum_{p=1}^{M-1} \rho_p(t) e^{i\theta_p(t)} + r_M(t), \qquad (7)$$

где $\rho_p(t) \geq 0, \quad H\left[\rho(t)e^{i\theta(t)}\right] = \mp i\rho(t)e^{i\theta(t)}, \quad \rho(t) \geq 0, \quad \theta'(t) \geq 0.$

Используя вещественную форму записи ЭМ в выражении (7), можно получить:

$$s(t) = \sum_{p=1}^{M-1} \rho_p(t)\cos\theta_p(t) + r_M(t),$$

где $H\left[\rho(t)\cos\theta(t)\right] = \mp i\rho(t)\sin\theta(t), \quad \rho(t) \geq 0, \quad \theta'(t) \geq 0.$

Процедура вычисления частотно-временного представления Гильберта-Хуанга включает в себя следующие шаги:

– вычисление разложения анализируемого сигнала $s(k)$ и получение набора ЭМ $\{c_i(k)\}_{i=1}^{M}$;

вычисление преобразование Гильберта от каждой ЭМ $c_i(k)$ и формирование комплекснозначного аналитического сигнала $z_i(k) = c_i(k) + jH\left[c_i(k)\right]$;

– представление аналитического сигнала $z_i(k)$ в показательной форме: $z_i(k) = a_i(k)e^{j\varphi_i(k)}$ с использованием огибающей и фазы;

– расчет мгновенной плотности энергии $\left|a_i(k)\right|^2$ и мгновенной частоты $\omega_i(k)$ путем дифференцирования полной фазы $\varphi_i(k)$;

– нанесение значений $\left|a_i(k)\right|^2$ цветом на частотно-временную диаграмму (частотно-временное представление Гильберта-Хуанга) как функцию времени и частоты.

В качестве примера далее рассматривается нестационарный сигнал длиной $N = 80000$ отсчетов при частоте дискретизации $f_s = 4000$ Гц. Таким образом, длительность сигнала составляет 20 сек. Сигнал и результаты его ДЭМ представлены на рисунке 8. Извлечено три компоненты (3 ЭМ и результирующий остаток).

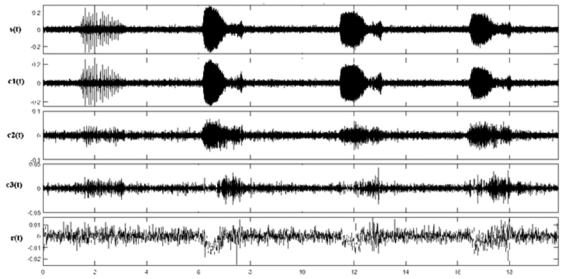


Рисунок 8. Разложение по методу ДЭМ

Частотно-временное представление Гильберта-Хуанга приведено на рисунке 9. На данном представлении четко видны области с большой амплитудой, соответствующие участкам с увеличенной дисперсией.

Основные преимущества и результаты сравнительного анализа частотно-временного представления Гильберта-Хуанга следующие:

– представление анализируемого сигнала на единой частотно-временной плоскости на основе адаптивно сформированного базиса разложения, что позволяет достигать высокой точности представления структуры сигнала;

– возможность расчета мгновенной частоты как функции времени, что эффективно для выявления частотных модуляций в сигнале. Кроме того, по перепадам яркости возможно выявление амплитудных модуляций в сигнале;

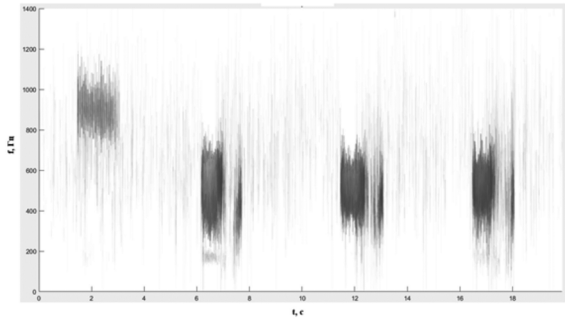


Рисунок 9. Частотно-временное представление Гильберта-Хуанга

– вейвлет-спектрограммы и частотно-временное представление Гильберта-Хуанга обеспечивают примерно одинаковое качество при анализе сигналов, однако во втором случае отсутствует проблема адекватного выбора базиса;

– преобразование Гильберта-Хуанга может применяться для вычисления маргинального спектра (аналог спектра Фурье для нестационарных сигналов) и мгновенной плотности энергии во временной области;

– Фурье-спектрограмма, которая также используется для частотно-временного анализа, обеспечивает худшее, чем преобразование Гильберта-Хуанга, разрешение и требует подбора размера окна во временной области. В преобразовании Гильберта-Хуанга практически отсутствуют настроечные параметры, что является его преимуществом.

Заключение

Рассмотрены преимущества адаптивной обработки сигналов с использованием классического метода ДЭМ, который является наиболее известным среди существующих модификаций. Остальные модификации (ДЭМ с параболической интерполяцией огибающих, локальная ДЭМ, online ДЭМ, ДЭМ с использованием

вейвлет-пакетного разложения и др.) также обеспечивают указанные преимущества. Общая схема обработки сигналов на основе ДЭМ может эффективно применяться при решении многочисленных задач, включая предварительную обработку, анализ структуры сигналов и частотно-временной анализ сигналов.

Предварительная обработка на основе ДЭМ позволяет решать задачи очистки сигналов от шума, выделения тренда, оценивания степени хаотичности сигналов. За счет адаптивного формирования базиса разложения путем извлечения ЭМ непосредственно из анализируемого сигнала можно обеспечить высокую точность решения указанных задач. Очистка сигналов от шума, как одна из наиболее актуальных задач предварительной обработки, решается с использованием алгоритма на основе оценивания энергий ЭМ, а также пороговой обработки отсчетов.

Частотно-временное представление Гильберта-Хуанга строится на основе рассчитанного разложения и позволяет анализировать структуру сигналов в частотно-временной области, выявлять амплитудные и частотные модуляции, классифицировать сигналы. Данное представление сравнимо по качеству с вейвлет-спектрограммами, однако при использовании ДЭМ не требуется априорного выбора базиса. Технология Гильберта-Хуанга (ДЭМ и частотно-временное распределение) может использоваться для решения прикладных задач обработки и анализа сигналов.

Литература

1. В.В. Егоров, Д. М. Клионский Декомпозиция на эмпирические моды: тематический обзор (часть 1). Цифровая обработка сигналов. 2025, № 1, С. 47-58.

2. N.E. Huang, et al. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for non-linear and non-stationary time series analysis. Proc. Royal Soc. London, vol. 454, 1998, pp. 903-995.

3. N.E. Huang, S.S.P. Shen Hilbert-Huang transform and its applications. World Scientific, 2005. 350 p.

4. P. Flandrin, G. Rilling, P. Gonsalves Empirical mode decomposition as a filter bank. IEEE Signal Process. Lett, vol. 11, 2004, pp. 112-114.

5. N.E. Huang, Z. Shen, S. R. Long A new view of nonlinear water waves: the Hilbert spectrum. Annual Review of Fluid Mechanics, 1999, pp. 417-457.

6. N.E. Huang, et al A confidence limit for empirical mode decomposition and Hilbert spectral analysis Proc. Royal Soc. London. Ser. A, Vol. 459, 2003, pp. 2317-2345.

7. N.E. Huang, C.C. Chern, K. Huang, L.W. Salvinho, S.R. Long, K.L. Fan A new spectral representation of earthquake data: Hilbert spectral analysis of station TCU129, Chi-Chi, Taiwan, 21 September 1999. Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 91, 1999, pp. 1310-1338.

8. P. Flandrin, P. Gonsalves. Empirical mode decompositions as data-driven wavelet-like expansions. Int. J. Wavelets Multiresolut. Inform. Process., vol. 2, 2004, pp. 477-496.

9. G. Rilling, P. Flandrin, P. Gonsalves On empirical mode decomposition and its algorithms. IEEE EURASIP Workshop on Nonlinear Signal Image Process, 2003, NSIP-03, Grado, Italy.

10. Д.М. Клионский, И.В. Неунывакин, Н.И. Орешко, В.В. Геппенер Декомпозиция на эмпирические моды и ее применение для идентификации информативных компонент и прогнозирования значений сигналов с использованием нейронных сетей. Нейрокомпьютеры: разработка, применение, № 6, 2010, с. 43-50.

11. Д.М. Клионский, Н.И. Орешко, В.В. Геппенер Декомпозиция на эмпирические моды с параболической интерполяцией огибающих в задачах очистки сигналов от шума. Цифровая обработка сигналов, № 2, 2011, с. 51-60.

12. В.В. Егоров, Д.М. Клионский Некоторые вопросы применения адаптивного метода декомпозиции нестационарных сигналов на эмпирические моды. Цифровая обработка сигналов, № 3, 2023, с. 52-58.

13. D. Klionskiy, M. Kupriyanov, D. Kaplun Signal denoising based on empirical mode decomposition. Journal of Vibroengineering. Vol. 19, No. 7, 2017, p. 5560-5570.

14. Н.И. Орешко, Д.М. Клионский, В.В. Геппенер, А.В. Экало Декомпозиция на эмпирические моды в цифровой обработке сигналов. Изд. СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2013, 164 с.

15. Д.М. Клионский, В.В. Геппенер Технология Гильберта-Хуанга и ее применение в цифровой обработке сигналов. Изд. СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2019, 150 с.

16. D.M. Klionsky, N.I. Oreshko, V.V. Geppener Applications of empirical mode decomposition for processing nonstationary signals. Pattern Recognition and Image Analysis: Advances in mathematical theory and applications, vol. 18, no. 3, 2008, pp. 390-399.

17. D.M. Klionsky, N.I. Oreshko, V.V. Geppener Empirical mode decomposition in segmentation and clustering of slowly and fast changing non-stationary signals, vol. 19, no. 1, 2009, pp. 14-29.

18. E. Keogh, S. Chu, D. Hart, M. Pazzani An online algorithm for segmenting time series. Proceedings of IEEE International Conference on Data Mining, 2001, pp. 289-296.

19. N. Dobigeon, J. Tourneret, M. Davy Joint segmentation of piecewise constant autoregressive processes by using a hierarchical model and a Bayesian sampling approach. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 55, no. 4, 2007, pp. 1251-1263.

20. Д.Г. Мэтьюз, К.Д. Финк Численные методы. Использование MATLAB, 3-е издание. Изд. Дом «Вильямс», 2001, 720 с.

21. Г.М. Фихтенгольц Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х томах. Изд. «Лань», 2021.

22. В.А. Зорич Математический анализ. В 2-х томах. Изд. МЦНМО, 2024.

23. А.Г. Курош Курс высшей алгебры. Изд. «Наука», 1965, 431 с.

24. Н.К. Смоленцев Вейвлет-анализ в Matlab. 3-е изд. Изд. ДМК Пресс, 2010, 448 с.

25. D.B. Percival, A.T. Walden Wavelet methods for time series analysis. Cambridge University Press, 2000, 594 p.

26. И. Добеши Десять лекций по вейвлетам. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 464 с.

27. S. Mallat A wavelet tour of signal processing. Elsevier Science, 1999, 637 p.

28. D.L. Donoho, J.M. Johnstone Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage, Biometrika, vol. 81, no. 3, 1994, pp. 425-455.

29. D.L. Donoho, J.M. Johnstone Minimax estimation via wavelet shrinkage, Annals of Statistics, 1998, vol. 26, no. 3, pp. 879-921.

30. Дж. Хьюбер Робастность в статистике. Изд-во «Мир», 1984, 304 с.

31. S. Hahn Hilbert transforms in signal processing. Artech House, 1995, 442 p.

32. L. Cohen Time-frequency analysis. Prentice Hall, 1995, 299 p.

33. B. Boashash Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal. Proc. IEEE, 1992, vol. 51, pp. 520-568.

34. T. Qian Mono-components for decomposition of signals. Mathematical methods in the applied sciences, 2006, vol. 29, pp. 1187-1198.

35. T. Qian, Q. Chen Characterization of analytic phase signals. Computers and mathematics with applications, 2006, vol. 51, pp. 1471-1482.

36. T. Qian, L. Zhang, H. Li Mono-components vs IMFs in signal decomposition. International journal of wavelets, multiresolution and information processing, 2008, vol. 6, no. 3, pp. 353-374.

37. E. Bedrosian A product theorem for Hilbert transform. Proc. IEEE, vol. 51, pp. 868-869.

38. A.H. Nutall On the quadrature approximation to the Hilbert transform of modulated signals. Proc. IEEE, vol. 54, pp. 1458-1459.