

АНАЛИЗ СИГНАЛОВ ЛАЗЕРНЫХ ГИРОСКОПОВ ДЛЯ АВТОПИЛОТИРОВАНИЯ МАНЕВРИРУЮЩИХ ОБЪЕКТОВ

*Андреев В.Г., д.т.н., доцент, профессор кафедры РТС РГРТУ, e-mail: andrejev.v.g@rsreu.ru
Жирков Е.А., аспирант кафедры РТС РГРТУ, e-mail: jirckow.evgeny2013@yandex.ru*

LASER GYROSCOPE SIGNALS ANALYSIS FOR AUTOPILOTING MANEUVERING OBJECTS

Andrejev V.G., Zhirkov E.A.

We have performed analysis of laser fiber-optic gyroscope signals for the propose of disorder detection in this paper. Three methods based on periodogram, correlation and spectrum of eigenvalues estimation are considered. The maximum probability of correct detection ensuring and the minimum response time of navigation system to disorder are criteria of our analysis. The detection characteristics of each method are given. Conclusion is made about the efficiency (correct detection probability and navigation system response time) of known and proposed approaches to disorder moment detection.

Key words: autocorrelation matrix, radio engineering, disorder, eigenvalues, spectrum, DSP.

Ключевые слова: корреляционная матрица, радиотехника, разладка, собственные числа, спектр, цифровая обработка сигналов.

Введение

В последние годы использование беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) существенно возросло. Современные волоконно-оптические гироскопы не слишком дороги в производстве и неприхотливы в обслуживании [1], что делает возможным установку данных навигационных систем на дронах. Однако при этом целесообразно, не усложняя конструкцию гироскопа, повысить эффективность его использования программным путём [2]. Отметим, что наряду с методами цифровой обработки, использующими дискретное преобразование Фурье, весьма перспективны алгоритмы на базе иных ортогональных преобразований.

Данное исследование посвящено анализу эффективности метода, основанного на работе со спектром собственных чисел, по сравнению с традиционными методами обработки при помощи быстрого преобразования (БПФ). Задача обнаружения начала манёвра важна потому, что при его отсутствии шумовые сигналы с гироскопических систем, обладающих невысокой точностью, поступают на органы управления подвижного объекта. На практике используют адаптивную систему борьбы с шумами, подразумевающую резкое расширение полосы пропускания низкочастотного фильтра при начале манёвра и сужение полосы при его отсутствии. Подобный гибкий подход к параметрам фильтрации сигналов с выхода гироскопических систем даёт возможность снизить излишние нагрузки на систему управления летательного аппарата, сохраняя её достаточную динамику.

Постановка задачи

Исследуемый сигнал на выходе волоконно-оптического гироскопа представляет собой коррелированный процесс, причём манёвр (изменение углового

Проведён анализ сигналов лазерных волоконно-оптических гироскопов на предмет наличия в них разладки. Рассмотрено три метода, основанных на оценивании: периодограммного спектра, корреляционного анализа и спектра собственных чисел. Проведён анализ данных методов по двум критериям: обеспечение максимальной вероятности правильного обнаружения и минимального времени реакции навигационной системы на появление разладки. Приведены характеристики обнаружения каждого метода. Сделан вывод об эффективности (по вероятности правильного обнаружения и времени реакции навигационной системы на появление аномалии) известных и предлагаемых подходов к обнаружению момента разладки.

положения) порождает линейный тренд, являющийся признаком начала манёвра, параметры которого необходимы системе навигации (автопилоту) для адекватного управления летательным аппаратом. Вместе с тем, при отсутствии манёвра случайные флуктуации сигнала на выходе гироскопической системы порождают ложные стохастические реакции автопилота, которые осложняют задачу управления. Поиск момента начала манёвра сводится к анализу случайного процесса $x(t)$ на наличие в нём разладки, т.е. явления, заключающегося в потере стационарных свойств наблюдаемого процесса.

Алгоритмы поиска разладки бывают различными [3, 4]. В данной работе исследованы два из них. Все они основаны на обработке данных в скользящем окне размера M . Первый алгоритм основан на прямом преобразовании Фурье исходной выборки (метод периодограмм) и последующих манипуляциях со спектральными отсчётами. Второй, предлагаемый, метод основан на работе со спектром собственных значений оценки корреляционной матрицы \mathbf{R} наблюдаемого процесса $x(t)$. Динамика данного спектра обусловлена степенью коррелированности наблюдаемого процесса $x(t)$ [5].

Формализация задачи

Пусть имеется выборка $x = [x_n]T$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ объёма N , представляющая собой серию наблюдений

случайного процесса $x(t) = \delta s(t) + n(t)$, где $s(t)$ – манёвр; δ – число, такое, что $\delta = 0$, если манёвра нет, и $\delta = 1$, если манёвр имеет место; $n(t)$ – в общем случае случайный нестационарный шумовой процесс. Процесс $x(t)$ (см. рис. 1) является нестационарным, так как наличие манёвра изменяет общую статистику процесса, порождая заметные отклонения во времени таких параметров, как математическое ожидание и дисперсия [6]. Полагая, что выборка x представляет собой нормальную совокупность, модель реального процесса $x(t)$ можно описать следующим образом:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_0(t) \\ \Delta x(t) \\ x_1(t) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $x\delta(t)$, $\delta = 0, 1$ – условно стационарные (и эргодические) участки, соответствующие установившимся показаниям гироскопа при отсутствии и проведении манёвра соответственно; $\Delta x(t)$ – переходная зона, являющаяся условно стационарным (и не обязательно эргодическим) процессом с монотонным трендом, близким к линейному. В дальнейшем изложении будем считать, что случайная величина, представляющая собой сигнал с выхода гироскопа, имеет гауссовский закон распределения. В более ранних работах [7] было сделано именно такое предположение. Значительное отклонение среднего значения показаний от нуля свидетельствует о совершении манёвра летательным аппаратом.

Переведённый в цифровую форму процесс $x(t)$ подвергается обработке в скользящем окне установленного размера M . Для обеспечения необходимой динамики данное окно не должно охватывать манёвр целиком. Выборка x_{cut} , имеющая объём q отсчётов, подвергается обработке в соответствии с одним из алгоритмов $A\{\bullet\}$, являющихся функциональными преобразованиями. Их результат сравнивается с порогом y_{tr} . Формально, процедура обработки может быть записана следующим образом:

$$y_k = A\{x_{cut}^{(k)}\} \leq y_{tr}, \quad (2)$$

где: y_k , $k = 0, 1, 2, \dots, N-M-1$ – результат применения алгоритма $A\{\bullet\}$ к текущему вектору $x_{cut}^{(k)}$ входных данных; $x_{cut}^{(k)}$ – текущий вектор (ограниченная окном размера q последовательность) входных данных x на k -м шаге; y_{tr} (от англ. threshold) – порог обнаружения манёвра, выбираемый в соответствии с заданной вероятностью F его ложного обнаружения.

Математическое решение

Несмотря на общность принципа поиска разладки, каждая рассмотренная далее процедура обнаружения

индивидуальна в плане предпочтения того или иного алгоритма работы с выборкой x_{cut} . Рассмотрим три алгоритма $A\{\bullet\}$.

I Метод периодограмм

При использовании сырых периодограмм преобразование осуществляется в два этапа:

1) сначала вычисляется дискретный энергетический спектр (ЭС) s от выборки x_{cut} : $s = \text{diag}(F x_{cut})(F x_{cut})^*$, где $\text{diag}(\bullet)$ – оператор диагонализации, $F = \{F_m, n\} = \{\exp(-2\pi i m l / L)\}$ – матрица дискретного преобразования Фурье, L – число спектральных отсчётов, i – мнимая единица, $*$ – знак комплексного сопряжения, $l = 0, 1, \dots, L-1, m = 0, 1, \dots, M-1$;

2) затем находится отношение величины s_{max} максимального спектрального отсчёта к средней величине s_{cp} отсчётов за вычетом максимального s_{max} :

$$\frac{s_{max}}{s_{cp}} = \frac{s_{max}}{\frac{1}{M-1} \left(\sum_{j=0}^{M-1} s_j - s_{max} \right)} = \frac{(M-1)s_{max}}{\sum_{j=0}^{M-1} s_j - s_{max}}. \quad (3)$$

Результат данного отношения и будет искомой величиной y из выражения (2). Индекс k , соответствующий номеру шага скользящего окна и являющийся временной привязкой, в данном случае опускается для упрощения формулы (2). Предполагается, что выполнение всех этапов данного алгоритма выполняется за один шаг скользящего окна.

Таким образом, применение периодограммного алгоритма $A1\{\bullet\}$ к выборке x_{cut} сводится к последовательному выполнению двух этапов: нахождение дискретного ЭС и последующей манипуляции (3) со спектральными отсчётами s_j .

II Метод суммирования коэффициентов автокорреляционной последовательности

Следующим является алгоритм весового суммирования модулей коэффициентов автокорреляционной последовательности (АКП) r , вычисленной по исходной выборке x_{cut} . Данный алгоритм $A2\{\bullet\}$ также, как и в первом случае (методе периодограмм), последовательно выполняется в два этапа:

1) производится расчёт АКП [8] по выборке x_{cut} , ограниченной скользящим окном размера M ;

2) модули коэффициентов АКП взвешиваются весовым вектором w и после этого суммируются.

Тогда, искомая величина y из (2) представляет собой сумму взвешенных модулей коэффициентов автокорреляции:

$$y = w^T \tilde{r},$$

где \tilde{r} – вектор модулей коэффициентов автокорреляции, T – знак транспонирования.

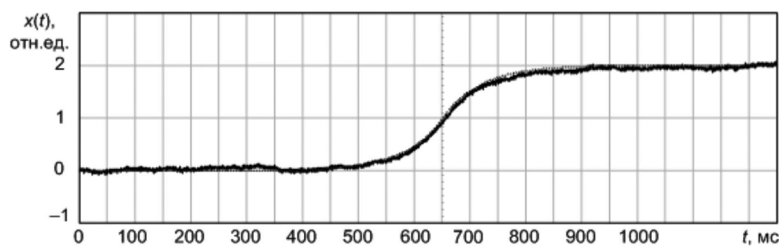
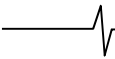


Рис. 1. Модель анализируемого манёвра



Оба вышеизложенных метода поиска момента разрядки (манёвра) хорошо изучены [3, 4]. Наиболее эффективным на сегодняшний момент является первый из выше рассмотренных методов, так как периодограммный анализ позволяет более оперативно реагировать на изменение показаний гироскопа [9]. Однако для сырых периодограмм характерно наличие большого числа ложных выбросов [8], что для стабилизации вероятности F ложного обнаружения манёвра требует дополнительной низкочастотной фильтрации, ухудшающей чувствительность алгоритма. Отметим, что оперативность (или быстродействие) системы связана с аппаратными и программными ресурсами вычислительного модуля, в то время как точность определяется ошибкой – отклонением $|\theta - \theta_{\text{оц}}|$ оценки $\theta_{\text{оц}}$ момента разрядки от её истинного значения θ .

III Анализ спектра собственных значений

Для достижения более высокой точности был предложен метод поиска момента θ разрядки посредством анализа динамики спектра собственных чисел корреляционной матрицы \mathbf{R} [5]. Подобный алгоритм имеет бóльшую вычислительную сложность и его эффективность зависит от возможностей аппаратной и программной реализации на борту летательного аппарата. Заметим, современные вычислительные средства наращивают свою производительность, что даёт возможность практической реализации данного метода в приемлемых временных рамках.

Последовательность математических операций алгоритма $A3\{\bullet\}$, реализующего решающее правило (2) для предлагаемого метода анализа собственных значений представлена ниже:

- 1) вычисление АКП \mathbf{r} , аналогично шагу 1) для метода II;
- 2) получение оценки теплицевой автокорреляционной матрицы \mathbf{R} ;
- 3) нахождение максимального λ_{\max} и минимального λ_{\min} собственных чисел матрицы \mathbf{R} .

Результатом работы алгоритма $A3\{\bullet\}$ является нахождение собственных чисел λ_{\max} или λ_{\min} . При манёвре показания гироскопа, соответствующие угловой скорости летательного аппарата, смещаются от нулевого значения, что приводит к изменению степени автокорреляции процесса. Это, в свою очередь, влияет на величину собственных чисел автокорреляционной матрицы \mathbf{R} , расположенных в подпространстве условного сигнала [5]. Таким образом, малое возмущение, которое знаменует начало манёвра, может быть обнаружено посредством анализа динамики спектра собственных значений.

Нахождение собственных чисел для матриц большого порядка (10×10) является достаточно трудоёмкой с точки зрения вычислений операцией, поэтому для сокращения времени вычислений до значений, сопоставимых с методами I и II, в методе III для расчёта корреляционной матрицы будут использоваться первые несколько элементов АКП \mathbf{r} и подобная матрица \mathbf{R} будет зваться усечённой.

Важно отметить, что процесс $x(t)$ во всех трёх рассмотренных случаях полагается нецентрированным.

Изначальное смещение при отсутствии манёвра принято нулевым, т.е. $E[x(t)] = 0$ для $x(t) = x_0(t)$ из (1).

Компьютерный эксперимент

Массив данных x , подлежащий обработке, содержит $N = 4900$ дискретных отсчётов наблюдаемого процесса $x(t)$, соответствующего (1). Исходные показания подвергались прохождению через сглаживающий низкочастотный фильтр, представляющий собой последовательное выполнение прямого и обратного преобразования Фурье с удалением высокочастотной части после прямого преобразования. Данный фильтр обладает эффектом нормализации процесса [9].

Выбор порога y_{tr} осуществлялся по критерию Неймана – Пирсона [10] при заданной вероятности F ложного обнаружения, равной в данном эксперименте величине $F = 10^{-3}$.

Параметры модельного манёвра следующие:

- начало переходной зоны $\Delta x(t)$ (манёвра) $t_1 = 2200$;
- продолжительность Δt переходной зоны $\Delta t = 600$;
- отношение сигнал-шум q при манёвре $q = -20 \dots 30$ дБ;
- размер усечённой автокорреляционной матрицы для расчёта собственных чисел равен 3×3 .

Характер фронта манёвра можно описать эмпирической кривой $f(t)$ экспоненциального вида:

$$f(t) = \begin{cases} 0,5 \exp\left(-\frac{|t-t_0|}{\alpha \Delta t}\right), & t < t_0; \\ 1 - 0,5 \exp\left(-\frac{|t-t_0|}{\alpha \Delta t}\right), & t \geq t_0; \end{cases} \quad (4)$$

где t_0 – середина фронта; $\alpha = -[\beta \ln(\gamma)] - 1$ – параметр функции $f(t)$; $\beta = 2$ – показатель протяжённости разрядки; $\gamma = 0,01$ – параметр представления функции $f(t)$ в крайних точках $t_1 = t_0 - \Delta t/\beta$ и $t_2 = t_0 + \Delta t/\beta$ манёвра. Дополним область определения функции (4) вне временного отрезка Δt : $f(t < t_1) = 0$ и $f(t > t_2) = 1$.

Целью эксперимента является сравнение предлагаемого метода III с двумя известными подходами I и II к обнаружению разрядки. Эффективность алгоритмов обнаружения манёвра оценим по следующему комбинированному критерию:

$$D \rightarrow D_{\max} \text{ при } F = \text{const}, \\ |\theta - \theta_{\text{оц}}| \rightarrow \min. \quad (5)$$

Совокупность условий (5) ориентирована на достоверность и своевременность обнаружения факта разрядки (начала манёвра). Обеспечение максимальной вероятности D правильного обнаружения (при фиксированной вероятности F ложной тревоги) является обязательным требованием [10], необходимым для стабильной работы навигационной системы. При этом понятие вероятности D следует дополнить тем, что правильным обнаружением является не просто выявление манёвра, а обнаружение его начала, то есть превышение порога y_{tr} решающей функцией y согласно (2) должно происходить в момент времени, близком к t_1 начала процесса разрядки. Условие наискорейшего обнаружения разрядки необходимо для повышения оперативности реакции навигационной системы летательного аппарата на маневрирование [4].

Оперативность определяется размером M скользящего окна. В табл. 1 сведены результаты оценки момента разладки, которая началась с 2200-го отсчёта, различными алгоритмами в зависимости от размера M анализируемой статистики x_{cut} , ограниченной скользящим окном. Время реакции навигационной системы на манёвр (разладку) приведена в виде уклонения $t_p = |\theta - \theta_{оц}| - M$ оценки $\theta_{оц}$ от истинного значения параметра $\theta = t_1 = 2200$ с учётом задержки на величину размера M скользящего окна.

Таблица 1

Алгоритм	Размер M окна		
	10	20	30
I Периодограммы	510	515	515
II Сумма коэффициентов АКП	220	180	200
III Собственные числа	230	190	210

Ожидаемым результатом является то, что увеличение объёма выборки x_{cut} посредством расширения скользящего окна положительно сказывается и на достоверности принятия решения о начале манёвра, о чём будет сказано ниже. Однако увеличение размера M скользящего окна противоположным образом сказывается на оперативности обнаружения, снижая эффективность фильтрации сигналов для автопилотирования, кроме того, работа с автокорреляционными матрицами \mathbf{R} размера, большим, чем 10×10 , является в значительной степени трудоёмкой операцией. Это замечание актуально для предлагаемого метода, в котором предполагается поиск собственных чисел матрицы \mathbf{R} .

Отметим, что динамический диапазон d сигнала в скользящем окне увеличивается с увеличением размера M окна, что положительно сказывается на чувствительности обнаружения разладки. Так, например, для приведённого выше случая динамический диапазон d (перепад мгновенных мощностей) при $M = 5$ $d = 0,3$ дБ (при обнаружении разладки), а для $M = 20$; $d = 1,1$ дБ, что даёт возможность оптимизировать величину M длины скользящего окна. Экспериментальная оценка показала, что оптимальный (с точки зрения выполнения условия (5)) размер M окна лежит в диапазоне от 10 до 30 отсчётов для данного примера. Снижение величины M уменьшает объём анализируемой статистики, что негативно сказывается на вероятности D правильного обнаружения момента θ разладки [4]. Дальнейшее же наращивание размера скользящего окна приводит к увеличению времени реакции навигационной системы, что делает её более инертной.

В качестве объективного показателя достоверности определения момента разладки приводятся характеристики обнаружения – зависимости вероятности D пра-

вильного обнаружения от отношения q сигнал-шум на входе обнаружителя [10]:

$$D = F^{\frac{1}{1+\mu q}}, \quad (6)$$

где μ – коэффициент улучшения отношения сигнал-шум. В рассматриваемом случае величина q характеризует отношение энергии сигнала $s(t)$ на выходе гироскопа к интенсивности шумов $n(t)$. Уровень сигнала гироскопа может быть рассчитан исходя из аппроксимирующей функции (4) с соответствующим масштабирующим коэффициентом. Мощность нестационарного шума $n(t)$ рассчитывается, ввиду аддитивного его характера, как сумма дисперсии σ^2 белого шума и дисперсии σ_w^2 винеровского процесса, пропорциональной длине временного интервала (размеру M скользящего окна), на котором этот процесс рассматривается: $\sigma_w^2 \sim M$ [11].

Первый метод требует гораздо (до 20 дБ) большие отношения сигнал-шум на входе, а два других сопоставимы. Приведём для них на рис. 2 характеристики обнаружения разладки.

На рис. 2 приведены эмпирические оценки характеристик обнаружения. Введены следующие цифровые обозначения: график № 1 соответствует методу II (сумма коэффициентов АКП), а график № 2 – методу III (спектр собственных чисел). Из рис. 2 видно, что эмпирические оценки характеристик обнаружения для методов II и III близки. Для высоких вероятностей правильного обнаружения $D > 0,9$ разница составляет единицы децибел. Характеристики, представленные на рис. 1, подтверждают данные табл. 1: метод II обладает незначительно большей чувствительностью, чем метод III. Поэтому для решения конкретной практической задачи среди двух представленных методов следует выбирать наиболее быстродейственный с точки зрения аппаратной и программной реализации. Что же касается метода I, при равных условиях он проигрывает по вероятности D правильного обнаружения двум вышеизложенным подходам, однако обладает, как было упомянуто ранее, наибольшей скоростью вычисления (наименьшими вычислительными затратами) [9].

Если для в методе III вместо усечённой корреляционной матрицы \mathbf{R} использовать для расчётов её полно-размерную версию порядка M , то можно добиться большей чувствительности предлагаемого метода для малых отношений сигнал-шум, что демонстрируют характеристики обнаружения, приведённые на рис. 3.

Для малых вероятностей D правильного обнаружения $D < 0,5$ выигрыш в отношении q сигнал-шум достигает 3 дБ в сравнении с методом суммирования коэффициентов автокорреляции. Подобный эффект достигается за счёт увеличения порядка корреляционной мат-

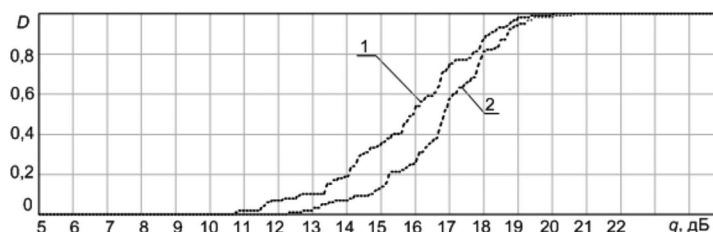


Рис. 2. Характеристики обнаружения

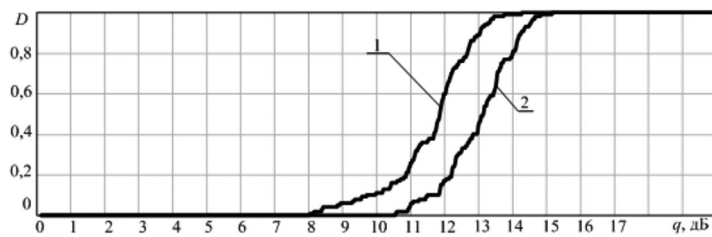


Рис. 3. Характеристики обнаружения

рицы \mathbf{R} до величины, равной размеру M скользящего окна, то есть для расчёта матрицы берутся все элементы АКП. Однако, такой подход неэффективен с точки зрения быстродействия, так как требует $\sim M^2$ количества операций.

На основании проведённого компьютерного эксперимента можно сделать следующие выводы. Отношение q сигнал-шум на выходе гироскопа не является постоянной величиной. Для рассматриваемого случая оно возрастает с течением времени в соответствии с заданным трендом (4). Следовательно, достоверность обнаружения разладки при интенсивном манёвре повышается по мере продвижения скользящего окна вдоль анализируемой выборки x . Однако, вместе с этим уменьшается и актуальность обнаружения манёвра, так как в решаемой задаче практически важно наискорейшее обнаружение разладки, т.е. $|\theta - \theta_{\text{он}}| \rightarrow \min$.

Обсуждение результатов эксперимента

Как можно видеть, способ, основанный на весовом суммировании коэффициентов автокорреляции, и предлагаемый метод схожи по условиям, оговорённым в (5). Оба подхода имеют схожую точность $|\theta - \theta_{\text{он}}|$ обнаружения разладки и близкую достоверность (вероятность D правильного обнаружения) при том же отношении q сигнал-шум. Более того, если подбирать весовые коэффициенты w таким образом, чтобы $w_j \neq 0$ только для $j \rightarrow 0$ (весовые коэффициенты отличны от нуля только для младших коэффициентов АКП, вплоть до единственного нулевого, т.е. дисперсии), то характеристики II способа радикально не ухудшатся. Это можно объяснить тем, что набор собственных чисел λ есть решение нелинейного характеристического уравнения $\det(\mathbf{R} - \lambda \mathbf{I}) = 0$, где \mathbf{R} – матрица; \mathbf{I} – единичная матрица. Если \mathbf{R} – действительная корреляционная матрица теплицевого вида:

$$\mathbf{R} = \{R_{j,k} = r_{|j-k|} = r_m\}, j, k = 0, 1, \dots, M-1; m = |j-k|, \quad (7)$$

где r_m , $m = 0, 1, \dots, M-1$, – коэффициенты АКП, то решение характеристического уравнения при некротных корнях примет вид $\lambda = \{\lambda_m\}$, где λ – спектр собственных значения матрицы \mathbf{R} . Таким образом, собственные числа λ_m определяются свойствами автокорреляционной матрицы \mathbf{R} , которая в теплицевой структуре полностью характеризуется коэффициентами r_m АКП \mathbf{r} .

Подводя итог рассуждениям, можно сказать, что методы II и III обнаружения разладки сходны между собой, т.к. используют в качестве исходных данных АКП \mathbf{r} : оба подхода ориентированы на поиск коррелированной компоненты в наблюдаемом процессе (t).

Заключение

По результатам проведённого исследования предлагаемый

метод, основанный на анализе спектра собственных чисел, оказался сравнимым по введённым критериям эффективности (по вероятности правильного обнаружения и времени реакции навигационной системы) с методом, основанном на взвешенном суммировании коэффициентов АКП. Известный подход, основанный на манипуляции спектральными отсчётами, показал более низкую вероятность правильного обнаружения при равном отношении q сигнал-шум (требуется обеспечить значение $q = 30$ дБ для адекватной работы алгоритма), а также – более высокое время запаздывания реакции системы (около 200 дискретных отсчётов случайного процесса $x(t)$). Вместе с тем, предлагаемый метод имеет более сложную математическую реализацию, заключающуюся в работе с корреляционной матрицей \mathbf{R} порядка M и решением нелинейных уравнений того же порядка M , что сказывается на требованиях к быстродействию бортового вычислителя. В то же время, метод суммирования коэффициентов АКП не требует решения столь сложных математических задач и, в силу близости прочих показателей эффективности, имеет более высокую степень предпочтения в использовании. Однако предлагаемый метод, основанный на анализе спектра собственных значений корреляционной матрицы, показывает лучшие с точки зрения вероятности D правильного обнаружения показатели чувствительности и позволяет раньше реагировать на разладку, что актуально для раннего обнаружения манёвра.

Литература

1. 50 лет лазерному гироскопу / Д.П. Лукьянов и др. Фотоника. 2014 Т. 44 № 2 С. 20-37.
2. Брич А.И. Сравнительный анализ алгоритмов фильтрации данных инерциальных датчиков. Политехнический молодёжный журнал. 2023. № 3. С. 1-15.
3. Колмогоров А.Н., Прохоров Ю.В., Ширяев А.Н. Вероятностно-статистические методы обнаружения спонтанно возникающих эффектов. Тр. МИАН СССР. 1988. Т. 182. С. 4-23.
4. Ширяев А.Н. Вероятностно-статистические методы в теории принятия решений. М.: МЦНМО, 2014. 144 с.
5. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Мир, 368 с.
6. Спиридонов Д.М., Обухович Д.В. Аналитическая и компьютерная математические модели шума выходного сигнала волоконно-оптического гироскопа, анализ и верификация. Журнал Радиоэлектроники. 2024. № 4.
7. Жирков Е.А. Анализ шумовой дорожки лазерной измерительной аппаратуры. Труды VII Всероссийской научно-технической конференции АПСНИП. Рязань: РГРТУ, 2022. С. 59-65.
8. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ: пер. с англ. М.: Мир, 1990. 584 с.
9. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов: пер. с англ. 2-е изд. М.: ООО «Бином-Пресс», 2006. 656 с.
10. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника: 2-е изд., перераб. и доп. М.: Радио и связь, 1982. 624 с.
11. Сирая Т.Н. Статистическая интерпретация вариации Аллана как характеристики измерительных и навигационных уст-ройств. Гироскопия и навигация. 2020. Т. 28. № 1 (108). С. 3-18.