

УДК 621.391

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СПЕКТРА СИГНАЛОВ ПРИ ЭКВИДИСТАНТНОЙ ПОЛОСОВОЙ СУБНАЙКВИСТОВОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

Лесников В.А., к.т.н., доцент кафедры радиоэлектронных средств Вятского государственного университета, e-mail: vladislav.lesnikov.ru@ieee.org

Наумович Т.В., ст. преподаватель кафедры радиоэлектронных средств Вятского государственного университета, e-mail: ntv_new@mail.ru

Частиков А.В., д.т.н., профессор кафедры радиоэлектронных средств Вятского государственного университета, e-mail: alchast@mail.ru

Метелев А.П., к.т.н., доцент кафедры радиоэлектронных средств Вятского государственного университета, e-mail: metap@inbox.ru

TRANSFORMATION THE SPECTRUM OF SIGNALS WITH EQUIDISTANT BANDPASS SAMPLING

Lesnikov V.A., Naumovich T.V., Chastikov A.V., Metelyov A.P.

This paper continues the series of publications by the authors devoted to the study of multi-channel multi-frequency sub-Nyquist sampling of bandpass signals. With this approach, aliasing of varying degrees occurs in the channels. To develop algorithms for the restoration of distorted signals, a deep study of aliasing is necessary. The article explores a new way to visualize the positions of aliases on the frequency axis. The method is based on representing the positions of aliases as a function of two variables, one of which is the frequency itself, and the second is the lower bound of the part of the finite spectrum of the signal located at positive frequencies. As a result, a patterned structure is formed in which a certain elementary pattern is repeated periodically (with a period equal to the sampling frequency). This paper studies the structure of this pattern as a function of the relationship between spectral bandwidth and sampling rate.

Key words: bandpass signals; bandpass sampling; uniform sampling; aliasing; degree of aliasing; sampled pattern.

Ключевые слова полосовые сигналы; полосовая дискретизация; эквидистантная дискретизация; альясы; степень наложения спектров; паттерн дискретизации.

Введение

Важнейшими объектами цифровой обработки в сетях связи, радиолокации, гидролокации, когнитивных радиосетях и многих других областях являются полосовые сигналы, спектр которых сосредоточен в определенной полосе частот, значительно превышающей нулевую частоту. Выбор схемы дискретизации для полосовых сигналов принципиально отличается от схемы дискретизации для низкочастотных сигналов.

При дискретизации низкочастотных сигналов с ограниченной полосой теорема отсчетов (теорема Котельникова, теорема Уитекера-Котельникова-Шеннона) однозначно определяет минимальное значение частоты эквидистантной дискретизации, обеспечивающей отсутствие наложения спектров (альясинга), формирующихся при периодическом продолжении спектра дис-

стремляя продолжает серию публикаций авторов, посвященных исследованию многоканальной многочастотной субнайквистовой дискретизации полосовых сигналов. При таком подходе в каналах происходит наложение спектров разной степени. Для разработки алгоритмов восстановления искаженных сигналов необходимо глубокое исследование процесса наложения спектров. Исследуется новый способ визуализации положения альясов на оси частот. Метод основан на представлении положений альясов как функции двух переменных, одной из которых является сама частота, а второй – нижняя граница части конечного спектра сигнала, расположенной на положительных частотах. В результате формируется узорчатая структура, в которой периодически (с периодом, равным частоте дискретизации) повторяется некий элементарный паттерн. Изучается структура этого паттерна как функция взаимосвязи между шириной спектра сигнала и частотой дискретизации.

кретизируемого сигнала (рис. 1) [1].

При полосовой дискретизации основой является не максимальная частота дискретизированного сигнала, а ширина его спектра. Выбор частоты дискретизации гораздо сложнее. Это, в частности, объясняется тем, что

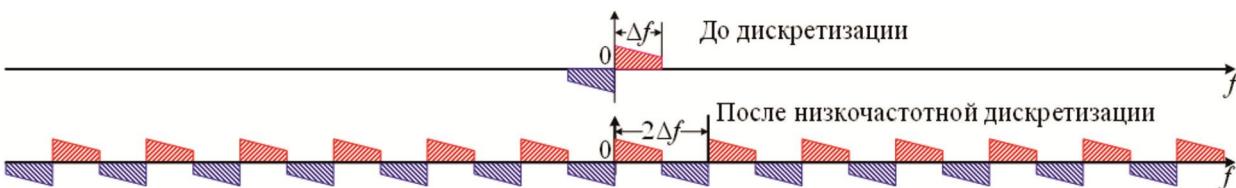


Рис. 1. Преобразование спектра при дискретизации низкочастотных сигналов с частотой $f_s = 2\Delta f$

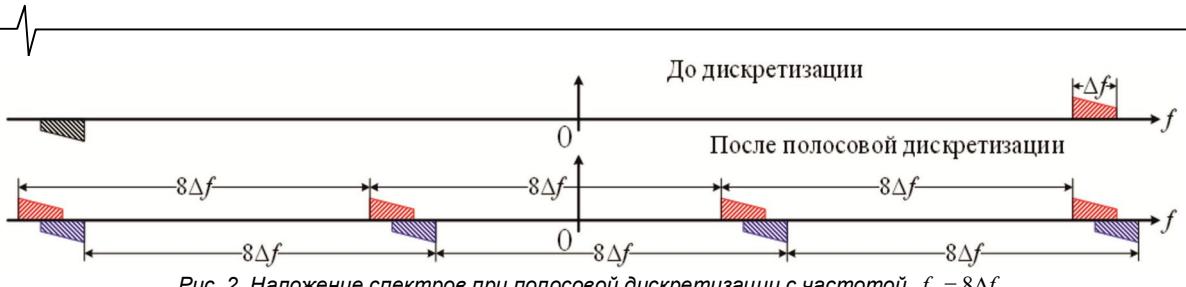


Рис. 2. Наложение спектров при полосовой дискретизации с частотой $f_s = 8\Delta f$

взаимное расположение периодического продолжения как части спектра дискретизируемого аналогового сигнала, расположенной на положительных частотах, так и части его спектра, расположенной на отрицательных частотах, имеет сложную структуру [1] – [3]. При любом соотношении между шириной спектра сигнала и частотой дискретизации возможны такие положения полосы сигнала на оси частот, при которых происходит наложение спектров [1], [2]. На рис. 2 показан пример наличия наложения спектров при частоте дискретизации, превышающей ширину спектра сигнала в восемь раз.

В большом количестве публикаций обсуждаются проблемы определения схемы полосовой дискретизации, обеспечивающей отсутствие наложение спектров при эквидистантной дискретизации [4], при дискретизации комплексной огибающей [5], при дискретизации второго порядка [6], при периодической неэквидистантной дискретизации [7], при случайной дискретизации [8] и многие другие.

Несмотря на длительную историю работ в этой области, проблему нельзя считать полностью решенной. Свидетельством этого является постоянное появление новых публикаций [9] – [14].

Один из подходов к цифровой обработке полосовых сигналов основан на многоканальной дискретизации. В этом случае входной сигнал подвергается в m каналах различным видам предварительной аналоговой обработки с последующей дискретизацией в каждом канале. Такой подход позволяет снизить требуемую теоремой отсчетов частоту дискретизации в m раз. Естественно, что в каждом канале при этом происходит наложение спектров, но используя избыточность, определяемую многоканальностью, сигнал можно восстановить. Л. Фогель показал, что дискретизация сигнала с ограниченной полосой и его производной позволяет снизить частоту дискретизации в два раза [21]. В [22] – [24] этот результат был распространен на дополнительную дискретизацию не только самого сигнала, но и $m-1$ его производных. Обобщенная дискретизация, предложенная А. Папулисом в [25], предполагает в каналах предварительную обработку различными аналоговыми фильтрами

ми. Во всех этих подходах частота эквидистантной дискретизации в каналах одинакова. Недостатком этих подходов является необходимость в дополнительной аналоговой обработке исходного сигнала и высокая сложность восстановления сигнала по его отсчетам.

Авторы статьи в цикле своих работ исследуют возможность использования многоканальной многочастотной субнайквистовой полосовой дискретизации, при которой в каналах имеет место наложение спектра, но, тем не менее, возможно восстановление искаженных сигналов без дополнительной аналоговой обработки с использованием только операций сложения и вычитания [15] – [18]. В отличие от других методов многоканальной дискретизации в данном случае избыточность, компенсирующая уменьшение частоты дискретизации, обеспечивается тем, что во всех каналах частота эквидистантной дискретизации различна. Для разработки алгоритмов восстановления сигналов при этом подходе необходимо глубокое изучение спектра сигналов при полосовой субнайквистовой дискретизации, в том числе при наличии наложения спектров произвольной степени (при наложении спектров n -й степени происходит наложение спектров $n-1$ парциального спектра) [16] – [20]. Данная статья продолжает исследования авторов в этой области. Полученные результаты позволяют однозначно определить спектр сигналов при любых значениях ширины спектра сигнала, при любом положении полосы сигнала на оси частот, при любой частоте эквидистантной дискретизации.

Спектральное 2D представление аналоговых полосовых сигналов

Как известно [1] – [3], спектр полосового аналогового сигнала состоит из двух частей (парциальных спектров, альясов): один альяс на положительных частотах, второй – на отрицательных частотах. Назовем эти части $O(f)$ – исходное изображение и $M(f)$ – зеркальное изображение соответственно (рис. 3, а)). На рисунках в данной статье используется условное изображение комплексного спектра без отдельного изображения его действительной и мнимой части.

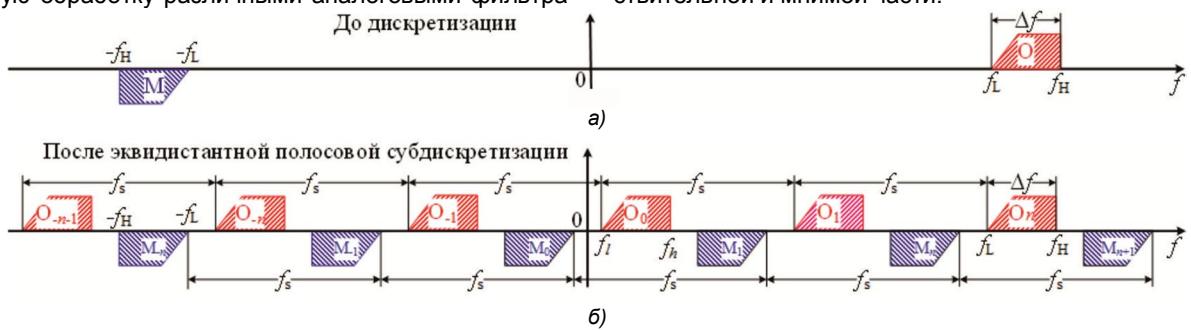


Рис. 3. Преобразование спектра при полосовой дискретизации

Фурье-спектр сигнала можно представить следующим образом:

$$X(f) = F\{x(t)\} = O(f) + M(f), \quad (1)$$

где $F\{\bullet\}$ – преобразование Фурье. Области определения (support, носители) $O(f)$ и $M(f)$ определяются как

$$\text{supp } O(f) = [f_L, f_H] \quad (2)$$

и

$$\text{supp } M(f) = [-f_H, -f_L], \quad (3)$$

где f_L и f_H – нижняя и верхняя границы полосы $O(f)$ соответственно. Если полосовой сигнал действительный, то действительная часть его преобразования Фурье является четной функцией, а мнимая часть – нечетной:

$$\begin{cases} \text{Re } O(f) = \text{Re } M(-f), \\ \text{Im } O(f) = -\text{Im } M(-f). \end{cases} \quad (4)$$

Если сигнал комплексный, то его действительная и мнимая части не являются ни четными, ни нечетными функциями.

В работе нас будут интересовать не значения $O(f)$ и $M(f)$, а только их носитель при разных положениях полосы спектра сигнала на оси частот (рис. 4). Спектр сигнала будем представлять в виде носителя функции трех переменных Δf , f_l и f при фиксированном значении ширины полосы

$$\Delta f = f_H - f_L, \quad (5)$$

где f_L и f_H – некоторые исходные значения нижней и верхней границ полосы сигнала. Под частотой f_l будем понимать все возможные значения нижней границы полосы сигнала с шириной полосы, равной Δf .

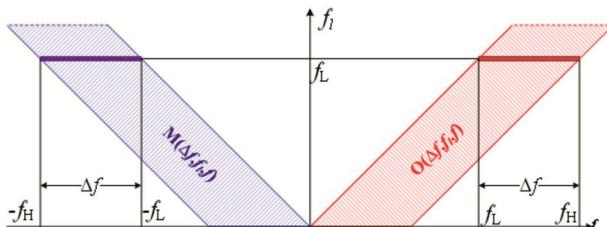


Рис. 4. 2D-представление области определения (носителя) спектра полосового сигнала

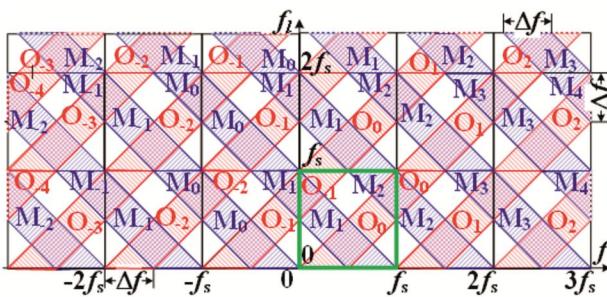


Рис. 5. Носитель спектров полосового сигнала в результате эквидистантной субнайквистовой дискретизации с фиксированной частотой дискретизации f_s и полосой Δf и произвольной частотой f_l

Дискретизация полосовых сигналов

В то время, как спектр аналогового сигнала является аperiодическим, эквидистантная дискретизация приводит к периодическому продолжению частей его спектра

с периодом, равным частоте дискретизации (рис. 3, б)).

На рис. 5 представлен носитель спектра полосового сигнала, формируемого в результате дискретизации с частотой f_s , как функция двух переменных f и f_l с фиксированными параметрами f_s и Δf . Следует отметить, что здесь и ниже масштабы по обеим осям одинаковы.

Итак, спектр дискретизированного сигнала представляет собой периодическую последовательность альясов спектра аналогового сигнала с периодом f_s . Перенумеруем альясы так, чтобы номер альясов $O_i(\bullet)$, для которых нижняя левая граница удовлетворяет условию $0 < f_l \leq f_s$, было равно нулю. Альянс $M_i(\bullet)$ расположен симметрично альянсу $O_i(\bullet)$.

Для упрощения изложения параллелограммы с вершинами $\{(if_s, if_s); ((i+1)f_s, (i+1)f_s); (i+1)f_s + \Delta f, (i+1)f_s; (if_s + \Delta f, if_s)\}$, соответствующие носителям альясов $O_i(\bullet)$, а также параллелограммы с вершинами $\{(if_s, if_s); ((i-1)f_s, (i-1)f_s); ((i-1)f_s - \Delta f, f_s); (if_s - \Delta f, if_s)\}$, соответствующие носителям альясов $M_i(\bullet)$, будем также называть альянсами O_i и M_i соответственно.

В работе для областей наложения спектров приняты обозначения $C_{o_1, o_2, \dots, m_1, m_2, \dots}$, где o_i , m_i – номера перекрывающихся альясов $O_{o_i}(f)$ и $M_{m_i}(f)$ соответственно, α – степень наложения спектров.

Узорчатая природа $\text{supp } X(f, f_l)$

На рис. 5 видно, что 2D-представление $\text{supp } X(f, f_l)$ имеет узорчатый характер. Этот узор имеет периодическую структуру как по оси $0f_l$, так и по оси $0f$. Легко выделить элементарный узор, представляющий собой квадратную структуру со стороной квадрата, равной f_s . Этот узор будем называть паттерном. Границы элементарного узора показаны зеленым цветом на рис. 5.

При этом части соседних альясов $M_2(\bullet)$ и $O_{-1}(\bullet)$ попадают в область, занимаемую элементарным паттерном P . Очевидно, что число таких соседних альясов будет увеличиваться по мере увеличения отношения $\Delta f / f_s$.

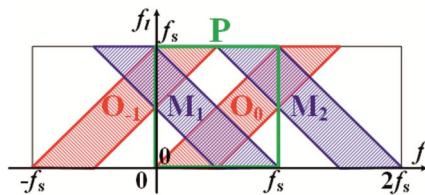


Рис. 6. Пример взаимного расположения элементарного паттерна P и альясов $O_0(\bullet)$, $O_{-1}(\bullet)$, $M_1(\bullet)$ и $M_2(\bullet)$

Рис. 6 иллюстрирует тот факт, что для элементарного паттерна альясы $O_0(\bullet)$ и $M_1(\bullet)$ имеют первостепенное значение. Но они не полностью укладываются в элементарный паттерн P . Альянс $O_0(\bullet)$ частично находится в соседнем справа элементарном паттерне, а альянс $M_1(\bullet)$ – в соседнем слева. В этом примере требуется по одному дополнительному паттерну слева и справа. В общем случае количество дополнительных паттернов с каждой стороны очевидно будет равно

$$n_p = \text{ceil}(\Delta f / f_s), \quad (6)$$

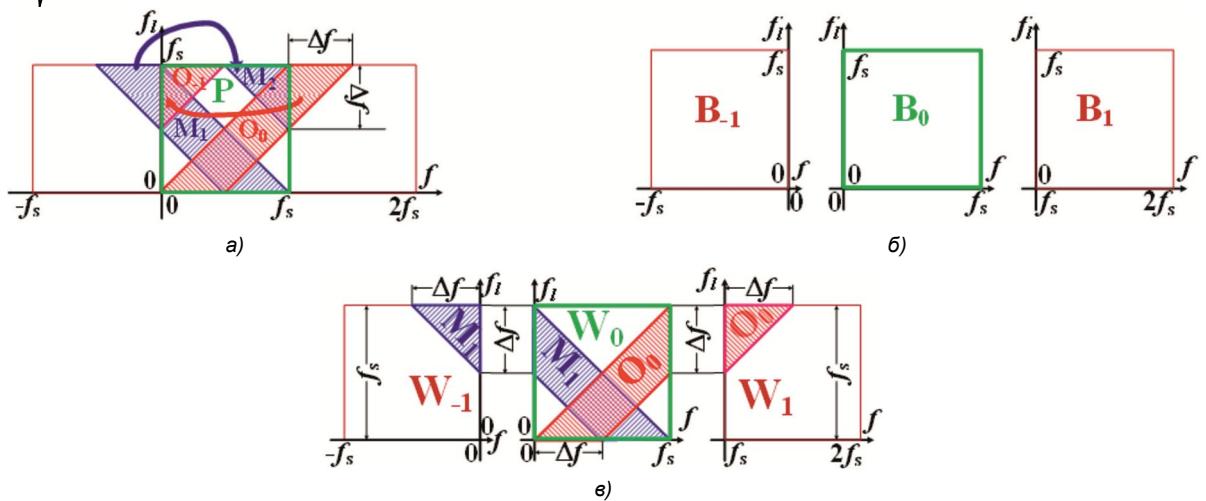


Рис. 7. Процесс формирования элементарного паттерна Р

где $\text{ceil}(\cdot)$ возвращает значение, равное наименьшему целому числу, большему или равному (\cdot).

Рис. 7, а демонстрирует взаимосвязь части $O_0(\cdot)$, не вошедшей в Р, и части $O_{-1}(\cdot)$, вошедшей в Р, а также аналогичный обмен между $M_1(\cdot)$ и $M_2(\cdot)$. Для формализации описания процесса формирования элементарного узора введем области, изоморфные областям, занятым элементарным узором Р и соседними узорами, но не включающие в себя никаких альясов. Назовем их заготовками (blanks) $B_i(\cdot)$. В данном примере это $B_{-1}(\cdot)$, $B_0(\cdot)$, $B_1(\cdot)$ (рис. 7, б))

Далее подготовим заготовки (workpieces) $W_i(\cdot)$ для формирования паттерна Р (рис. 7, в)):

$$W_{-1}(f, f_l) = B_{-1}(f, f_l) \cup (M_1(f, f_l) \cap B_{-1}(f, f_l)), \quad (7)$$

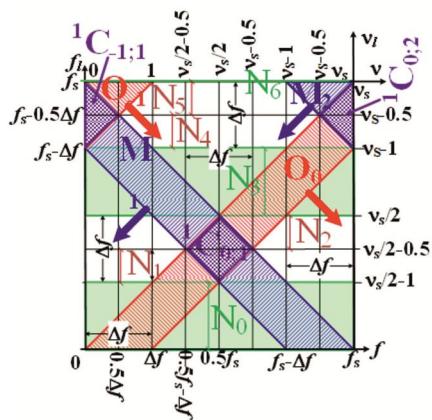
$$W_0(f, f_l) = B_0(f, f_l) \cup (M_1(f, f_l) \cap \cap B_0(f, f_l)) \cup (O_0(f, f_l) \cap B_0(f, f_l)), \quad (8)$$

$$W_1(f, f_l) = B_1(f, f_l) \cup (O_0(f, f_l) \cap B_1(f, f_l)). \quad (9)$$

Здесь и ниже используются следующие символы:
 \cup – символ объединения областей, \cap – символ пересечения областей.

И, наконец, формируем элементарный паттерн Р (рис. 7, в)):

$$P(f, f_l) = W_{-1}(f + f_s, f_l) \cup W_0(f, f_l) \cup W_1(f - f_s, f_l). \quad (10)$$



а) $v_s > 2$

Структурный анализ элементарных паттернов при различных соотношениях между f_s и Δf

Очевидно, структура элементарного паттерна зависит от соотношения между f_s , Δf и f_l . Однако известно [1], [2], что задачи анализа спектра дискретизированных сигналов имеют не три, а две степени свободы. При таком анализе принято нормировать все частоты по ширине спектра. Поэтому определим относительные величины:

$$v = f / \Delta f, \quad (11)$$

$$v_s = f_s / \Delta f, \quad (12)$$

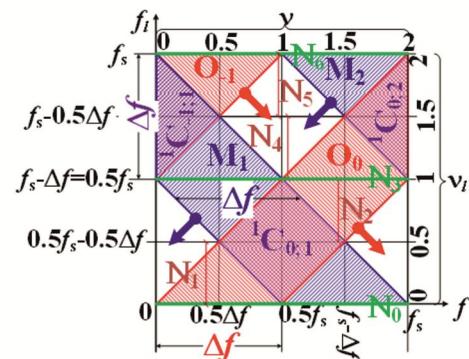
$$v_l = f_l / \Delta f. \quad (13)$$

А. Дискретизация при $v_s > 2$

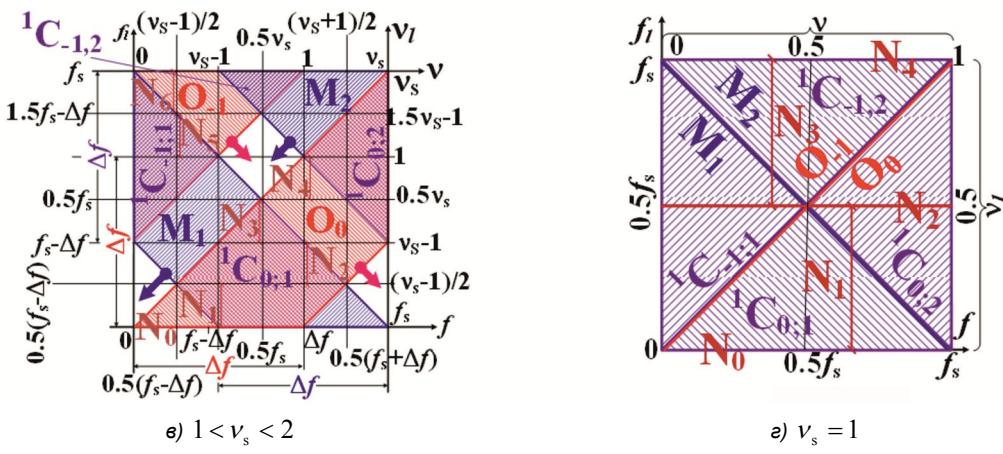
Структура элементарного паттерна для данного значения v_s представлена на рис. 8, а). Для разных значений параметра v_l выделяются следующие области элементарного паттерна (рис. 8, а)):

$$\begin{cases} N_0 : 0 & < v_l \leq v_s / 2 - 1, \\ N_1 : v_s / 2 - 1 & < v_l \leq v_s / 2 - 0.5, \\ N_2 : v_s / 2 - 0.5 & < v_l \leq v_s / 2, \\ N_3 : v_s / 2 & < v_l \leq v_s - 1, \\ N_4 : v_s - 1 & < v_l \leq v_s - 0.5, \\ N_5 : v_s - 0.5 & < v_l < v_s, \\ N_6 : v_s & = v_l. \end{cases} \quad (14)$$

В табл. 1 даются описания преобразованного спектра $X(v, v_l)$ при соответствующих значениях v_l .



б) $v_s = 2$

Рис. 8. Элементарные паттерны при различных значениях v_s Таблица 1. Носитель спектра сигнала после полосовой дискретизации при $v_s > 2$

$X(v, v_l) =$	
<i>Область N_0:</i>	<i>Область N_1:</i>
$= \begin{cases} 0 & \text{если } 0 < v \leq v_l, \\ O_0(v, v_l) & \text{если } v_l < v \leq v_l + 1, \\ 0 & \text{если } v_l + 1 < v \leq v_s - v_l - 1, \\ M_1(v, v_l) & \text{если } v_s - v_l - 1 < v \leq v_s - v_l, \\ 0 & \text{если } v_s - v_l < v \leq v_s. \end{cases}$	$= \begin{cases} 0 & \text{if } 0 < v \leq v_l, \\ O_0(v, v_l) & \text{if } v_l < v \leq v_s - v_l - 1, \\ {}^1C_{0,1}(v, v_l) & \text{if } v_s - v_l - 1 < v \leq v_l + 1, \\ M_1(v, v_l) & \text{if } v_l + 1 < v \leq v_s - v_l, \\ 0 & \text{if } v_s - v_l < v \leq v_s. \end{cases}$
<i>Область N_2:</i>	<i>Область N_3:</i>
$= \begin{cases} 0 & \text{if } 0 < v \leq v_s - v_l - 1, \\ M_1(v, v_l) & \text{if } v_s - v_l - 1 < v \leq v_l, \\ {}^1C_{0,1}(v, v_l) & \text{if } v_l < v \leq v_s - v_l, \\ O_0(v, v_l) & \text{if } v_s - v_l < v \leq v_l + 1, \\ 0 & \text{if } v_l + 1 < v \leq v_s. \end{cases}$	$= \begin{cases} 0 & \text{if } 0 < v \leq v_s - v_l - 1, \\ M(v, v_l) & \text{if } v_s - v_l - 1 < v \leq v_s - v_l, \\ 0 & \text{if } v_s - v_l < v \leq v_l, \\ O(v, v_l) & \text{if } v_l < v \leq v_l + 1, \\ 0 & \text{if } v_l + 1 < v \leq v_s. \end{cases}$
<i>Область N_4:</i>	<i>Область N_5:</i>
$= \begin{cases} {}^1C_{-1,1}(v, v_l) & \text{if } 0 < v \leq v_l - 1 + v_s, \\ M_{1(v, v_l)} & \text{if } v_l - 1 + v_s < v \leq v_s - v_l, \\ 0 & \text{if } v_s - v_l < v \leq v_l, \\ O_0(v, v_l) & \text{if } v_l < v \leq -v_l + 2v_s - 1, \\ {}^1C_{0,2}(v, v_l) & \text{if } -v_l + 2v_s - 1 < v \leq v_s. \end{cases}$	$= \begin{cases} {}^1C_{-1,1}(v, v_l) & \text{if } 0 < v \leq -v_l + v_s, \\ O_{-1}(v, v_l) & \text{if } -v_l + v_s < v \leq v_l + v_s - 1, \\ 0 & \text{if } v_l + v_s - 1 < v \leq -v_l + 2v_s - 1, \\ M_2(v, v_l) & \text{if } -v_l + 2v_s - 1 < v \leq v_l, \\ {}^1C_{0,2}(v, v_l) & \text{if } v_l < v \leq v_s. \end{cases}$

В некоторых областях имеет место наложение спектров первой степени. На рис. 8, а) и ниже красными и синими стрелками показаны направления движения границ при уменьшении v_s .

Б. Дискретизация при $v_s = 2$

Структура элементарного паттерна для данного значения v_s представлена на рис. 8, б). Области для этого паттерна описываются следующим образом:

$$\begin{cases} N_0 : 0 = v_l, \\ N_1 : 0 < v_l \leq 0.5, \\ N_2 : 0.5 < v_l < 1, \\ N_3 : 1 = v_l, \\ N_4 : 1 < v_l \leq 1.5, \\ N_5 : 1.5 < v_l < 2, \\ N_6 : 2 = v_l. \end{cases} \quad (15)$$

В табл. 2 приводятся описания спектра при соответствующих значениях v_l .

На некоторых частотах имеет место наложение спектров первой степени.

В. Дискретизация при $1 < v_s < 2$

Структура элементарного паттерна для данного значения v_s представлена на рис. 8, в). Области для данного паттерна описываются следующим образом:

$$\begin{cases} N_0 : 0 = v_l, \\ N_1 : 0 < v_l \leq 0.5(v_s - 1), \\ N_2 : 0.5(v_s - 1) < v_l \leq v_s - 1, \\ N_3 : v_s - 1 < v_l \leq 0.5v_s, \\ N_4 : 0.5v_s < v_l \leq 1, \\ N_5 : 1 < v_l \leq v_s - 0.5, \\ N_6 : v_s - 0.5 < v_l \leq v_s. \end{cases} \quad (16)$$

В табл. 3 приводятся описания спектра при соответствующих значениях v_l .

Г. Дискретизация при $v_s = 1$

Структура элементарного паттерна для данного значения v_s представлена на рис. 8, в). При уменьшении $v_s \rightarrow 1$ нижняя граница альяса M_1 приближается к неподвижной верхней границе альяса M_0 , а верхняя граница алиаса O_1 приближается к неподвижной нижней границе альяса O_0 . При $v_s = 1$ альяс M_1 смыкается с

$X(v, v_l) =$	
$Область N_0:$ $= \begin{cases} O_0(v, v_l) & \text{if } 0 < v \leq 1, \\ M_1(v, v_l) & \text{if } 1 < v \leq 2. \end{cases}$	$Область N_1:$ $= \begin{cases} 0 & \text{if } 0 < v \leq v_l, \\ O_{0,0}(v, v_l) & \text{if } v_l < v \leq 1-v_l, \\ {}^1C_{0,1}(v, v_l) & \text{if } 1-v_l < v \leq v_l+1, \\ M_{1,0}(v, v_l) & \text{if } v_l+1 < v \leq 2-v_l, \\ 0 & \text{if } 2-v_l < v \leq 2. \end{cases}$
$Область N_2:$ $= \begin{cases} 0 & \text{if } 0 < v \leq 1-v_l, \\ M_1(v, v_l) & \text{if } 1-v_l < v \leq v_l, \\ {}^1C_{0,1}(v, v_l) & \text{if } v_l < v \leq 2-v_l, \\ O_0(v, v_l) & \text{if } 2-v_l < v \leq v_l+1, \\ 0 & \text{if } v_l+1 < v \leq 2. \end{cases}$	$Область N_3:$ $= \begin{cases} M_1(v, v_l) & \text{if } 0 < v \leq 1, \\ O_0(v, v_l) & \text{if } 1 < v \leq 2. \end{cases}$
$Область N_4:$ $= \begin{cases} {}^1C_{-1,1}(v, v_l) & \text{if } 0 < v \leq v_l+1-v_s, \\ M_1(v, v_l) & \text{if } v_l+1-v_s < v \leq 2-v_l, \\ 0 & \text{if } 2-v_l < v \leq v_l, \\ O_0(v, v_l) & \text{if } v_l < v \leq 3-v_l, \\ {}^1C_{0,2}(v, v_l) & \text{if } 3-v_l < v \leq 2. \end{cases}$	$Область N_5:$ $= \begin{cases} {}^1C_{-1,1}(v, v_l) & \text{if } 0 < v \leq 2-v_l, \\ O_{-1}(v, v_l) & \text{if } 2-v_l < v \leq v_l-1, \\ 0 & \text{if } v_l-1 < v \leq 3-v_l, \\ M_2(v, v_l) & \text{if } 3-v_l < v \leq v_l, \\ {}^1C_{0,2}(v, v_l) & \text{if } v_l < v \leq v_s. \end{cases}$
$Область N_6:$ $= \begin{cases} O_{-1}(v, v_l) & \text{if } 0 < v \leq 1, \\ M_2(v, v_l) & \text{if } 1 < v \leq 2. \end{cases}$	

Таблица 3. Носитель спектра сигнала после полосовой дискретизации при $2 > v_s > 1$

$X(v, v_l) =$	
$Область N_0:$ $= \begin{cases} O_0(v, v_l) & \text{if } 0 < v \leq v_s-1, \\ {}^1C_{0,1}(v, v_l) & \text{if } v_s-1 < v \leq 1, \\ M_1(v, v_l) & \text{if } 1 < v \leq v_s. \end{cases}$	$Область N_1:$ $= \begin{cases} 0 & \text{if } 0 < v \leq v_l, \\ O_0(v, v_l) & \text{if } v_l < v \leq v_s-v_l-1, \\ {}^1C_{0,1}(v, v_l) & \text{if } v_s-v_l-1 < v \leq v_l-1, \\ M_1(v, v_l) & \text{if } v_l-1 < v \leq v_s-v_l, \\ 0 & \text{if } v_s-v_l < v \leq v_s. \end{cases}$
$Область N_2:$ $= \begin{cases} 0 & \text{if } 0 < v \leq v_s-v_l-1, \\ M_1(v, v_l) & \text{if } v_s-v_l-1 < v \leq v_l, \\ {}^1C_{0,1}(v, v_l) & \text{if } v_l < v \leq v_s-v_l, \\ O_0(v, v_l) & \text{if } v_s-v_l < v \leq v_l-1, \\ 0 & \text{if } v_l-1 < v \leq v_s. \end{cases}$	$Область N_3:$ $= \begin{cases} {}^1C_{-1,1}(v, v_l) & \text{if } 0 < v \leq v_l+v_s-1, \\ M_1(v, v_l) & \text{if } v_l+v_s-1 < v \leq v_l, \\ {}^1C_{0,1}(v, v_l) & \text{if } v_l < v \leq v_s-v_l, \\ O_0(v, v_l) & \text{if } v_s-v_l < v \leq 2v_s-v_l-1, \\ {}^1C_{0,2}(v, v_l) & \text{if } 2v_s-v_l-1 < v \leq v_s. \end{cases}$
$Область N_4:$ $= \begin{cases} {}^1C_{-1,1}(v, v_l) & \text{if } 0 < v \leq v_l+v_s-1, \\ M_1(v, v_l) & \text{if } v_l+v_s-1 < v \leq v_s-v_l, \\ 0 & \text{if } v_s-v_l < v \leq v_l, \\ O_0(v, v_l) & \text{if } v_l < v \leq 2v_s-v_l-1, \\ {}^1C_{0,2}(v, v_l) & \text{if } 2v_s-v_l-1 < v \leq v_s. \end{cases}$	$Область N_5:$ $= \begin{cases} {}^1C_{-1,1}(v, v_l) & \text{if } 0 < v \leq v_s-v_l, \\ O_{-1}(v, v_l) & \text{if } v_s-v_l < v \leq v_l+v_s-1, \\ 0 & \text{if } v_l+v_s-1 < v \leq 2v_s-v_l-1, \\ M_2(v, v_l) & \text{if } 2v_s-v_l-1 < v \leq v_l, \\ {}^1C_{0,2}(v, v_l) & \text{if } v_l < v \leq v_s. \end{cases}$
$Область N_6:$ $= \begin{cases} {}^1C_{-1,1}(v, v_l) & \text{if } 0 < v \leq v_s-v_l, \\ O_{-1}(v, v_l) & \text{if } v_s-v_l < v \leq 2v_s-v_l-1, \\ {}^1C_{-1,2}(v, v_l) & \text{if } 2v_s-v_l-1 < v \leq v_l+v_s-1, \\ M_2(v, v_l) & \text{if } v_l+v_s-1 < v \leq v_l, \\ {}^1C_{0,2}(v, v_l) & \text{if } v_l < v \leq v_s. \end{cases}$	

альясом M_0 , а альяс O_{-1} – с O_0 . При любых значениях n_l в спектре дискретизуемых сигналов при $v_s \leq 1$ на любой частоте будет иметь место алиасинг. При $v_s = 1$ вся поверхность элементарного паттерна покрывается четырьмя смежными составными частями в виде прямоугольных треугольников:

$$\begin{cases} {}^1C_{0;1} = O_0 \cap M_1, \\ {}^1C_{0;2} = O_0 \cap M_2, \\ {}^1C_{-1;1} = O_{-1} \cap M_1, \\ {}^1C_{-1;2} = O_{-1} \cap M_2. \end{cases} \quad (17)$$

При дальнейшем уменьшении v_s альяс M_2 начинает пересекаться с альясом M_1 , а O_{-1} – с O_0 . Одновременно элементарный паттерн Р начинает пересекаться с альясами M_3 и O_{-2} , которые ведут себя при уменьшении v_s аналогично альясам M_2 и O_{-1} .

Д. Дискретизация при $1/(m+1) < v_s < 1/m$, где $m \in \mathbb{N}$

Структура элементарного паттерна для некоторого значения v_s из указанного интервала представлена на рис. 9.

Структура паттерна одинакова для всех m . Структура такая же, как для структуры на рис. 8, в). Разница заключается в степени алиасинга.

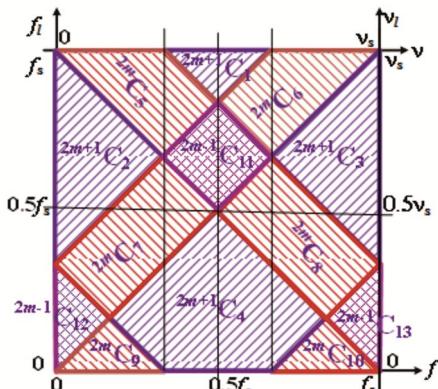


Рис. 9. Элементарный паттерн при $1/(m+1) < v_s < 1/m$ ($m \in \mathbb{N}$)

Заключение

В статье исследуется новый подход авторов к представлению эффектов субнайквистовой дискретизации полосовых сигналов. Подход основан на изучении взаимного расположения альясов, образующихся в результате равномерной субнайквистовой дискретизации. При этом допускается наложение спектров произвольной степени. Такое углубленное исследование необходимо для разработки алгоритмов анализа сигналов с использованием многоканальной многочастотной субнайквистовой дискретизации. Новый подход основан на представлении произвольного частотного положения альясов как функции двух переменных. Одна переменная – это фактическая частота f , а другая – нижняя граница части спектра дискретизированного сигнала, расположенной на положительных частотах f_l . Такое представление приводит к образованию узорчатой структуры. Эта структура образуется за счет периодического повторения определенного элементарного паттерна вдоль обеих осей плоскости (f, f_l) . Поэтому достаточно изучить

только эту закономерность. Структура этого паттерна была проанализирована при различных соотношениях ширины спектра и частоты дискретизации.

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда № 23-29-00864, <https://rscf.ru/project/23-29-00864/>.

Литература

1. Marks R.J. The Joy of Fourier: Analysis, Sampling Theory, Systems, Multidimensions, Stochastic Processes, Random Variables, Signal Recovery, POCS, Time Scales, and Applications. Baylor University, 2006. 796 p.
2. Eldar Y.C. Sampling theory: Beyond bandlimited systems. Cambridge: Cambridge University Press, 2015. 836 p.
3. Lyons R.G. Understanding digital signal processing. 3rd ed. Upper Saddle River: Pearson Education, 2011. 954 p.
4. Brown J. First-order sampling of bandpass signals – A new approach (Corresp.). IEEE Transactions on Information Theory. 1980, vol. 26, no. 5, pp. 613-615.
5. Del Re E. Bandpass signal filtering and reconstruction through minimum-sampling-rate digital processing. Alta Frequenza. 1978, vol. 47, no. 9, pp. 675-678.
6. Kohlenberg A. Exact interpolation of band-limited functions. Journal of Applied Physics. 1953, vol. 24, no. 12, pp.1432-1436.
7. Scoluar S. C., Fitzgerald W. J. Periodic nonuniform sampling of multiband signals. Signal Processing. 1992, vol. 28, no. 2, pp. 195-200.
8. Marvasti F. Nonuniform Sampling: Theory and Practice. New York: Kluwer, 2001. 950 p.
9. Kwan C. Issues and new results on bandpass sampling. Electronics. 2024, vol. 13, no. 280.
10. Shtendel G., Florescu D., Bhandari A. Unlimited sampling of bandpass signals: Computational demodulation via undersampling. IEEE Transactions on Signal Processing. 2023, vol. 71, pp. 4134-4145.
11. Z. Liu Z., Feng X., Chen S. Time encoding sampling of bandpass signals. Proceedings of 31st European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2023), Helsinki, Finland, 2023, pp. 1898-1902.
12. Wahab M., Levy B.C. Direct complex envelope sampling of bandpass signals with M-channel time-interleaved ADCs. IEEE Transactions on Signal Processing. 2022, vol. 70, pp. 4804-4819.
13. Wahab M., Levy B.C. Quadrature filter approximation for reconstructing the complex envelope of a bandpass signal sampled directly with a two-channel TIADC. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs. 2022, vol. 69, no. 6, pp. 3017-3021.
14. Zou L., Dempster A.G. Multiband quadrature bandpass sampling. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2022, vol. 58, no. 3, pp. 2083-2092.
15. Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. Undersampled spectrum reconstruction using multichannel multifrequency sampling. Proceedings of 8th Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO 2019), Budva, Montenegro, 10 – 14 June 2019, 4 p.
16. Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. Aliasing's study on bandpass sampling. Proceedings of Conference on

Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO 2022), Arkhangelsk, Russian Federation, 29 June – 01 July 2022, 6 p.

17. Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A., Dubovcev D. Sub-Nyquist bandpass sampling. Proceedings of 25th International Conference on Digital Signal Processing and its Applications (DSPA 2023), Moscow, Russian Federation, 29 – 31 March 2023, 6 p.

18. Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A., Dubovcev D. Analysis of high-order aliasing in bandpass sub-Nyquist sampling. Proceedings of Conference on Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO 2023), Pskov, Russian Federation, 28 – 30 June 2023, 9 p.

19. Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A., Metelyov A. Sub-Nyquist sampling of bandpass signals. Proceedings of 2024 Conference on Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications. Moscow, Russian Federation, 12 – 14 March 2024, 9 p.

20. Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A., Metelyov A. Structural Analysis of Sub-Nyquist Sampling Patterns of Bandpass Signals. Proceedings of 26th International Conference on Digital Signal Processing and its Applications (DSPA 2024), Moscow, Russian Federation, 27 – 29 March 2024, 6 p.

21. Fogel L.J. A note on the sampling theorem. IRE Transactions on Information Theory. 1955, vol. IT-1, no. 1, pp. 47-48.

22. Jagerman D., Fogel L. Some general aspects of the sampling theorem. IRE Transactions on Information Theory. 1956, vol. 2, no. 4, pp. 139-146.

23. Nathan A. On sampling a function and its derivatives. Information and Control, 1973, vol. 22, no. 2, pp. 172-182.

24. Priyanka K., Selvan A.A. Derivative sampling expansions in shift-invariant spaces with error estimates covering discontinuous signals. arXiv:2402.08977v1, 2024, 14 февраля, 34 c.

25. Papoulis A. Generalized sampling expansion. IEEE Transactions on Circuits and Systems. 1977, vol. 24, no. 11, pp. 652-654.

Уважаемые коллеги!

Приглашаем Вас принять участие

в Московской микроволновой неделе,

которая пройдёт 25-29 ноября 2024 г.

в ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН и ЦНИРТИ им. Берга (закрытая часть)

В рамках **Московской микроволновой недели** пройдут две научно-технические конференции:

1. IX Всероссийская микроволновая конференция

Официальный сайт: <http://microwaveweek.ru/rmc/>

Общая тематика:

- радиолокация: принципы, методы, системы;
- радиосвязь: теория, методы, системы,
- цифровая обработка сигналов в радиолокации и радиосвязи;
- распространение и рассеяние электромагнитных волн;
- антенные системы и линии передач;
- генераторы и усилители;
- приемные устройства;
- техника СВЧ, КВЧ и ТГц диапазонов;
- радиоизмерения и новые материалы

Даты проведения: 25-29 ноября 2024 г.

Труды (тезисы докладов) представляются на английском языке.

Получившие положительные заключения рецензентов тезисы запланированы к опубликованию в *IEEE Xplore Digital Library*(индексация *Scopus*)

Срок подачи заявок и тезисов докладов: до 13 октября 2024 г.

Ученый секретарь конференции Юсупов Ренат Альбертович

Тел.: 8-495-629-34-18

2. XVI Всероссийская конференция «Радиолокация и радиосвязь»

(закрытая часть)

Даты проведения: 27 ноября 2024 г.

Труды (тезисы докладов) представляются на русском языке.

Срок подачи заявок: до 15 октября 2024 г.

Срок подачи презентаций и тезисов докладов: до 31 октября 2024 г.

Ученый секретарь конференции Карев Виктор Викторович

Тел.: 8-916-352-48-50