УДК 654.16

ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЗАДОВА-ЧУ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ НА ПЛИС

Мирошин Н.М., *студент 2-го курса магистратуры Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева, e-mail: miroshin_n3@mail.ru*

Котков С.В., *студент 2-го курса магистратуры Нижегородского государственного технического университета, инженер Учебно-научного центра микроэлектроники Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева, e-mail: sergo.kotkov@mail.ru*

Грачёв И.А., *студент 4-го курса специалитета Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е.Алексеева, e-mail: grach_i02@mail.ru*

Кузин А.А., *ведущий инженер кафедры информационных радиосистем Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева, e-mail: kuzin_alex@nntu.ru*

Приблудова Е.Н., *к.т.н., доцент, заведующий кафедрой информационных радиосистем Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева, e-mail: pribludova@nntu.ru*

Маврычев Е.А., *к.т.н., профессор кафедры информационных радиосистем Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева,. e-mail: mavrychev.eugene@mail.ru*

OPTIMIZATION OF ZADOFF-CHU SEQUENCE’S CALCULATION IN THE FREQUENCY DOMAIN FOR IMPLEMENTATION IN FPGA

Miroshin N.M., Kotkov S.V., Grachev I.A., Kuzin A.A., Pribludova E.N., Mavrychev E.A.

The article deals with optimization of Zadoff-Chu sequence’s calculation in the frequency domain in order to accelerate it and to implement in FPGA. An application-efficient fast algorithm is presented that allows to generate samples of Zadoff-Chu sequence in frequency domain each clock cycle.

Key words: Zadoff-Chu sequence (ZC), generation in frequency domain, optimization, LTE communication standart, generation’s scheme.

Рассмотрено преобразование вычислений последовательности Задова-Чу в частотной области с целью их ускорения и дальнейшей реализации на ПЛИС. Представлен аппаратно-эффективный быстрый алгоритм, позволяющий каждый такт синхронизации генерировать отсчеты последовательности Задова-Чу в частотной области.

Ключевые слова: последовательность Задова-Чу (ZC), генерация в частотной области, оптимизация, стандарт связи LTE, схема генерации.

Введение

В настоящее время стандарт беспроводной высокоскоростной передачи данных LTE (Long Term Evolution) является одним из самых широко используемых. Его разрабатывает международный консорциум 3GPP (3rd Generation Partnership Project). Основные положения сформулированы в [1, 2]. В спецификации 3GPP [3] подробно описаны все физические каналы технологии LTE, в том числе PRACH (Physical Random Access Channel). Его функциональное назначение – это передача запросов на доступ к сети от пользователей к базовой станции. В качестве запроса пользователь посылает преамбулу, состоящую из циклического префикса и последовательности Задова-Чу, свойства которой рассмотрены в [4-7]. Пользователь, кроме корневой последовательности Задова-Чу, может передавать одну из копий, циклически сдвинутых относительно корневой. В задачу детектора входит обнаружение передаваемой последовательности.

Формирование и обработка сигналов в частотной области широко используется в алгоритмах цифровой обработки для снижения вычислительных затрат. Например, для вычисления циклической взаимной корреляционной функции (ВКФ) наиболее эффективным является алгоритм с использованием быстрого преобразования Фурье (БПФ) [8], что существенно экономит ресурсы ПЛИС. Значения циклической ВКФ получаются в результате обратного БПФ, примененного к поэлементному произведению Фурье-образа принимаемой последовательности и комплексно-сопряженного Фурье-образа опорной последовательности, формируемой в детекторе.

Формирование сигналов в частотной области также позволяет снизить вычислительные затарты. Формирование последовательности Задова-Чу в частотной области рассматривается в работах [9, 10]. Однако, применение БПФ к опорной временной последовательности Задова-Чу, для получения Фурье-образов, сопряжено с определенными трудностями, поскольку длина последовательности, применяемой в стандарте LTE [3], составляет 139 или 839 отсчетов и является простым числом. Существует возможность вычисления последовательности Задова-Чу в частотной области без использования БПФ [9].

В статье рассматривается преобразование вычислений последовательности Задова-Чу в частотной области с целью их ускорения и дальнейшей реализации на ПЛИС. В [9] алгоритм оптимизировался для реализации на базе микропроцессорной системы и, соответственно, не подходит для реализации на ПЛИС. В [10] алгоритм разрабатывался с применением CORDIC, что привело к уменьшению скорости генерации, при этом он не позволяет генерировать последовательность с циклическим сдвигом. Данная статья предлагает алгоритм, разработанный под ПЛИС и позволяющий генерировать отсчеты каждый такт синхросигнала с циклическим сдвигом.

Математическая модель последовательности Задова-Чу

В общем случае, исходя из [10], последовательность Задова-Чу определяется по следующей формуле

$$x_u(n)=\begin{cases}\exp\left(-j\dfrac{2\pi u}{N}\dfrac{n(n+2q)}{2}\right),\ N-\textit{четное},\\ \exp\left(-j\dfrac{2\pi u}{N}\dfrac{n(n+1+2q)}{2}\right),\ N-\textit{нечетное},\end{cases}\qquad(1)$$

где n – номер отсчета во временной области; N – количество отсчетов ZC-последовательности; u – положительное целое число (называемое индексом или корнем последовательности); q – произвольное целое число.

В данной статье рассматривается только класс последовательности Задова-Чу с $q = 0$, и $N = N_{zc}$ = 839 либо 139, так как именно данный класс указан в спецификации [3]. Таким образом, формула (1) преобразуется в формулу

$$x_u(n)=\exp\left(-j\pi u\frac{n(n+1)}{N_{zc}}\right).\qquad(2)$$

С целью увеличения количества последовательностей в [3] применяются циклические сдвиги. Для получения таких последовательностей используется формула

$$x_{u,v}(n)=x_u((n+C_v)modN_{zc}),\qquad(3)$$

где C_v – циклический сдвиг; mod – операция взятия остатка от деления.

Можно остановиться на (3) и после генерации последовательности осуществлять преобразование Фурье. Однако данное решение потребовало бы большого количества ресурсов и увеличения времени генерации. При этом необходимо делать преобразование Фурье от последовательности длиной 839 и 139. Таким образом, прямой метод реализации генератора последовательности Задова-Чу в частотной области является не оптимальным с точки зрения затрачиваемых ресурсов. Поэтому для получения последовательности в частотной области было решено применить формулу (4), которая использовалась в [9] и [10]

$$X_{u,v}(k)=X_u(0)x^*_{u,v}(u^{-1}k),\qquad(4)$$

где k – номер отсчёта в частотной области; $X_u(0)$ – нулевой отсчет последовательности в частотной области; u^{-1} – мультипликативное обратное, которое удовлетворяет выражению $(uu^{-1})modN_{zc}\equiv 1$.

Далее в статье рассмотрено преобразование формулы (4) с целью ее реализации на ПЛИС.

Преобразование вычислений

Циклический сдвиг можно вынести в качестве множителя, как показано в [9]. Таким образом, формулу (4) можно преобразовать в выражение

$$X_{u,v}(k)=X_u(k)\exp\left(j\frac{2\pi kC_v}{N_{zc}}\right).\qquad(5)$$

Распишем первый множитель выражения (5), а именно $X_u(k)$, через формулу (4), в которой циклический сдвиг приравняем к нулю. Таким образом получится следующее выражение

$$X_{u,v}(k)=X_u(0)x^*_u(u^{-1}k)\exp\left(j\frac{2\pi kC_v}{N_{zc}}\right).\qquad(6)$$

Последние два множителя в формуле (6) можно преобразовать следующим образом

$$\begin{aligned}&x^*_u(u^{-1}k)\exp\left(j\frac{2\pi kC_v}{N_{zc}}\right)=\\&=\exp\left(\frac{j\pi}{N_{zc}}\left(uu^{-1}k\left(u^{-1}k+1\right)\right)\right)\exp\left(\frac{j\pi}{N_{zc}}2uu^{-1}kC_v\right)=\\&=\exp\left(\frac{j\pi}{N_{zc}}\left(uu^{-1}k\left(u^{-1}k+1\right)+2uu^{-1}kC_v\right)\right)=\\&=\exp\left(\frac{j\pi}{N_{zc}}\left(uu^{-1}k\left(u^{-1}k+1+2C_v\right)\right)\right).\end{aligned}\qquad(7)$$

Так как комплексная экспонента – это периодическая функция с периодом 2π, то формулу (7) можно переписать в следующем виде

$$\begin{aligned}&\exp\left(\frac{j\pi}{N_{zc}}\left(uu^{-1}k\left(u^{-1}k+1+2C_v\right)\right)\right)=\\&=\exp\left(\frac{j\pi}{N_{zc}}\left[\left(uu^{-1}k\left(u^{-1}k+1+2C_v\right)\right)mod\left(2N_{zc}\right)\right]\right).\end{aligned}\qquad(8)$$

Используя (8), формулу (6) можно представить как

$$\begin{aligned}&X_{u,v}(k)=\\&=X_u(0)\exp\left(\frac{j\pi}{N_{zc}}\left[\left(uu^{-1}k\left(u^{-1}k+1+2C_v\right)\right)mod\left(2N_{zc}\right)\right]\right).\end{aligned}\qquad(9)$$

Для реализации формулы (9) в ПЛИС под корень u, мультипликативное обратное u^{-1}, номер отсчета k, циклический сдвиг C_v выделяется по 10 бит (так как их максимальное значение 839). Таким образом остаток от деления будет браться от 55 битного числа по основанию $2N_{zc}$. Такой вариант займет большое количество ресурсов. При этом присутствует операция взятия остатка от деления, что является сложной операцией, поэтому необходимо дальнейшее упрощение.

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned}&\theta_u(k)=(uu^{-1}k(u^{-1}k+1+2C_v))\bmod(2N_{zc}),\\&\varphi_u(k)=(k(u^{-1}k+1+2C_v))\bmod(2N_{zc}).\end{aligned}\qquad(10)$$

Степень экспоненты можно записать следующим образом, воспользовавшись (10)

$$\theta_u(k)=((uu^{-1})\bmod(2N_{zc})\times\varphi_u(k))\bmod(2N_{zc}).\qquad(11)$$

Результат выражения $(uu^{-1})\bmod(2N_{zc})$, исходя из свойства мультипликативного обратного, может быть равен либо 1, либо N_{zc} +1. Причем если uu^{-1} четное, то результат операции равен N_{zc}+1, в противном случае 1. Чтобы uu^{-1} было четное, необходимо, чтобы хотя бы один из множителей был четным.

Рассмотрим второй множитель выражения (11). Если u^{-1} нечетное, то при любых значениях k и C_v результат будет четным. Если u^{-1} четное, то за четность результата отвечает значение k.

Таким образом, если результат выражения $(uu^{-1})\bmod(2N_{zc})$ равен 1, то данное выражение никак не повлияет на вычисление и поэтому его можно будет пропустить. При этом u^{-1} нечетное и результат второго множителя в выражении (11) всегда будет четным.

Если в выражении $(uu^{-1})\bmod(2N_{zc})$ хотя бы один множитель четный, то результат равен N_{zc} +1. Если u^{-1} нечетное, то результат второго множителя в выражении (11) всегда будет четным, это позволит не использовать вычисления первого множителя. Если u^{-1} четное, то четность второго множителя в выражении (11) зависит от четности k. Соответственно, если второй множитель в выражении (11) четный, то первый множитель никак не повлияет на результат. Однако, если он нечетный, то ко второму множителю необходимо добавить N_{zc}.

Рассмотренные преобразования представлены в табл. 1.

Исходя из вышесказанного выражение (11) можно упростить. Данное упрощение приведено в формуле

$$\theta_u(k) = \begin{cases} \varphi_u(k), \text{ если } \varphi_u(k) \text{ четное;} \\ (\varphi_u(k)+N_{zc})\bmod(2N_{zc}), \text{ если } \varphi_u(k) \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (12)$$

Перейдем к функции $(\varphi_u(k)$. Так как отсчеты идут последовательно, то приращение можно представить следующим образом

$$\begin{aligned} &\Delta\varphi_u(k) = \varphi_u(k) - \varphi_u(k-1) = k(u^{-1}k+1+2C_v) - \\ &-(k-1)(u^{-1}(k-1)+1+2C_v) = k(u^{-1}k+1+2C_v) - \\ &-k(u^{-1}k+1+2C_v) + u^{-1}k + (u^{-1}(k-1)+1+2C_v) = \\ &= u^{-1}k + u^{-1}(k-1)+1+2C_v = u^{-1}(k-1)+u^{-1} + \\ &+u^{-1}(k-1)+1+2C_v = 2u^{-1}(k-1)+u^{-1}+1+2C_v. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя (13), $\varphi_u(k)$ можно переписать в следующем виде

$$\varphi_u(k) = \begin{cases} 0, \text{ если } k = 0, \\ (\varphi_u(k-1) + \Delta\varphi_u(k)) mod(2N_{zc}), \text{ в ост. случ.} \end{cases} \quad (14)$$

Используя формулы (9), (12) и (14), можно реализовать схему генерации последовательности Задова-Чу в частотной области, которая представлена на рис. 1.

Схема генерации последовательности в частотной области

Данная схема принимает на вход: корень последовательности u, длину последовательности, которая зависит от сигнала format (N_{zc} = 839 для format = 0 и N_{zc} = 139 для format = 1), циклический сдвиг C_v и сигнал запуска генерации последовательности start_ZC. На выходе формируется строб Valid и данные последовательности Data.

Для всех последовательностей нулевые отсчеты в частотной области x_0 заранее рассчитываются и хра

Таблица 1. Преобразование вычислений

u	u^{-1}	$(uu^{-1})\bmod(2N_{zc})$	k	$\varphi_u(k)$	Замена умножения $(uu^{-1})\bmod(2N_{zc})$
Четное	Четное	$N_{zc}+1$	Четное	Четное	+ 0
Четное	Четное	$N_{zc}+1$	Нечетное	Нечетное	$+N_{zc}$
Четное	Нечетное	$N_{zc}+1$	Четное	Четное	+ 0
Четное	Нечетное	$N_{zc}+1$	Нечетное	Четное	+ 0
Нечетное	Четное	$N_{zc}+1$	Четное	Четное	+ 0
Нечетное	Четное	$N_{zc}+1$	Нечетное	Нечетное	$+N_{zc}$
Нечетное	Нечетное	1	Четное	Четное	+ 0
Нечетное	Нечетное	1	Нечетное	Четное	+ 0

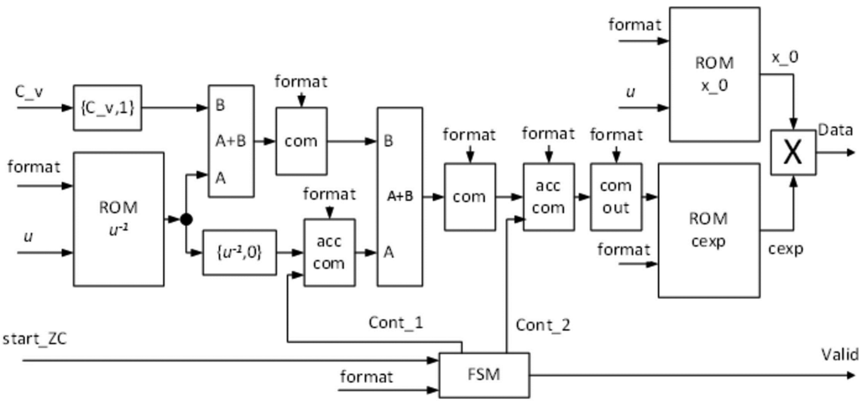

Рис. 1. Схема генерации последовательности Задова-Чу в частотной области

нятся в памяти. Всего существует 838 + 138 = 976 корней, для которых необходимо сгенерировать такие отсчеты. Для хранения одного отсчета используется 32 бита. Номер корня u и format выступают в качестве адреса для ROM.

Мультипликативное обратное u^{-1} для каждого корня последовательности рассчитывается заранее и хранится в памяти, общее их количество составляет 838 + 138 = = 976. Для хранения одного мультипликативного обратного требуется 10 бит. Номер корня и format выступают в качестве адреса для ROM.

Так как экспонента периодическая функция с периодом 2π, то для генерации любой последовательности потребуется 2 × 139 + 2 × 839 = 1956 заранее рассчитанных значений. Для хранения каждого отсчета потребуется 32 бита. В [10] рассмотрен вариант замены таблицы экспонент на CORDIC, однако для текущей реализации табличный метод намного выгодней.

Блок com проверяет входное число на превышение порога. Если оно больше или равно $2N_{zc}$, то на выход передается входное число, из которого вычитается $2N_{zc}$, в противном случае сигнал со входа передается на выход. Схема блока com представлена на рис. 2.

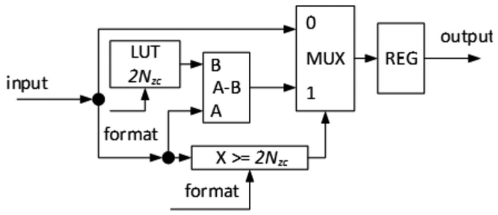

Рис. 2. Схема блока com

Блок acc com каждый такт суммирует выходной сигнал с входным. Если результат больше или равен $2N_{zc}$, то на выход передается входное число, просуммированное с предыдущим, из которого вычитается $2N_{zc}$, в противном случае из суммы результат не вычитается. Если сигнал Con = 0, на выходе REG ноль, в противном случае регистр работает в обычном режиме, это необходимо для перехода к новому циклу вычисления. На рис. 3 подробно расписан данный блок.

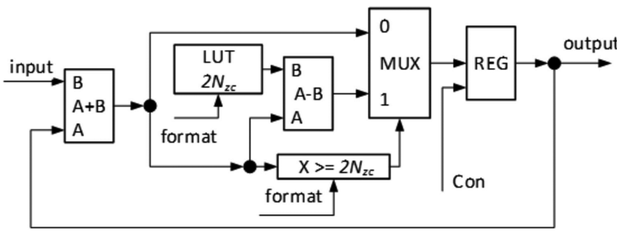

Рис. 3. Схема блока acc com

Блок com out проверяет входной сигнал на четность. Если входной сигнал четный, то он передается на выход. В противном случае к входному сигналу прибавляется N_{zc}, если результат больше или равен $2N_{zc}$, то из результата вычитается $2N_{zc}$ и данный сигнал подается на выход. Если результат сложения не превышает $2N_{zc}$, то результат передается на выход. На рис. 4 подробно представлен блок com out.

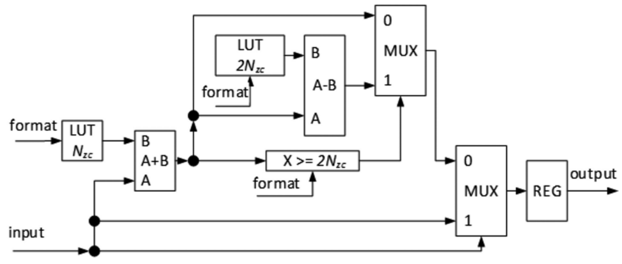

Рис. 4. Схема блока com out

В табл. 2 представлены количество ресурсов в ПЛИС, требующихся для реализации данной схемы.

Таблица 2. Занимаемые ресурсы

Наименование	*Количество*
Flip-Flops	77
LUTs	186
Block RAM Blocks	7
DSP	3

Заключение

В данной статье разработан аппаратно-эффективный быстрый алгоритм, позволяющий каждый такт синхронизации генерировать отсчеты последовательности Задова-Чу в частотной области. Предложенный алгоритм оптимизирован для реализации на ПЛИС. Представлена высокоскоростная генерация последовательности с циклическим сдвигом, в которой вместо алгоритма вычислений CORDIC используется табличная реализация вычислений.

Литература

1. Системы и сети радиодоступа 4G: LTE, WiMAX / А.Е. Рыжков, М.А. Сиверс, В.О. Воробьев, А.С. Гусаров, А.С. Слышков, Р.В. Шуньков. СПб: Линк, 2012. 226 с.: ил.

2. LTE-the UMTS long term evolution: from theory to practice / Stefania Sesia, Issam Toufik, Matthew Baker. 2nd ed.

3. 3GPP TS 36.211 «Physical Channels and Modulation (Release 15)» v15.10.0.

4. Киселева Т.П. Использование последовательностей Задова-Чу для синхронизации по корреляционной кривой циклического префикса OFDM-символов LTE технологии. Цифровая обработка сигналов, № 1, 2020, 13-17 с.

5. Киселева Т.П. Расчет времени вхождения в синхронизм на этапе синхронизации по циклическому префиксу символов в технологии LTE OFDMA. Цифровая обработка сигналов, № 4, 2020, 43-48 с.

6. Киселева Т.П. Алгоритм синхронизации сотовой базовой станции с мобильным пользователем по корреляционной функции первичного синхросигнала в технологии LTE. Цифровая обработка сигналов, № 2, 2020, 34-40 с.

7. Киселева Т.П. Исследование свойств циклической автокорреляционной функции последовательности Задова-Чу в зависимости от характеристик квантования элементов последовательности. Цифровая обработка сигналов, № 4, 2018, 40-44 с.

8. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов: Пер.с англ. М.: Мир, 1989. 448 с., ил.

9. Pei-Zhe XIN1, Yu-Qi LV2,a , Lan SU3 and Yu-Dong WANG. Random Access Preamble Generation with Low Storage for LTE Networks. ITM Web of Conferences 11. 2007.

10. Mohammad M.M. Optimized Architecture for Computing Zadoff-Chu Sequences with Application to LTE. GLOBECOM. 2009.