

ДВУМЕРНЫЕ БЫСТРЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ С ВАРЬИРУЕМЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Пономарева О.В., д.т.н., профессор Ижевского государственного технического университета им. М.Т. Калашникова, e-mail: ponva@mail.ru;

Пономарев А.В., к.э.н., доцент Ижевского государственного технического университета им. М.Т. Калашникова, e-mail: palexizh@gmail.com;

Пономарева Н.В., к.т.н., доцент Севастопольского государственного университета, e-mail: yolkany@gmail.com

TWO-DIMENSIONAL FAST FOURIER TRANSFORM WITH VARIABLE PARAMETERS

Ponomareva O.V., Ponomarev A.V., Ponomareva N.V.

The development of information technologies has significantly expanded the scope of application of digital Fourier processing of finite discrete signals. Among them are such subject areas as tomography, active and passive sonar, radar, seismology, technical diagnostics, medicine, forensic cybernetics, and artificial intelligence. The complication of problems solved by digital Fourier processing in information technology has stimulated the transition from one-dimensional digital Fourier processing. A systematic analysis of the transition from the one-dimensional discrete Fourier transform (DFT) to the two-dimensional discrete Fourier transform (2D DFT) showed that, firstly, such a transition is far from trivial and, secondly, the transition is primarily qualitative, not quantitative character. At the same time, the generalization of the results of the two-dimensional case to the multidimensional one, as a rule, does not cause difficulties, since it is mainly quantitative, not qualitative. As is known, for the practical application of Fourier processing methods, expanding the scope of their application, an important role belongs to the procedures for the rapid implementation of the corresponding Fourier transforms. The story of the FFT algorithm, proposed in 1965, is a vivid confirmation of this. The article deals with the solution of an important and urgent problem of developing fast algorithms for implementing a new discrete Fourier transform: a two-dimensional discrete Fourier transform with variable parameters (2D DFT-WT). In this paper, the following three groups of methods for improving the speed of 2D DFT-WT are proposed and studied. The first group of methods for improving the speed of 2D DFT-WT is based on the separability property of the core of 2D DFT-WT and the use of one-dimensional parametric DFTs (DFT-P). The second group of methods for improving the performance of 2D DFT-WT is based on the separability property of the 2D DFT-WT kernel and the use of one-dimensional parametric fast Fourier transforms (1D FFT-P). The third group of methods for improving the performance of 2D DFT-WT is based on the 2D Fast Fourier Transform (2D FFT-WT) in vector base 2, with space decimation. A comparative analysis of the effectiveness of the proposed three groups of methods for improving the speed of 2D DFT-WT based on a computer complex developed in the fourth generation language MATLAB (4GLS) was carried out.

Key words: information technology, Fourier processing, finite signal, parametric discrete Fourier transform, two-dimensional discrete Fourier transform with variable parameters, separability of the transform kernel.

Ключевые слова: информационная технология, Фурье-обработка, финитный сигнал, параметрическое дискретное преобразование Фурье, двумерное дискретное преобразование Фурье с варьируемыми параметрами, сепарабельность ядра преобразования.

Введение

Интенсивное развитие информационных технологий (ИТ), основанных на одномерном и двумерном классических дискретных преобразованиях Фурье (1D ДПФ, 2D ДПФ), привело и к значительному расширению сфер приложения методов цифровой Фурье-обработки финитных дискретных сигналов¹ (ФД сигналов). Расширение сфер приложения методов цифровой Фурье-обработки ФД сигналов во многом связано с существованием быстрых алгоритмов ре-

Развитие информационных технологий значительно расширило сферы приложения методов цифровой Фурье-обработки финитных дискретных сигналов. Среди них такие предметные области как томография, активная и пассивная гидролокация, радиолокация, сейсмология, техническое диагностирование, медицина, криминалистическая кибернетика, искусственный интеллект. Усложнение задач, решаемых методами цифровой Фурье-обработки в информационных технологиях, стимулировало переход от одномерной к двумерной цифровой Фурье-обработке. Системный анализ перехода от одномерного дискретного преобразования Фурье (ДПФ) к двумерному дискретному преобразованию Фурье (2D ДПФ) показал, что, во-первых, такой переход далеко не тривиален и, во-вторых, переход носит, прежде всего, качественный, а не количественный характер. В то же время обобщение результатов двумерного случая на многомерный, как правило, не вызывает сложностей поскольку носит в основном количественный, а не качественный характер. Как известно, для практического применения методов Фурье-обработки, расширения сфер их приложения, важная роль принадлежит процедурам быстрой реализации соответствующих преобразований Фурье. История с алгоритмом БПФ, предложенного в 1965 году, яркое тому подтверждение. В статье рассматривается решение важной и актуальной задачи разработки быстрых алгоритмов реализации нового дискретного преобразования Фурье: двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами (2D ДПФ-ВП). В работе предложены и исследованы следующие три группы методов повышения быстродействия 2D ДПФ-ВП. Первая группа методов повышения быстродействия 2D ДПФ-ВП основана на свойстве сепарабельности ядра 2D ДПФ-ВП и применении одномерных параметрических ДПФ (ДПФ-П). Вторая группа методов повышения быстродействия 2D ДПФ-ВП основана на свойстве сепарабельности ядра 2D ДПФ-ВП и применении одномерных параметрических быстрых преобразований Фурье (1D БПФ-П). Третья группа методов повышения быстродействия 2D ДПФ-ВП основана на двумерном быстром преобразовании Фурье (2D БПФ-ВП) по векторному основанию 2, с прореживанием в пространстве. Проведен сравнительный анализ эффективности предложенных трех групп методов повышения быстродействия 2D ДПФ-ВП на основе компьютерного комплекса, разработанного на языке четвертого поколения MATLAB (4GLS).

¹ Финитный дискретный сигнал в одномерном случае задается на конечном интервале (отрезке, ограниченном начальной и конечной точками), а в двумерном случае прямоугольного раstra – задается на конечной опорной плоскости (прямоугольнике, ограниченном четырьмя точками).

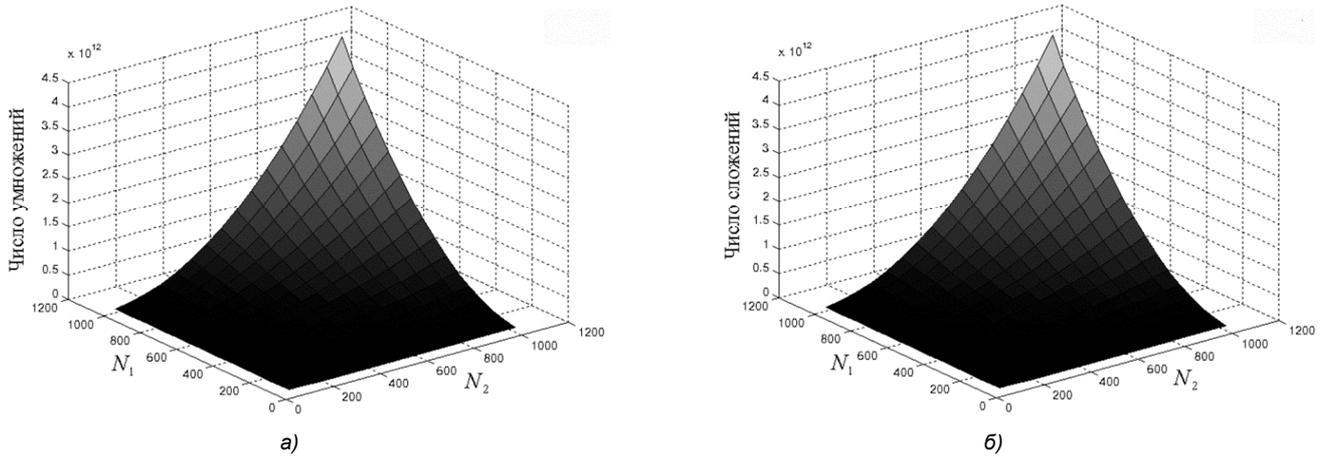


Рис. 1. Число действительных умножений – а и число действительных сложений – б при реализации двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами третьего рода прямым методом

Методы повышения быстродействия двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами

Как показал системный анализ методы повышения быстродействия двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами можно разделить на три большие группы:

1. Методы повышения быстродействия двумерного дискретного быстрого преобразования Фурье с варьируемыми параметрами, основанные на свойстве сепарабельности ядра 2D ДПФ-ВП и применении параметрических 1D ДПФ
2. Методы повышения быстродействия двумерного дискретного быстрого преобразования Фурье с варьируемыми параметрами, основанные на свойстве сепарабельности ядра 2D ДПФ-ВП и применении параметрических 1D БПФ.
3. Методы повышения быстродействия двумерного дискретного быстрого преобразования Фурье с варьируемыми параметрами на основе двумерного быстрого преобразования Фурье (2D БПФ-ВП) по векторному основанию 2, с прореживанием в пространстве, с замещением или без замещения.

Для сравнения экономии вычислений методом В и методом А введем коэффициент λ в виде отношения:

$$\lambda = \frac{\text{Число операций в методе А}}{\text{Число операций в методе В}}; \text{ (разы).}$$

Методы первой группы повышения быстродействия двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами непосредственно основаны на применении сепарабельности ядра 2D ДПФ-ВП. Согласно соотношениям (8, 11, 14, 19)) число вычислительных операций, требующихся на реализацию преобразования 2D ДПФ-ВП с учетом сепарабельности его ядра, равно $N_1 \cdot N_2 \cdot (N_1 + N_2)$ комплексных умножений и $N_1 \cdot N_2 \cdot (N_1 + N_2)$ комплексных сложений. Одно комплексное умножение состоит из четырех действительных умножений и двух действительных сложений, а комплексное сложение состоит из двух действительных сложений. Таким образом, общее число действительных операций составит $4 \cdot N_1 \cdot N_2 \cdot (N_1 + N_2)$ действительных умножений и $4 \cdot N_1 \cdot N_2 \cdot (N_1 + N_2)$ действительных сложений.

Если под методом А понимать прямое вычисление преобразования 2D ДПФ-ВП, а под методом В вычисление преобразования 2D ДПФ-ВП методом 1, то коэффициенты экономии вычислений методом 1 по числу действительных умножений – λ_1 и числу действительных сложений – λ_2 составят:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{N_1 \cdot N_2}{N_1 + N_2}. \tag{22}$$

Коэффициенты λ_1 и λ_2 для различных N_1 и N_2 приведены в табл. 1.

Таблица 1. Коэффициенты λ_1 и λ_2 для различных N_1 и N_2

$N_1 \setminus N_2$	128	256	384	512	640	768	896	1024
128	64.0000	85.3333	96.0000	102.4000	106.6667	109.7143	112.0000	113.7778
256	85.3333	128.0000	153.6000	170.6667	182.8571	192.0000	199.1111	204.8000
384	96.0000	153.6000	192.0000	219.4286	240.0000	256.0000	268.8000	279.2727
512	102.4000	170.6667	219.4286	256.0000	284.4444	307.2000	325.8182	341.3333
640	106.6667	182.8571	240.0000	284.4444	320.0000	349.0909	373.3333	393.8462
768	109.7143	192.0000	256.0000	307.2000	349.0909	384.0000	413.5385	438.8571
896	112.0000	199.1111	268.8000	325.8182	373.3333	413.5385	448.0000	77.8667
1024	113.7778	204.8000	279.2727	341.3333	393.8462	438.8571	477.8667	512.0000

Методы второй группы повышения быстродействия 2D ДПФ-ВП предполагают возможность применения на этапах реализации этого преобразования одномерных алгоритмов параметрического быстрого преобразования Фурье (алгоритмов БПФ-П) размерностями N_1 и N_2 . Такая возможность появляется тогда, когда размерность сложного сигнала $x(n_1, n_2)$ по переменным n_1 и n_2 может быть представлена как два в целой степени, т.е. $N_1 = 2^{n_1}$; $N_2 = 2^{n_2}$.

Для доказательства эффективности и результативности предложенных методов повышения быстродействия 2D ДПФ-ВП были разработаны на языке четвертого поколения MATLAB (4GLs) компьютерные программы, реализующие алгоритм параметрического быстрого преобразования Фурье с прореживанием по времени, с замещением и без замещения.

Для осуществления алгоритма БПФ-П размерностью N необходимо выполнить $N/2 \cdot \log_2 N$ базовых операций. Выполнение базовой операции БПФ-П (бабочки) требует одного комплексного умножения и двух комплексных сложений.

Комплексное умножение состоит из четырех действительных умножений и двух действительных сложений, а

комплексное сложение состоит из двух действительных сложений.

Таким образом, выполнение базовой операции БПФ-П требует четырех действительных умножений и шести действительных сложений. Следовательно, для осуществления одномерного алгоритма БПФ-П размерностью N необходимо выполнить $2N \cdot \log_2 N$ действительных умножений и $3N \cdot \log_2 N$ действительных сложений. Для осуществления двумерного 2D ДПФ-ВП размерностью $N_1 \cdot N_2$ необходимо выполнить $2N_1 \cdot N_2 \cdot \log_2(N_1 \cdot N_2)$ действительных умножений и $3 \cdot N_1 \cdot N_2 \cdot \log_2(N_1 \cdot N_2)$ действительных сложений.

Если под методом А понимать вычисление преобразования 2D ДПФ-ВП методом 1, а под методом В вычисление преобразования 2D ДПФ-ВП методом 2, то коэффициенты экономии вычислений методом 2 по числу действительных умножений – λ_3 и числу действительных сложений – λ_4 составят:

$$\lambda_3 = \frac{2 \cdot (N_1 + N_2)}{\log_2 N_1 + \log_2 N_2}; \lambda_4 = \frac{2 \cdot (N_1 + N_2)}{3 \cdot (\log_2 N_1 + \log_2 N_2)}. \quad (23)$$

Коэффициенты λ_3 и λ_4 для различных N_1 и N_2 приведены в табл. 2 и 3.

Таблица 2. Коэффициенты λ_3 для различных N_1 и N_2

$N_1 \setminus N_2$	128	256	384	512	640	768	896	1024
128	36.5714	51.2000	65.7044	80.0000	94.1065	108.0497	121.8514	135.5294
256	51.2000	64.0000	77.1783	90.3529	103.4527	116.4631	129.3847	142.2222
384	65.7044	77.1783	89.4587	101.9053	114.3694	126.8029	139.1886	151.5203
512	80.4000	90.3529	101.9053	113.7778	125.7510	137.7458	149.7287	161.6842
640	94.1065	103.4527	114.3694	125.7510	137.3106	148.9404	160.5915	172.2395
768	108.0497	116.4631	126.8029	137.7458	148.9404	160.2510	171.6144	182.9975
896	121.8514	129.3847	139.1886	149.7287	160.5915	171.6144	182.7200	193.8674
1024	135.5294	142.2222	151.5203	161.6842	172.2395	182.9975	193.8674	204.8000

Таблица 3. Коэффициенты λ_4 для различных N_1 и N_2

$N_1 \setminus N_2$	128	256	384	512	640	768	896	1024
128	24.3810	34.1333	43.8029	53.3333	62.7377	72.0331	81.2343	90.3529
256	34.1333	42.6667	51.4522	60.2353	68.9685	77.6421	86.2565	94.8148
384	43.8029	51.4522	59.6392	76.2463	114.3694	84.5353	92.7924	101.0136
512	53.3333	60.2353	67.9368	83.8340	125.7510	91.8305	99.8191	107.7895
640	62.7377	68.9685	76.2463	91.5404	137.3106	99.2936	107.0610	114.8264
768	72.0331	77.6421	84.5353	99.2936	148.9404	106.8340	114.4096	121.9984
896	81.2343	86.2565	92.7924	107.0610	160.5915	114.4096	121.8133	129.2449
1024	90.3529	94.8148	101.0136	114.8264	172.2395	121.9984	129.2449	136.5333

Методы третьей группы повышения быстродействия 2D ДПФ-ВП предполагают, что размерности сложного сигнала $x(n_1, n_2)$ по переменным n_1 и n_2 равны между собой и представляют собой два в целой степени r , т.е. $N_1 = N_2 = N = 2^r$.

Методы третьей группы повышения быстродействия 2D ДПФ-ВП на основе двумерного быстрого преобразования Фурье (2D БПФ-ВП) по векторному основанию 2, с прореживанием в пространстве, с замещением или без

замещения, основаны на стратегии «*divide et impera*».

Прежде, чем перейти к изложению быстрых алгоритмов двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами первого, второго и третьего рода по векторному основанию 2 в пространственно-частотной области отметим ряд положений.

Во-первых, для существования быстрых алгоритмов того или иного преобразования, необходимым и достаточным условием является свойство мультипликативности системы базисных функций преобразования.

Базисы двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами третьего рода обладают свойством мультипликативности по пространственным переменным n_1 и n_2 . Откуда непосредственно следует, для двумерных дискретных преобразований Фурье с варьируемыми параметрами третьего рода должны существовать быстрые алгоритмы по векторному основанию.

Во-вторых, в силу того, что базисы двумерных дискретных преобразований Фурье с варьируемыми параметрами третьего рода не обладают свойством мультипликативности по пространственным частотам k_1, k_2 , для этих преобразований возможны лишь быстрые алгоритмы прореживания в пространственной области.

В-третьих, двумерное дискретное преобразование Фурье с варьируемыми параметрами третьего рода может рассматриваться как общий случай. При этом двумерные дискретные преобразования Фурье с варьируемыми параметрами первого и второго рода могут рассматриваться как частные случаи дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами третьего рода.

Прямое вычисление 2D ДПФ-ВП-3 в алгебраической форме задается соотношением (7). Поскольку по определению $N_1 = N_2 = N$, $((N))_{\text{mod}2} = 0$, то соотношение принимает вид:

$$S_{N,N}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{N^2} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} x(n_1, n_2) W_{N_1}^{(k_1+\theta_1)n_1} W_{N_2}^{(k_2+\theta_2)n_2} \quad (24)$$

Двойную сумму (24) представим в виде четырех двойных сумм, разделив двумерный сигнал $x(n_1, n_2)$:

$$x(n_1, n_2) = \begin{matrix} & 0 & 1 & \dots & (N-1) & n_2 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} x(0,0) & x(0,1) & \dots & x(0, N-1) \\ x(1,0) & x(1,1) & \dots & x(1, N-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x((N-1),0) & x((N-1),1) & \dots & x((N-1), N-1) \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (25)$$

на четыре двумерных сигнала $x_{ev.,ev.}(n_1, n_2)$, $x_{od.,ev.}(n_1, n_2)$, $x_{ev.,od.}(n_1, n_2)$, $x_{od.,od.}(n_1, n_2)$.

Сигнал $x_{ev.,ev.}(n_1, n_2)$ состоит из четных отсчетов n_1 и четных отсчетов n_2 сигнала $x(n_1, n_2)$:

$$x_{ev.,ev.}(n_1, n_2) = \begin{matrix} & 0 & 1 & \dots & (N/2-1) & l_2 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N/2-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} x_1(0,0) & x_1(0,1) & \dots & x_1(0, N-1) \\ x_1(1,0) & x_1(1,1) & \dots & x_1(1, N-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1(N/2-1,0) & x_1(N/2-1,1) & \dots & x_1(N/2-1, N/2-1) \end{bmatrix} \end{matrix}; \quad (26)$$

$$= \begin{matrix} & 0 & 2 & \dots & (N-2) & n_2 \\ \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ \dots \\ (N-2) \end{matrix} & \begin{bmatrix} x(0,0) & x(0,2) & \dots & x(0, N-1) \\ x(2,0) & x(2,2) & \dots & x(2, N-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x(N-2,0) & x(N-2,2) & \dots & x(N-2, N-2) \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Сигнал $x_{od.,ev.}(n_1, n_2)$ состоит из нечетных отсчетов n_1 и четных отсчетов n_2 сигнала $x(n_1, n_2)$:

$$x_{od.,ev.}(n_1, n_2) = \begin{matrix} & 0 & 2 & \dots & (N-2) & n_2 \\ \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ \dots \\ (N-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} x(1,0) & x(1,2) & \dots & x(1, N-1) \\ x(3,0) & x(3,2) & \dots & x(3, N-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x(N,0) & x(N,2) & \dots & x(N-1, N-2) \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (27)$$

Сигнал $x_{ev.,od.}(n_1, n_2)$ состоит из четных отсчетов n_1 и нечетных отсчетов n_2 сигнала $x(n_1, n_2)$:

$$x_{ev.,od.}(n_1, n_2) = \begin{matrix} & 1 & 3 & \dots & N-1 & n_2 \\ \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ \dots \\ (N-2) \end{matrix} & \begin{bmatrix} x(0,1) & x(0,3) & \dots & x(0, N-1) \\ x(2,1) & x(2,3) & \dots & x(2, N-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x(N-2,1) & x(N-2,3) & \dots & x(N-2, N-1) \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (28)$$

Сигнал $x_{od.,od.}(n_1, n_2)$ состоит из нечетных отсчетов n_1 и нечетных отсчетов n_2 сигнала $x(n_1, n_2)$:

$$x_{od.,od.}(n_1, n_2) = \begin{matrix} & 1 & 3 & \dots & (N-1) & n_2 \\ \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ \dots \\ (N-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} x(1,1) & x(1,3) & \dots & x(1, N) \\ x(3,1) & x(3,3) & \dots & x(3, N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x(N-1,1) & x(N-1,3) & \dots & x(N-1, N-1) \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (29)$$

Перенумеруем номера отсчетов сигналов $x_{ev.,ev.}(n_1, n_2)$, $x_{od.,ev.}(n_1, n_2)$, $x_{ev.,od.}(n_1, n_2)$, $x_{od.,od.}(n_1, n_2)$ и обозначим данные сигналы соответственно как $x_1(l_1, l_2)$, $x_2(l_1, l_2)$, $x_3(l_1, l_2)$, $x_4(l_1, l_2)$, $l_1, l_2 = \overline{0, N/2-1}$:

$$x_1(l_1, l_2) = \begin{matrix} & 0 & 1 & \dots & (N/2-1) & l_2 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N/2-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} x_1(0,0) & x_1(0,1) & \dots & x_1(0, N-1) \\ x_1(1,0) & x_1(1,1) & \dots & x_1(1, N-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1(N/2-1,0) & x_1(N/2-1,1) & \dots & x_1(N/2-1, N/2-1) \end{bmatrix} \end{matrix}; \quad (30)$$

$$x_2(l_1, l_2) = \begin{matrix} & & 0 & 1 & \dots & (N/2-1) & l_2 \\ & 0 & \left[\begin{array}{cccc} x_3(0,0) & x_3(0,1) & \dots & x_3(0, N-1) \\ x_3(1,0) & x_3(1,1) & \dots & x_3(1, N-1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_3(N/2-1,0) & x_3(N/2-1,1) & \dots & x_3(N/2-1, N-1) \end{array} \right] \\ & 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ l_1 \end{matrix}; \quad (31)$$

$$x_3(l_1, l_2) = \begin{matrix} & & 0 & 1 & \dots & (N/2-1) & l_2 \\ & 0 & \left[\begin{array}{cccc} x_2(0,0) & x_2(0,1) & \dots & x_2(0, N-1) \\ x_2(1,0) & x_2(1,1) & \dots & x_2(1, N-1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_2(N/2-1,0) & x_2(N/2-1,1) & \dots & x_2(N/2-1, N-1) \end{array} \right] \\ & 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ l_1 \end{matrix}; \quad (32)$$

$$x_4(l_1, l_2) = \begin{matrix} & & 0 & 1 & \dots & (N/2-1) & l_2 \\ & 0 & \left[\begin{array}{cccc} x_4(0,0) & x_4(0,1) & \dots & x_4(0, N-1) \\ x_4(1,0) & x_4(1,1) & \dots & x_4(1, N-1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_4(N/2-1,0) & x_4(N/2-1,1) & \dots & x_4(N/2-1, N-1) \end{array} \right] \\ & 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ l_1 \end{matrix}. \quad (33)$$

Несложно установить, что:

1) выполнив двумерное дискретное преобразование Фурье с варьируемыми параметрами третьего рода (2D

ДПФ-ВП-3) двумерных сигналов $x_1(l_1, l_2)$, $x_2(l_1, l_2)$, $x_3(l_1, l_2)$, $x_4(l_1, l_2)$;

2) обозначив результаты преобразований соответственно как $S_{1, N/2, N/2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2)$, $S_{2, N/2, N/2} \times (k_1, k_2, \theta_1, \theta_2)$, $S_{3, N/2, N/2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2)$, $S_{4, N/2, N/2} \times (k_1, k_2, \theta_1, \theta_2)$;

3) двумерное дискретное преобразование Фурье с варьируемыми параметрами третьего рода $S_{N, N} \times (k_1, k_2, \theta_1, \theta_2)$ сигнала $x(n_1, n_2)$ при значениях пространственных частот $k_1, k_2 = \overline{0, N/2-1}$ можно представить в следующем виде:

$$S_{N, N}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2) = S_{1, N/2, N/2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2) + W_N^{(k_1+\theta_1)} \cdot S_{2, N/2, N/2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2) + W_N^{(k_2+\theta_2)} \cdot S_{3, N/2, N/2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2) + W_N^{(k_1+k_2+\theta_1+\theta_2)} \cdot S_{4, N/2, N/2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2); \quad (34)$$

где

$$S_{1, N/2, N/2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{N^2} \sum_{l_1=0}^{N/2-1} \sum_{l_2=0}^{N/2-1} x_1(l_1, l_2) W_{N/2}^{(k_1+\theta_1)l_1} \cdot W_{N/2}^{(k_2+\theta_2)l_2}; \quad (35)$$

$$S_{2, N/2, N/2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2) =$$

$$= \frac{1}{N^2} \sum_{l_1=0}^{N/2-1} \sum_{l_2=0}^{N/2-1} x_2(l_1, l_2) W_{N/2}^{(k_1+\theta_1)l_1} \cdot W_{N/2}^{(k_2+\theta_2)l_2}; \quad (36)$$

$$S_{3, N/2, N/2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{N^2} \sum_{l_1=0}^{N/2-1} \sum_{l_2=0}^{N/2-1} x_3(l_1, l_2) W_{N/2}^{(k_1+\theta_1)l_1} \cdot W_{N/2}^{(k_2+\theta_2)l_2}; \quad (37)$$

$$S_{4, N/2, N/2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{N^2} \sum_{l_1=0}^{N/2-1} \sum_{l_2=0}^{N/2-1} x_4(l_1, l_2) W_{N/2}^{(k_1+\theta_1)l_1} \cdot W_{N/2}^{(k_2+\theta_2)l_2}; \quad (38)$$

Подчеркнем, что выражения (35) – (38) позволяют найти значения двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами третьего рода $S_{N, N}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2)$ (24) только лишь при значениях пространственных частот $k_1, k_2 = \overline{0, N/2-1}$.

Для нахождения значений двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами третьего рода (34) при значениях пространственных частот:

$$k_1 = \overline{N/2, N-1}, \quad k_2 = \overline{0, N/2-1};$$

$$k_1 = \overline{0, N/2-1}, \quad k_2 = \overline{N/2, N-1};$$

$$k_1 = \overline{N/2, N-1}, \quad k_2 = \overline{N/2, N-1};$$

необходимо использовать следующие соотношения, вытекающие из свойств преобразований $S_{1, N/2, N/2} \times (k_1, k_2, \theta_1, \theta_2)$, $S_{2, N/2, N/2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2)$, $S_{3, N/2, N/2} \times (k_1, k_2, \theta_1, \theta_2)$, $S_{4, N/2, N/2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2)$, и следующие свойства весовых коэффициентов в выражении (34):

$$W_N^{(k_1+N/2+\theta_1)} = -W_N^{(k_1+\theta_1)}; \quad (39)$$

$$W_N^{(k_2+N/2+\theta_2)} = -W_N^{(k_2+\theta_2)}; \quad (40)$$

$$W_N^{(k_1+N/2+\theta_1+k_2+N/2+\theta_2)} = W_N^{(k_1+\theta_1+k_2+\theta_2)}. \quad (41)$$

Приведем формулы, которые позволяют найти значения двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами третьего рода $S_{N,N}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2)$:

– при значениях пространственных частот $k_1 = \overline{N/2, N-1}$, $k_2 = \overline{0, N/2-1}$:

$$S_{N,N}((k_1+N/2), k_2, \theta_1, \theta_2) = S_{1, N/2, N/2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2) - W_N^{(k_1+\theta_1)} \cdot S_{2, N/2, N/2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2) + W_N^{(k_2+\theta_2)} \cdot S_{3, N/2, N/2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2) - W_N^{(k_1+k_2+\theta_1+\theta_2)} \cdot S_{4, N/2, N/2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2); \quad (42)$$

– при значениях пространственных частот $k_1 = \overline{0, N/2-1}$, $k_2 = \overline{N/2, N-1}$:

$$S_{N,N}(k_1, (k_2+N/2), \theta_1, \theta_2) = S_{1, N/2, N/2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2) - W_N^{(k_1+\theta_1)} \cdot S_{2, N/2, N/2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2) - W_N^{(k_2+\theta_2)} \cdot S_{3, N/2, N/2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2) + W_N^{(k_1+k_2+\theta_1+\theta_2)} \cdot S_{4, N/2, N/2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2); \quad (43)$$

– при значениях пространственных частот $k_1 = \overline{N/2, N-1}$, $k_2 = \overline{N/2, N-1}$:

$$S_{N,N}(k_1, (k_2+N/2), \theta_1, \theta_2) = S_{1, N/2, N/2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2) - W_N^{(k_1+\theta_1)} \cdot S_{2, N/2, N/2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2) - W_N^{(k_2+\theta_2)} \cdot S_{3, N/2, N/2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2) + W_N^{(k_1+k_2+\theta_1+\theta_2)} \cdot S_{4, N/2, N/2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2). \quad (44)$$

Таким образом, соотношениями (34) и (42) – (44) задается первый слой быстрого метода вычисления значений коэффициентов N^2 -точечного дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами третьего рода $S_{N,N}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2)$. Первый слой формируется на основе результатов четырех $N^2/4$ -точечных двумерных дискретных преобразований Фурье с варьируемыми параметрами третьего рода $S_{N/2, N/2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2)$.

Рассмотренный процесс разбиения можно применить и к вычислению каждого из четырех $N^2/4$ -точечных двумерных дискретных преобразований Фурье с варьируемыми параметрами третьего рода $S_{1, N/2, N/2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2)$, $S_{2, N/2, N/2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2)$, $S_{3, N/2, N/2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2)$, $S_{4, N/2, N/2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2)$. Процесс разбиения заканчивается после формирования $m = \log_2 N$ слоев рассматриваемого быстрого алгоритма 2D ДПФ-ВП-3. Базовая операция быстрого алгоритма 2D БПФ-ВП-3 – бабочка 2D БПФ-ВП-3 приведена на рис. 2.

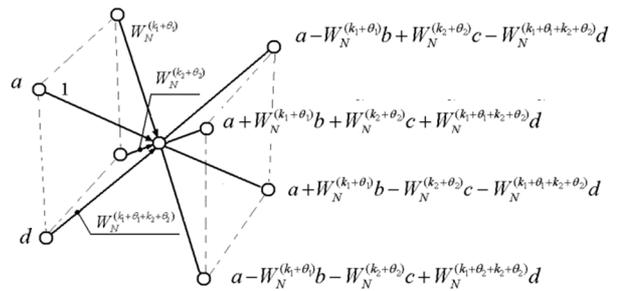


Рис. 2. Базовая операция быстрого алгоритма 2D БПФ-ВП-3 – бабочка 2D БПФ-ВП-3

Как уже отмечалось вначале данной статьи, двумерные дискретные преобразования Фурье с варьируемыми параметрами первого и второго рода могут рассматриваться как частные случаи дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами третьего рода. В связи, с чем базовые операции быстрых алгоритмов этих преобразований (бабочки быстрых алгоритмов 2D БПФ-ВП-1 и 2D БПФ-ВП-2) также могут рассматриваться как частные случаи базовой операции дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами третьего рода – бабочки 2D БПФ-ВП-3.

Базовые операции быстрых алгоритмов 2D БПФ-ВП-1 и 2D БПФ-ВП-2 приведены на рис. 3 и 4.

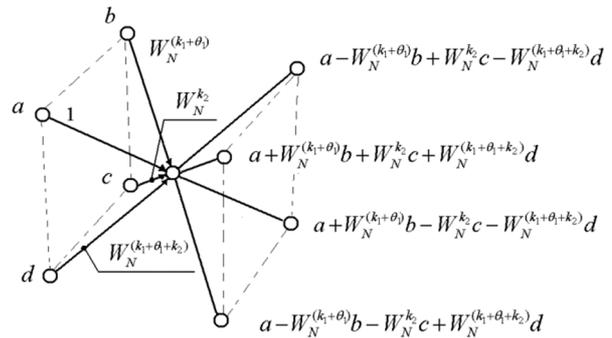


Рис. 3. Базовая операция быстрого алгоритма 2D БПФ-ВП-1 – бабочка 2D БПФ-ВП-1

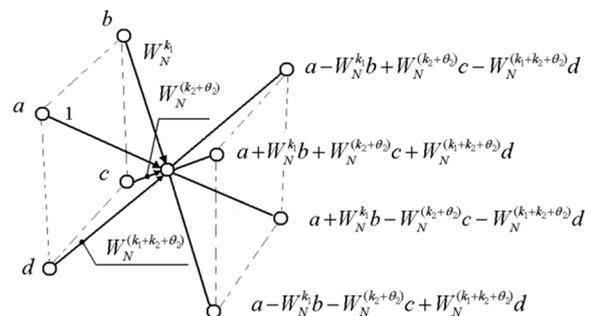


Рис. 4. Базовая операция быстрого алгоритма 2D БПФ-ВП-2 – бабочка 2D БПФ-ВП-2

Число базовых операций (бабочек) 2D БПФ-ВП-3 (также как и число базовых операций преобразований 2D БПФ-ВП-1 и 2D БПФ-ВП-2) равно $\frac{N^2}{4} \log_2 N$. Одна бабочка преобразования 2D БПФ-ВП-3 (как и бабочки преобразований 2D БПФ-ВП-1 и 2D БПФ-ВП-2) требует выполнения трех комплексных умножений и восьми ком-

плексных сложений. Одно комплексное умножение состоит из четырех действительных умножений и двух действительных сложений, а комплексное сложение состоит из двух действительных сложений. Следовательно, общее число действительных операций на реализацию одной базовой операции 2D БПФ-ВП-3 (также как и базовых операций 2D БПФ-ВП-1 и 2D БПФ-ВП-2) составляет 12 действительных умножений и 22 действительных сложений.

Таким образом, на выполнение двумерного быстрого преобразования Фурье (2D БПФ-ВП) необходимо выполнить:

– комплексных умножений – $\frac{3 \cdot N^2}{4} \cdot \log_2 N$;

– комплексных сложений – $2 \cdot N^2 \cdot \log_2 N$.

Оценим сокращение вычислительных операций в методах повышения быстродействия двумерного дискретного быстрого преобразования Фурье с варьируемыми параметрами на основе двумерного быстрого преобразования Фурье (2D БПФ-ВП) по векторному основанию 2, с прореживанием в пространстве.

В соотношении (21) под методом А будем понимать вычисление преобразования 2D ДПФ-ВП методом 2, а под методом В вычисление преобразования 2D ДПФ-ВП методом 3.

По результатам проведенного математического моделирования коэффициентов экономии вычислений методом 3 в сравнении с методом 2 по числу действительных умножений – λ_5 и числу действительных сложений –

λ_6 можно сделать следующие выводы:

– коэффициенты экономии вычислений λ_5 и λ_6 не зависят от N ;

– значение коэффициента экономии вычислений λ_5 составляет незначительную величину – 1.3333;

– значение коэффициента экономии вычислений λ_6 составляет еще более скромную величину – 1.0909.

Заключение

1. Исследованы методы реализации двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами на основе свойства сепарабельности его ядра.

2. Разработаны и исследованы 3 группы методов повышения быстродействия двумерного дискретного быстрого преобразования Фурье с варьируемыми параметрами:

– методы повышения быстродействия 2D ДПФ-ВП, основанные на свойстве сепарабельности ядра 2D ДПФ-ВП и применении одномерных ДПФ-П;

– методы повышения быстродействия 2D ДПФ-ВП, основанные на свойстве сепарабельности ядра 2D ДПФ-ВП и применении параметрических одномерных БПФ;

– методы повышения быстродействия 2D ДПФ-ВП на основе двумерного быстрого преобразования Фурье (2D БПФ-ВП) по векторному основанию 2, с прореживанием в пространстве, с замещением или без замещения.

3. Методы первой группы в сравнении с прямым вы-

числением 2D ДПФ-ВП позволяют сократить при $N_1 = N_2 = N = 1024$ число действительных умножений и действительных сложений в 512 раз. Методы второй группы в сравнении с методами первой группы позволяют сократить при $N_1 = N_2 = N = 1024$ число действительных умножений еще в 208,8 раз и действительных сложений в 136,5 раз. Методы третьей группы в сравнении с методами второй группы позволяют сократить независимо от размерности сигнала число действительных умножений еще в 1,3 раза и действительных сложений в 1,91 раза.

Литература

1. Rabiner L., Gold B. Theory and Application of digital signal processing. New Jersey, Prentice-hall, 1975. 772 p.

2. Favorskaya M., Savchina E., Popov A. Adaptive visible image watermarking based on Hadamard transform. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018, vol. 450, no. 5, pp. 052003.1-052003.6. DOI: 10.1088/1757-899X/450/5/052003.

3. Klionskiy D.M., Kaplun D.I., Geppener V.V. Empirical more decomposition for signal preprocessing and classification of intrinsic mode functions. Pattern Recognition and Image Analysis (Advances in Mathematical Theory and Applications). 2018, vol. 28, no. 1, pp. 122-132. DOI:10.1134/S1054661818010091

4. Ponomarev A.V., Ponomareva O.V. Digital technologies in non-destructive testing. Journal of Physics: Conference Series. 2019. 12038 p.

5. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V. Application of parametric discrete Fourier transform non-destructive testing of composite materials with a free oscillation method. Journal of Physics: Conference Series. 2019. 12039 p.

6. Batishchev V.I., Volkov I.I., Zolin A.G. Using a stochastic basis in signal and image recovery problems. Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2017, vol. 53, no. 4, pp. 414-420.

7. Kulikovskikh I., Prokhorov S. Psychological perspectives on implicit regularization: a model of retrieval-induced forgetting (rif). Journal of Physics: Conference Series. electronic edition. 2018. 012079 p. DOI:10.1088/1742-6596/1096/1/012079.

8. Favorskaya M.N., Buryachenko V.V. Authentication and copyright protection of videos under transmitting specifications. Computer Vision in Advanced Control Systems-5. ISRL. Springer, Cham, 2020, vol. 175, pp. 119-160. DOI.org/10.1007/978-3-030-33795-7_5

9. Blahut R.E. Fast Algorithms for Digital Signal Processing. Reading, MA: Addison-Wesley, 1984.

10. Bogner R.E., Constantinides A.G. Introduction to digital filtering. John Wiley and Sons, London, New York, Sydney, Toronto, 1975. 216 p.

11. Likhtsinder B. Conditional average value of queues in queuing systems with bath request flows. 2017 4th International Scientific-Practical Conference Problems of Infocommunications Science and Technology, PIC S and T 2017 – Proceedings. 2018, pp. 49-52. DOI:10.1109/INFORCOMMST.2017.8246347.

12. Bakulin M.G., Vityazev V.V., Shumov A.P., Kreynelin V.B. Effective signal detection for the spatial multiplexing mimo systems. Telecommunications and Radio Engineering. 2018, vol. 77, no. 13, pp. 1141-1158. DOI.org/10.1615/TelecomRadEng.v77.i13.30.

13. Prozorov D., Tatarinova A. Comparison of grapheme-

to-phoneme conversions for spoken document. 2019 IEEE East-West Design and Test Symposium, EWDTs 2019. 2019. 8884449 p. DOI:10.1109/EWDTs.2019.8884449.

14. Prozorov D., Trubin I. Detection of a signal in the simo system with spatial correlation of noise. 2018 7th Mediterranean Conference on Embedded Computing, MECO 2018 – Including ECYPS 2018, Proceedings. 7. 2018, pp. 1-5. DOI:10.1109/MECO.2018.8405965.

15. Urakov A., Gurevich K., Alies M., Reshetnikov A., Kasatkina A., Urakova N. The tissue temperature during injection of drug solution into it as an integral indicator of rheology. Journal of Physics: Conference Series. 4th International Conference on Rheology and Modeling of Materials, IC-RMM 2019. 2020. 012003 p. DOI:10.1088/1742-6596/1527/1/012003

16. Gonzalez R.C., Woods R.E. Digital Image Processing. Published by Pearson, 2018. 1168 p.

17. Pratt William K. Digital image processing. A Wiley-Interscience publication, 2007. 807 p.

18. Cooley J., Tukey J. An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series, Math. Comput., vol. 19, no. 90, Apr. 1965, pp. 297-301, DOI: 10.2307/2003354.

19. Пономарев А.В. Основы теории двумерной цифровой обработки сигналов в базисах Фурье с варьируемыми параметрами. Цифровая обработка сигналов. 2019. № 2. С. 12-20.

20. Пономарева О.В., Пономарев А. В. Интерполяция в пространственной области двумерных дискретных сигналов с помощью быстрых преобразований Фурье. Интеллектуальные системы в производстве. 2019. Т. 17, № 1. С. 88-94. DOI 10.22213/24-10-9304-2019-1-88-94.

21. Пономарева О. В., Пономарев А.В., Смирнова Н.В. Цифровизация измерений спектров в базисе Фурье – тенденции развития и проблемы. Приборы и методы измерений. 2019. Т. 10, № 3. С. 271-280. DOI 10.21122/2220-9506-2019-10-3-271-280.

22. Пономарева О.В., Пономарев А.В., Пономарев В.А. Обобщение алгоритма Герцеля для решения задач выявления скрытых периодичностей. Интеллектуальные системы в производстве. 2013. № 1 (21). С. 41-46.

23. Пономарева О.В. Вероятностные свойства спектральных оценок, полученных методом параметрического дискретного преобразования Фурье. Интеллектуальные системы в производстве. 2010. № 2 (16). С. 36-42.

24. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения: Вып.1. Пер с англ. В.Ф.Писаренко. М.:Мир, 1971. 312 с.

25. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения: Вып.2. Пер с англ. В.Ф.Писаренко. М.: Мир, 1972. 283 с.

26. Милентьев В.С., Батищев В.И. Аппроксимационные методы и системы измерения и контроля параметров периодических сигналов. М.: Физматлит, 2011. 240 с.

27. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных процессов: Пер. с англ. М.:Мир, 1989. 540 с.

28. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: Перевод с англ. М.: Мир, 1990. 584 с.

29. Оппенгейм Э. Применение цифровой обработки сигналов: Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 552 с.

30. Яглом А.М. Корреляционная теория стационарных

случайных функций с примерами из метеорологии. Изд. Гидрометеоздат. Л.:1981. 281 с.

31. Батищев В.И., Золин А.Г., Косарев Д.Н., Романев А.Е. Аппроксимационный подход к решению задач анализа и интерпретации экспериментальных данных. Вестник Самарского государственного университета. Серия: Технические науки. 2006. № 40. С.57-65.

32. Батищев В.И., Мелентьев В.С. Измерительно-моделирующий подход к определению интегральных характеристик периодических сигналов. Известия высших учебных заведений. Электромеханика. 2003. № 6. С. 36-39.

33. Батищев В.И., Волков И.И., Золин А.Г. Использование стохастического базиса в задачах восстановления сигналов и изображений. Автометрия. 2017. Т. 53, № 4. С. 127-134.

34. Батищев В.И., Волков И.И., Золин А.Г. Исследование аппроксимационных свойств функциональных базисов в задачах реконструкции изображений при дистанционном зондировании земли. Проблемы управления и моделирования в сложных системах труды XVIII Международной конференции. 2016. С. 304-307.

35. Prokhorov S.A., Kulikovskikh I.M. Unique Condition for generalized Laguerre Functions to solve pole Position Problem. Signal Processing. 2015, vol. 108, pp. 25-29.

36. Прохоров С.А., Графкин В.В. Структурно-спектральный анализ случайных процессов. Изд. Самарский научный центр РАН. Самара, 2010.

37. Прозоров Д.Е., Петров Е.П. Быстрый поиск шумоподобных сигналов / Под ред. Е.П. Петрова. Изд. О-кратное. Киров, 2006.

38. Пономарева О.В. Развитие теории и разработка методов и алгоритмов цифровой обработки информационных сигналов в параметрических базисах Фурье: дис...д-ра техн. наук: 05.13.01. Ижевск, 2016. 357 с.

39. Dudgeon D.E., Mersereau R.M. Multidimensional digital signal processing, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1984. 488 p.

40. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Виброакустическое диагностирование коробок передач станков цифровыми методами. Станки и инструмент. 1983. № 9. С. 18-21.

41. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Тенденции развития дискретных косвенных измерений параметров электрических сигналов. Метрология. 2017. № 1. С. 20-32.

42. Пономарева О.В., Пономарева Н.В. Повышение точности и расширение функциональных возможностей цифровых фильтров на основе частотной выборки. Приборы и методы измерений. 2013. № 2 (7). С. 11-20.

43. Пономарева О.В., Пономарев А.В., Смирнова Н.В. Алгоритмы прямого и обратного параметрического быстрого преобразования Фурье. Информационные технологии. 2022. Т. 28. № 1. С. 9-1919. Т. 10. № 3. С. 271-280.

44. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V. Theoretical foundations of digital vector fourier analysis of two-dimensional signals padded with zero samples. Information and Control Systems. 2021, no. 1 (110), pp. 55-64.

45. Пономарев А.В., Пономарева О.В. Роль и место операции дополнения нулями в теории двумерной Фурье-обработки сигналов. Цифровая обработка сигналов. 2020. № 3. С. 50-55.