

## ПОСТРОЕНИЕ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ КАМ СИГНАЛОВ

Маслаков М.Л., к.т.н., ведущий научный сотрудник, АО «Российский институт мощного радиостроения», e-mail: maslakovml@gmail.com;

Терновая А.К., студентка ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича», e-mail: ternovaya\_00@bk.ru

## ESTIMATION OF THE PROBABILITY DENSITY FUNCTION OF QAM SIGNALS

Maslakov M.L., Ternovaya A.K.

The article considers the problem of analyzing signals with quadrature amplitude modulation (QAM). The goal of the work is estimation of probability distribution density of the complex in-phase and quadrature components of QAM signal. The histogram method and the maximum likelihood method are used to get this estimation. The results of numerical simulation are presented.

**Key words:** probability density function, In-phase and Quadrature components, quadrature amplitude modulation, histogram method, maximum likelihood method, signal-to-noise ratio, noise dispersion.

**Ключевые слова:** плотность распределения вероятностей, комплексная огибающая, квадратурная амплитудная модуляция, гистограммный метод, метода максимума правдоподобия, отношение сигнал/шум, дисперсия шума.

## Введение

Анализ сигнальных созвездий манипулированных сигналов, принятых на фоне аддитивного шума, является одной из важнейших задач при обработке сигналов и принятии решения о переданном символе. Так, например, для сигналов с фазовой манипуляцией (ФМ), различных порядков (BPSK, QPSK и т.д.) применяют круговые (или полярные) распределения [1, 2]. На основе их анализа и обработки отсчетов сигнала получают, в частности, оценки отношения сигнал/шум (ОСШ) [3, 4] и вероятности ошибки [3]. Для получения этих оценок достаточно рассмотреть фазы принимаемых символов (или разности фаз для случая дифференциальной ФМ [5]) и ограничиться соответствующей одномерной плотностью распределения [3].

Однако в случае сигналов с квадратурной амплитудной модуляцией (КАМ, или QAM) необходимо рассмотреть синфазную и квадратурную составляющие комплексной огибающей  $\dot{U}_k$  каждого принимаемого символа [5, 6], т.е.

$$\dot{U}_k = I_k + iQ_k, \quad (1)$$

где  $I_k$ ,  $Q_k$  – соответственно, синфазная и квадратурная составляющие,  $k$  – номер символа.

Отметим, что для ФМ сигналов, вообще говоря, также рассматривают коэффициенты комплексной огибающей  $\dot{U}_k$ , однако ограничиваются лишь  $\varphi_k = \arg(\dot{U}_k)$ .

Целью данной работы является построение плотности распределения вероятностей комплексной огибающей КАМ сигнала.

## Описание модели

Пусть  $s(t)$  – передаваемый сигнал с КАМ, который можно записать в следующем виде

Рассматривается задача анализа сигналов с квадратурной амплитудной модуляцией (КАМ). Целью работы является построение плотности распределения вероятностей коэффициентов комплексной огибающей КАМ сигнала. Для построения плотности применяются гистограммный метод и метод максимума правдоподобия. Показаны результаты численного моделирования.

$$s(t) = \sum_{k=1}^K A_k \cos(\omega t + \varphi_k) p(t - (k-1)T_{sym}), \quad (2)$$

где  $K$  – количество передаваемых символов,  $A_k$  – амплитуда передаваемого сигнала,  $\omega = 2\pi f$  – несущая частота,  $\varphi_k$  – фазы передаваемых символов,  $T_{sym}$  – длительность символа,  $p(t)$  – импульсная функция вида

$$p(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0; T_{sym}] \\ 0, & t \notin [0; T_{sym}] \end{cases} \quad (3)$$

Преобразование Гильберта сигнала (2) есть

$$\hat{s}(t) = \sum_{k=1}^K A_k \sin(\omega t + \varphi_k) p(t - (k-1)T_{sym}). \quad (4)$$

Тогда аналитический сигнал, соответствующий  $k$ -му передаваемому символу можно записать в форме

$$\dot{u}(t) = s(t) + i\hat{s}(t) = A_k \cos(\omega t + \varphi_k) + iA_k \sin(\omega t + \varphi_k) = A_k e^{i\varphi_k} e^{i\omega t}, \quad (5)$$

где множитель  $A_k e^{i\varphi_k}$  – есть комплексная огибающая  $k$ -го сегмента сигнала  $s(t)$ , соответствующего  $k$ -му символу.

Соответствующие комплексные коэффициенты в форме (1) полностью характеризуют «информационную» составляющую КАМ сигнала и могут быть записаны в виде

$$\dot{U}_k = I_k + iQ_k = A_k e^{i\varphi_k}, \quad (6)$$

где  $I_k = A_k \cos \varphi_k$ ,  $Q_k = A_k \sin \varphi_k$ .

Таким образом, КАМ сигнал кроме формы (2) часто представляют в виде модели [5]

$$s(t) = \sum_{k=1}^K (I_k \cos(\omega t) - Q_k \sin(\omega t)) p(t - (k-1)T_{sym}). \quad (7)$$

Принятый из канала с АБГШ сигнал запишем в форме  $\tilde{s}(t) = s(t) + \xi(t)$ , (8)

где  $\xi(t)$  – АБГШ.

В результате при анализе сигнала для каждого  $k$ -го символа вместо (6) получают оценки синфазно-квadrатурных составляющих в форме

$$\dot{U}_{\xi,k} = (I_k + \xi_{I,k}) + i(Q_k + \xi_{Q,k}), \quad (9)$$

где  $\xi_{I,k}$  и  $\xi_{Q,k}$  – соответствующие синфазно-квadrатурные составляющие аддитивного шума  $\xi(t)$ .

Таким образом, при моделировании выборки синфазно-квadrатурных составляющих принимаемого КАМ сигнала можно рассмотреть модель вида

$$\dot{U}_{\xi} = \dot{U} + G(\sigma^2) \cdot e^{iR}, \quad (10)$$

где  $\dot{U}$  – комплексный вектор отсчетов синфазно-квadrатурных составляющих передаваемого сигнала,  $G(\sigma^2)$  – вектор гауссовских чисел с дисперсией  $\sigma^2$  и нулевым математическим ожиданием,  $R$  – вектор случайных чисел с равномерным законом распределения в диапазоне  $[0; 2\pi]$

Отметим, что умножение векторов  $G(\sigma^2)$  и  $e^{iR}$  в выражении (10) предполагается поэлементным.

В качестве примера на рис. 1 приведены сигнальные

созвездия наблюдаемых КАМ сигналов, полученные при реализации модели (10).

Здесь на рис. 1 красным показаны истинные (допустимые) значения вектора  $\dot{U}$ , синим – зашумленная выборка  $\dot{U}_{\xi}$ .

**Построение плотности вероятности гистограммным методом**

Простейшим методом непараметрической оценки плотности распределения вероятностей является гистограммный метод оценивания [7]. Суть метода сводится к оценке вероятностей попадания значений анализируемой выборки в заданные области.

В рассматриваемом случае анализа комплексной выборки  $\dot{U}_{\xi}$  необходимо осуществить разбиение на области с шагом, определяемым следующим образом

$$h = \frac{\max([I_{\xi}, Q_{\xi}]) - \min([I_{\xi}, Q_{\xi}])}{N-1}, \quad (11)$$

где  $I_{\xi}$  и  $Q_{\xi}$  – здесь и далее – вещественная и мнимая части вектора  $\dot{U}_{\xi}$ ,  $N$  – количество областей (или ячеек).

Как известно, число ячеек, а точнее их размер, влияет на состоятельность получаемой оценки плотности распределения вероятностей и в тоже время зависит от объема имеющейся выборки.

На рис. 2-4 приведены примеры плотностей комплексных огибающих  $\dot{U}_{\xi}$  сигнала КАМ-4, полученные методом гистограмм, для различного объема выборки.

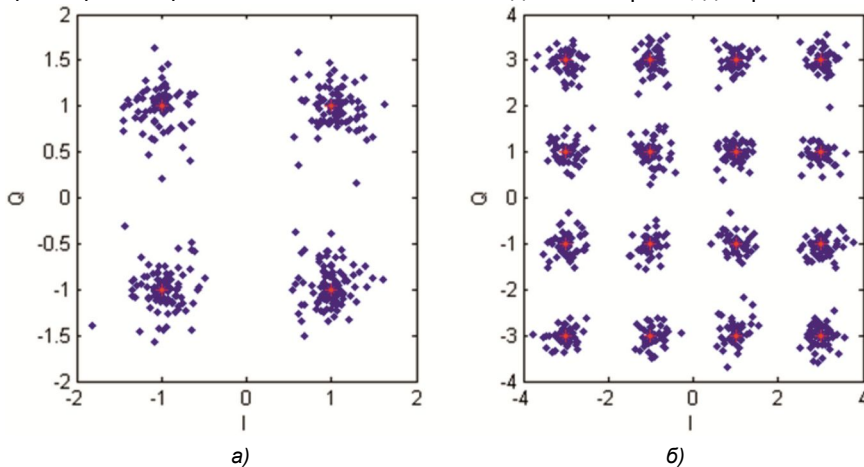


Рис. 1. Примеры сигнальных созвездий наблюдаемых КАМ сигналов: КАМ-4 (а), КАМ-16 (б)

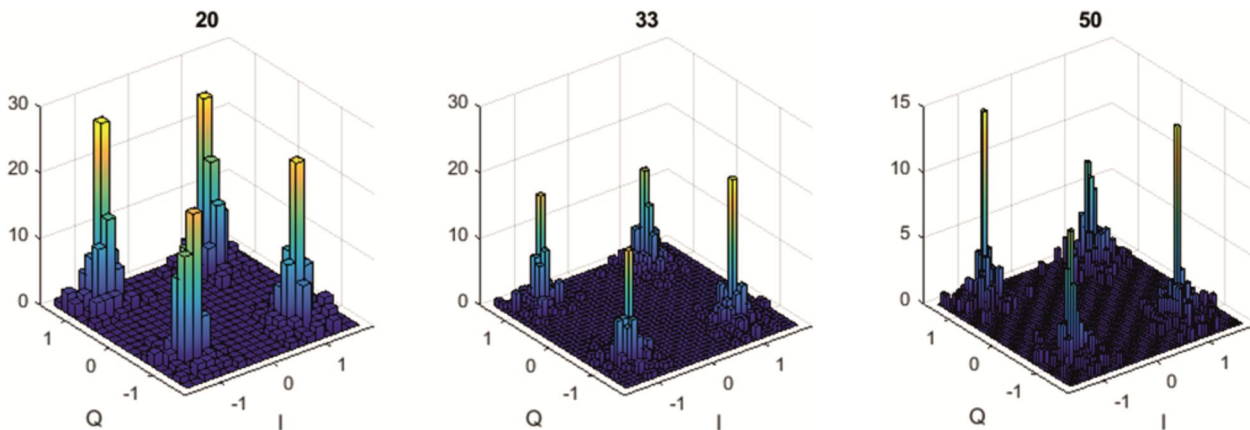


Рис. 2. Гистограммы коэффициентов комплексной огибающей при объеме выборки  $K = 500$  при  $N = 20$ ,  $N = 33$  и  $N = 50$

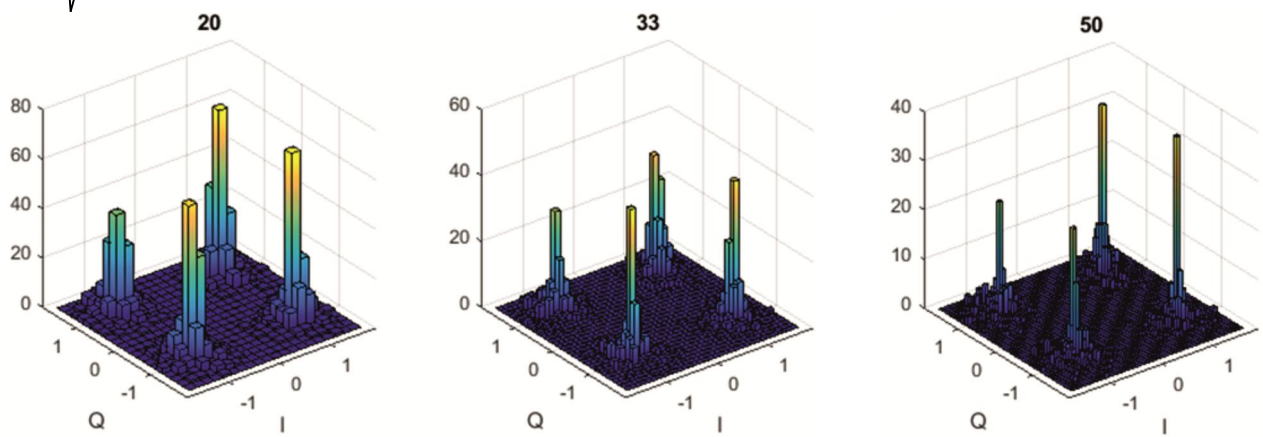


Рис. 3. Гистограммы коэффициентов комплексной огибающей при объеме выборки  $K = 1000$  при  $N = 20$ ,  $N = 33$  и  $N = 50$

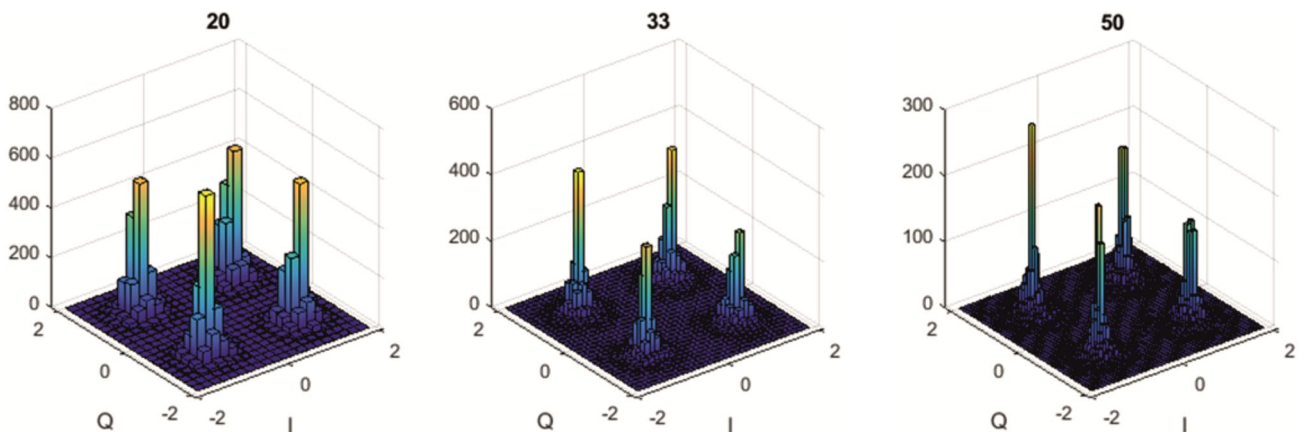


Рис. 4. Гистограммы коэффициентов комплексной огибающей при объеме выборки  $K = 10000$  при  $N = 20$ ,  $N = 33$  и  $N = 50$

Из приведенных на рис. 2 гистограмм, очевидно, что объема выборки  $K = 500$  недостаточно для получения состоятельной оценки. При этом значение  $N$  логичнее выбирать следующим образом [8]

$$N = \sqrt{K}, \quad (12)$$

Как видно из рис. 3, 4 для анализа сигналов КАМ-4 требуется объем выборки  $K > 1000$ . Однако для случая более высокой позиционности модуляции, например, КАМ-16 потребуется увеличения объема выборки на порядок, что далеко не всегда может быть допустимо на практике.

Таким образом, несмотря на простоту реализации, гистограммный метод требует достаточно большого объема анализируемой выборки. Применение неравномерного адаптивного шага для размера ячеек (см., например, [9]) – более «мелкого» в области разрешенных состояний – потенциально позволит несколько уменьшить требования к объему выборки. Однако вычислительная сложность в этом случае увеличится. Поэтому при анализе относительно небольших выборок отсчетов векторов комплексной огибающей КАМ сигналов целесообразнее применение других методов, например, метод максимума правдоподобия.

#### Построение плотности вероятности методом максимума правдоподобия

Метод максимума правдоподобия позволяет построить плотность распределения путем оценки параметра

(или параметров) модели плотности распределения известного вида. Функцию правдоподобия, как правило, записывают через логарифм, т.е.

$$L(\alpha) = \sum_{k=1}^K \ln(W(\alpha, x_k)), \quad (13)$$

где  $W(\alpha, x_k)$  – плотности распределения известного вида,  $x_k$  – элементы анализируемой выборки,  $\alpha$  – оцениваемый параметр.

Как известно [8], двумерная нормальная плотность распределения в общем случае определяется выражением

$$W(x, y, \sigma_x, \sigma_y, m_x, m_y, \rho) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \times \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right)\right), \quad (14)$$

где  $\sigma_x, \sigma_y$  – средне-квадратичные отклонения (СКО) случайных величин  $x$  и  $y$ , соответственно,  $m_x, m_y$  – математические ожидания случайных величины  $x$  и  $y$ ,  $\rho$  – коэффициент корреляции.

Полагая некоррелированность случайных величин  $x$

и  $y$ , т.е. при значении  $\rho = 0$ , от (14) приходим к выражению

$$W(x, y, \sigma_x, \sigma_y, m_x, m_y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\left(\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right)\right) \quad (15)$$

С учетом модели (10) положим значения СКО, а значит и дисперсий, равными, т.е.

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2. \quad (16)$$

Математические ожидания синфазно-квадратурных составляющих обозначим, соответственно,  $m_I$  и  $m_Q$ .

Их значения для каждого варианта передаваемого символа известны и приведены в таблице.

Значения математических ожиданий вариантов символов КАМ сигналов и обозначения соответствующих плотностей

КАМ-4		КАМ-16		Обозначение
$m_I$	$m_Q$	$m_I$	$m_Q$	
1	1	1	1	$W_0(I, Q, \sigma^2)$
-1	1	-1	1	$W_1(I, Q, \sigma^2)$
-1	-1	-1	-1	$W_2(I, Q, \sigma^2)$
1	-1	1	-1	$W_3(I, Q, \sigma^2)$
		3	3	$W_4(I, Q, \sigma^2)$
		1	3	$W_5(I, Q, \sigma^2)$
		-1	3	$W_6(I, Q, \sigma^2)$
		-3	3	$W_7(I, Q, \sigma^2)$
		-3	1	$W_8(I, Q, \sigma^2)$
		-3	-1	$W_9(I, Q, \sigma^2)$
		-3	-3	$W_{10}(I, Q, \sigma^2)$
		-1	-3	$W_{11}(I, Q, \sigma^2)$
		1	-3	$W_{12}(I, Q, \sigma^2)$
		3	-3	$W_{13}(I, Q, \sigma^2)$
		3	-1	$W_{14}(I, Q, \sigma^2)$
		3	1	$W_{15}(I, Q, \sigma^2)$

С учетом принятых обозначений, соответствующие выражения для плотностей коэффициентов комплексных огибающих сигналов КАМ-4 и КАМ-16 можно записать в виде следующих выражений

$$W_{КАМ4}(\dot{U}_\xi, \sigma^2) = W_{КАМ4}(I, Q, \sigma^2) = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 W_m(\dot{U}_\xi, \sigma^2) = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 W_m(I, Q, \sigma^2) \quad (17)$$

и

$$W_{КАМ16}(\dot{U}_\xi, \sigma^2) = W_{КАМ16}(I, Q, \sigma^2) = \frac{1}{16} \sum_{m=0}^{15} W_m(\dot{U}_\xi, \sigma^2) = \frac{1}{16} \sum_{m=0}^{15} W_m(I, Q, \sigma^2). \quad (18)$$

Подставив (17) или (18) в функционал правдоподобия (13) придем к соответствующим выражения для оценки дисперсии методом максимального правдоподобия

$$\hat{\sigma}^2 = \arg(\max L(\sigma^2)), \quad (19)$$

$$\text{где } L(\sigma^2) = \sum_{k=1}^K \ln(W_{КАМ4}(\dot{U}_{\xi,k}, \sigma^2)) \quad (20)$$

$$\text{или } L(\sigma^2) = \sum_{k=1}^K \ln(W_{КАМ16}(\dot{U}_{\xi,k}, \sigma^2)). \quad (21)$$

На рис. 5 приведены примеры плотностей распределения вероятностей комплексных огибающих КАМ сигналов полученные путем оценки дисперсий моделей плотностей (17), (18) методом максимума правдоподобия.

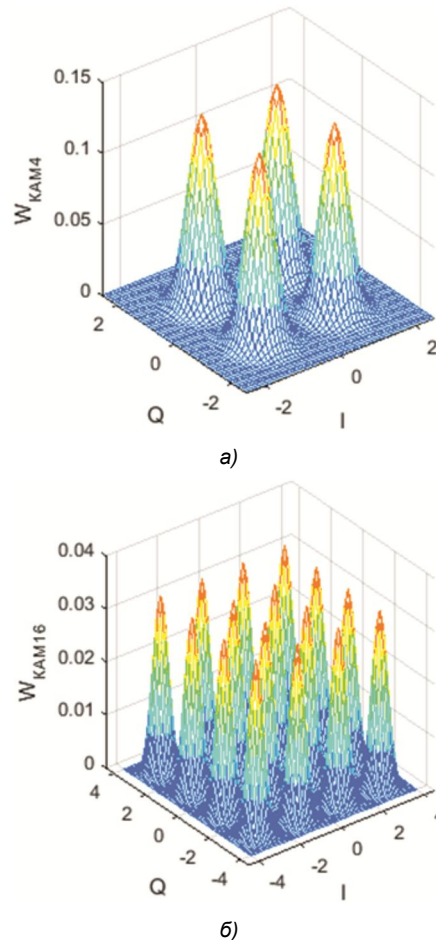


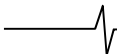
Рис. 5. Плотности распределения вероятностей комплексных огибающих КАМ сигналов: КАМ-4 (а), КАМ-16 (б)

Объем выборки при оценке дисперсии для построения данных плотностей составлял  $K = 100$ . При этом СКО ошибки оценки дисперсии модели (17) или (18) составляет величину порядка  $10^{-2}$ .

### Заключение

В работе получена плотность распределения вероятностей коэффициентов комплексной огибающей КАМ сигнала. Показано, что в случае применения гистограммного метода требуется значительный объем выборки, что недопустимо при анализе сигналов принимаемых из каналов с быстро меняющимися характеристиками.

Поэтому авторами рассмотрено применение метода максимума правдоподобия. Выведено аналитическое выражение функции плотности распределения вероятностей комплексной огибающей для случая сигналов с КАМ-4 и КАМ-16.



Полученные результаты могут найти применение в задачах оценки ОСШ информационных сигналов с КАМ модуляцией.

#### Литература

1. Mardia K.V., Jupp P.E. Directional Statistics. John Wiley & Sons, Inc, 2000.

2. Jammalamadaka S.R., SenGupta A. Topics in Circular Statistics. – Singapore: World Scientific Publishing Co., 2001.

3. Смаль М.С. Бестестовые способы оценивания состояния коротковолнового радиоканала в адаптивных радиолиниях. Дис. на соиск. канд. техн. наук. – Государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, 2018.

4. Патюков В.Г., Патюков Е.В., Силантьев А.А. Оцен-

ка отношения сигнал/шум на основе фазовых флуктуаций сигнала // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. – 2013. – № 4. – С. 1.

5. Xiong F. Digital Modulation Techniques, Second Edition. – Boston: Artech House, Inc, 2006.

6. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – М.: Советское радио, 1966.

7. Сирота А.А. Методы и алгоритмы анализа данных и их моделирование в MATLAB. – СПб.: БХВ-Петербург, 2016.

8. Иглин С.П. Теория вероятностей и математическая статистика на базе MATLAB. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2006.

9. Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов. – М. Наука, 1979.