

УДК 621.396

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ИНФОРМАЦИОННОГО ОБМЕНА ДИСКРЕТНЫМИ СООБЩЕНИЯМИ ПО КАНАЛАМ СВЯЗИ НА ОСНОВЕ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ ВЕРОЯТНОСТИ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

*Цимбал В.А., д.т.н., профессор филиала Военной академии РВСН имени Петра Великого в г. Серпухове, e-mail: tsimbalva@mail.ru;*

*Потапов С.Е., к.т.н., доцент Военной академии РВСН имени Петра Великого, e-mail: 41kaf\_rabota@mail.ru;*

*Потапова И.Д., преподаватель филиала Военной академии РВСН имени Петра Великого в г. Серпухове, e-mail: 41kaf\_rabota@mail.ru*

## MATHEMATICAL MODELING OF THE PROCESSES OF INFORMATION EXCHANGE OF DISCRETE MESSAGES ON COMMUNICATION CHANNELS BASED ON PRODUCING FUNCTIONS OF PROBABILITY OF RANDOM VALUE

*Tsimbal V.A., Potapov S.E., Potapova I.D.*

*The article proposes a new mathematical apparatus for modeling the processes of delivering discrete messages through communication channels with decisive feedback, based on the theory of generating probability functions of a random variable. The substantiation of the consistency of the application of this apparatus for modeling a wide range of processes of information exchange of discrete messages and confirmation of the reliability of the mathematical models obtained with its help are given.*

**Key words:** virtual routes, information exchange, probabilistic-temporal characteristics, Markov inhomogeneous random processes that generate probability functions.

**Ключевые слова:** виртуальные маршруты, информационный обмен, вероятностно-временные характеристики, марковские неоднородные случайные процессы, производящие функции вероятностей.

### Введение

Одной из важных задач проектирования и эксплуатации автоматизированных систем управления (АСУ) критически важными объектами является исследование вероятностно-временных характеристик (ВВХ) доведения многопакетных сообщений (МПС) по каналам связи (КС) АСУ. Отметим, что под ВВХ понимается зависимость вероятности доведения МПС от времени. Подчеркнём, что в отдельных случаях традиционный математический аппарат поглощающих конечных марковских цепей (ПКМЦ) не позволяет получить адекватные результаты моделирования вследствие необходимости одновременного учёта времён и вероятностей переходов неоднородных случайных процессов (СП) [1]. Расширить инструментарий математического моделирования подобных процессов можно с помощью теории производящих функций вероятности дискретной случайной величины следующим образом.

### Обоснование формы производящих функций вероятности

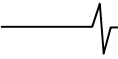
Пусть некоторый дискретный случайный процесс  $\Theta(t)$  может принимать одно из конечного множества состояний  $\{V_1 \dots V_m\}$ . Причём изменение состояний происходит скачкообразно через интервалы времени заданной длины. Пусть заданы также вероятности  $p_{ij} = P\{\Theta(t_k) = V_j | \Theta(t_{k-1}) = V_i\}$  переходов между всеми состояниями,

*Предложен новый математический аппарат моделирования процессов доведения дискретных сообщений по каналам связи с решающей обратной связью, основанный на теории производящих функций вероятности случайной величины. Дано обоснование состоятельности применения этого аппарата для моделирования широкого круга процессов информационного обмена дискретными сообщениями и подтверждение достоверности получаемых с его помощью математических моделей.*

которые не зависят от поведения СП до попадания в состояния, из которых осуществляется переход, а также времена  $\tau_{ij} = T\{\Theta(t_k) = V_j | \Theta(t_{k-1}) = V_i\}$  переходов (шаги) между состояниями, обладающие тем же свойством. Если времена переходов не одинаковы, то есть  $\exists(\tau_{ij} \neq \tau_{ik}) | i \neq l \text{ или } j \neq k$ , но вероятности и времена переходов не изменяются с течением времени, то такой СП описывается неоднородной цепью Маркова [1, 2] (неоднородность выражается различной длительностью времён переходов).

В соответствии с уравнением Колмогорова [2, 3] интервальные переходы из состояния  $V_0$  в состояние  $V_k$ , минуя промежуточные состояния  $V_i$ , могут быть осуществлены с вероятностью  $P_{0k} = P\{\Theta(t) = V_k | \Theta(t_0) = V_0\} = P_{0l} \dots P_{ij} \dots P_{uk}$  за время  $T_{0k} = \tau_{0l} + \dots + \tau_{ij} + \dots + \tau_{uk}$ .

Если существует несколько интервальных переходов из состояния  $V_0$  в состояние  $V_k$  за фиксированное число шагов, то вероятности этих переходов  $P_{0k}^r$  можно также определить перемножением соответствующих переходных вероятностей в соответствии с матрицей переходных вероятностей (МПВ)  $\mathbf{P} = \|p_{ij}\|$ , а времена таких



переходов  $T_{0k}^r$  – суммированием соответствующих шагов переходов в соответствии с матрицей шагов переходов (МШП)  $\mathbf{T} = \|\tau_{ij}\|$  [4]. Таким образом, общая условная вероятность попадания процесса из состояния  $V_0$  в состояние  $V_k$  будет определяться суммой всех интервальных вероятностей  $P_{0k}^\Sigma = \sum_r P_{0k}^r$ . Средневзвешенное время перехода СП из состояния  $V_0$  в состояние  $V_k$  при этом следует определять, как сумму произведений времён интервальных переходов СП на вероятности этих переходов, нормированных к «1»,

$$\bar{T}_{0k} = \sum_r \frac{P_{0k}^r}{P_{0k}^\Sigma} T_{0k}^r. \quad (1)$$

Известная задача определения вероятности попадания СП, описываемого однородной марковской цепью, в состояние  $V_k$  за произвольное количество шагов  $n$  при известном распределении вероятностей пребывания процесса в каждом из возможных состояний в начальный момент времени  $t_0$   $\bar{P}(t_0) = \langle P_j \{ \Theta(t_0) = V_j \} \rangle$ , решается с помощью уравнения Колмогорова-Чепмена (УКЧ) [1, 2] умножением начального вектора распределения вероятностей  $\bar{P}(t_0)$  на МПВ, возведённую в степень  $n$ . Откуда несложно получить условную функцию распределения вероятностей времени попадания процесса из состояния  $V_0$  в состояние  $V_k$   $F_{0k}(t = \tau_{ij} \cdot n)$ , ( $n \in N$ ), приняв  $P_0 \{ \Theta(t_0) = V_0 \} = 1$  и  $P_{j \neq 0} \{ \Theta(t_0) = V_j \} = 0$  [2, 3].

Однако в исследуемом СП шаги переходов имеют различное значение длительности. Поэтому одинаковому количеству шагов переходов из состояния  $V_0$  в состояние  $V_k$  может соответствовать различное время перехода. Для получения функции распределения вероятностей времени попадания процесса из состояния  $V_0$  в состояние  $V_k$   $F_{0k}(t)$  в этом случае требуется для каждого интервального перехода поставить в соответствие вероятность и время этого перехода.

Упростить задачу определения  $F_{0k}(t)$  исследуемого СП можно следующим образом. Формализуем функции распределения вероятностей времени выхода из каждого состояния в виде решётчатой функции [5]

$$F_i(t) = \sum_{j=0}^m p_{ij} \cdot \delta(t - \tau_{ij}), \quad (2)$$

где  $\delta(\bullet)$  – единичная функция Дирака.

По определению [6] производящую функцию моментов распределения вероятностей  $F(t)$  можно получить с помощью преобразования Лапласа от этой функции  $G(s) = L[F(t)]$ . Учитывая свойство линейности преобразования Лапласа и известное его изображение для функции  $L[\delta(t - \tau_{ij})] = e^{-s\tau_{ij}}$ , получим следующее изображение функции  $F_i(t)$

$$G_i(s) = L[F_i(t)] = \sum_{j=0}^m p_{ij} e^{-s\tau_{ij}}. \quad (3)$$

Получить выражение (3) можно также из следующих

рассуждений. Пусть некоторая величина  $\Delta\tau$  является наибольшим общим делителем всех шагов МШП исследуемого СП. Тогда выражение (3) можно записать в виде

$$F_i(t) = \sum_{j=0}^m p_{ij} \cdot \delta(t - \Delta\tau \cdot x_{ij}), \quad (4)$$

где  $x_{ij} = \tau_{ij} / \Delta\tau$ . Опустив величину  $\Delta\tau$  (поскольку она одинакова для всех  $i$  и  $j$ ), получим классическую функцию распределения вероятностей дискретной случайной величины  $F(x)$ , производящая функция которого получается с помощью  $Z$ -преобразования

$$G_i(z) = Z[F_i(x)] = \sum_{j=0}^m p_{ij} Z^{x_{ij}}. \quad (5)$$

Учитывая известную взаимосвязь преобразования Лапласа и  $Z$ -преобразования ( $Z^{x_{ij}} \rightarrow e^{-sx_{ij}}$ ), из выражения (5) можно получить выражение (3), выполнив обратную замену  $\tau_{ij} = x_{ij} \cdot \Delta\tau$ . Последнее подтверждает непротиворечивость выражения (3) фундаментальным аспектам теории производящих функций.

Учитывая свойство функции Дирака  $\delta(t - \tau_{ij}) = \delta(\tau_{ij} - t)$ , а также тот факт, что для этой функции ряд  $\sum_{j=0}^{\infty} e^{-s\tau_{ij}}$  сходится при любом  $|s| \leq 1$ , то для дальнейших рассуждений справедливо будет принять  $e^{-s\tau_{ij}} = e^{s\tau_{ij}}$ .

Таким образом, для каждого возможного состояния, в котором может пребывать исследуемый случайный процесс, получена производящая функция распределения вероятностей времени выхода процесса из этого состояния в виде

$$G_i(s) = \sum_{j=0}^m p_{ij} e^{s\tau_{ij}}. \quad (6)$$

Расположим все слагаемые  $g_{ij}(s) = p_{ij} e^{s\tau_{ij}}$  выражения (6) на соответствующих местах матрицы  $G(s) = \|g_{ij}(s)\|$  для всех  $i$ . В результате получится матрица производящих функций времён переходов исследуемого СП между всеми его возможными состояниями. Подставив полученную таким образом матрицу  $G(s)$  вместо МПВ в УКЧ, получим выражение для определения производящих функций вероятности времени попадания СП в каждое из возможных его состояний за  $n$  шагов. В частном случае производящую функцию вероятностей времени попадания процесса из состояния  $V_0$  в состояние  $V_k$ :  $G_{0k}(s)$ , можно получить в  $k$ -м элементе вектора – решения УКЧ, приняв вероятность пребывания СП с состоянием  $V_0$ :  $P_0 \{ \Theta(t_0) = V_0 \} = 1$ , а остальные начальные вероятности положить  $P_{j \neq 0} \{ \Theta(t_0) = V_j \} = 0$ .

Несложно убедиться, что дискретная функция распределения времени попадания процесса из состояния  $V_0$  в состояние  $V_k$   $F_{0k}(t)$  получается в результате обратного преобразования Лапласа функции  $F_{0k}(t) =$

$= L^{-1}[G_{0k}(s)]$ , а все начальные моменты этого распределения (которые однозначно будут существовать) могут быть получены последовательным дифференцированием функции ( $G_{0k}(s)$ ) при  $s \rightarrow 0$  [6].

Таким образом доказывается состоятельность применения математического аппарата производящих функций вероятности для определения вероятности и времени осуществления интервальных переходов СП, описываемого неэргодической цепью Маркова. В том числе и для СП, соответствующих доведению дискретных сообщений по каналам связи АСУ с решающей обратной связью (РОС).

**Моделирование процессов информационного обмена по отдельным КС**

Рассмотрим простейший процесс передачи однопакетного сообщения по каналу передачи данных с РОС. Традиционно доставка однопакетного сообщения в соединении «точка-точка» моделируется ПКМЦ [8], граф состояний и переходов (ГСП) которой представлен на рис. 1. В информационном обмене участвуют звено передачи данных отправитель (ЗГД-1) и звено передачи данных получатель (ЗГД-2).

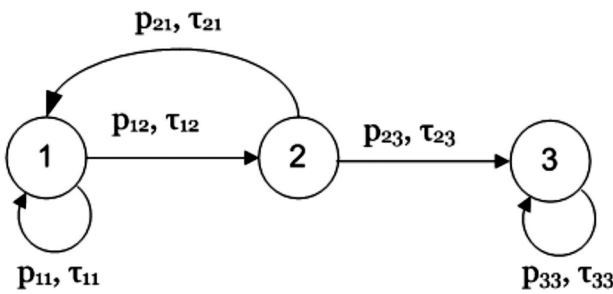


Рис. 1. ГСП доставки однопакетного сообщения по протоколу с РОС

Семантика представленного ГСП такова:

- С<sub>1</sub> – ЗГД-1 выдало очередной повтор пакета (пакета), но пакет на ЗГД-2 не принят;
- С<sub>2</sub> – ЗГД-2 приняло повтор пакета и выдал в ответ квитанцию;
- С<sub>3</sub> – ЗГД-1 квитанцию получило.

МГВ для этого случая будет иметь вид

$$P_{[3,3]} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 \\ p_{21} & 0 & p_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

где  $p_{ij}$  – вероятность перехода из состояния  $C_i$  в состояние  $C_j$ .

Аналогичная МГВ матрица шагов-переходов будет иметь вид

$$T_{[3,3]} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{21} & 0 & \tau_{23} \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}, \tag{8}$$

где  $\tau_{ij}$  – время перехода из состояния  $C_i$  в состояние  $C_j$ .

В общем случае время на передачу пакета не равно времени на передачу квитанции ( $\tau_{1i} \approx \tau_{2j}$ ), поэтому при определении ВВХ процесса доведения потребуется сначала рассчитать среднее время выхода из каждого состояния  $\bar{\tau}_i = \sum_j p_{ij} \cdot \tau_{ij}$ , а затем определять значение

среднего времени перехода процесса на каждом шаге математического моделирования [1]:

$$\bar{\tau}^{(k)} = \sum_i p_i^{(k)} \cdot \tau_i, \tag{9}$$

где  $P_{<3>}^{(k)} = [p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, p_3^{(k)}]$  – вектор распределения вероятностей пребывания процесса в состояниях  $C_i$  на  $k$ -м шаге моделирования, определяемый из решения УКЧ.

В процессе моделирования доведения сообщения получается дискретная функция, описывающая динамику вероятности доведения пакета от времени моделирования.

Проведём моделирование процесса доведения сообщения за  $k = 7$  шагов при следующих исходных данных:

- вероятность доведения пакета  $P_n = 0,9$ ;
- вероятность доведения квитанции  $P_{кв} = 0,95$ ;
- время доведения пакета  $\tau_n = 0,5$  с;
- вероятность доведения квитанции  $\tau_{кв} = 0,1$  с.

Результаты расчётов вероятности доведения пакета от времени представлены в виде графика на рис. 2, а также в табл. 1.

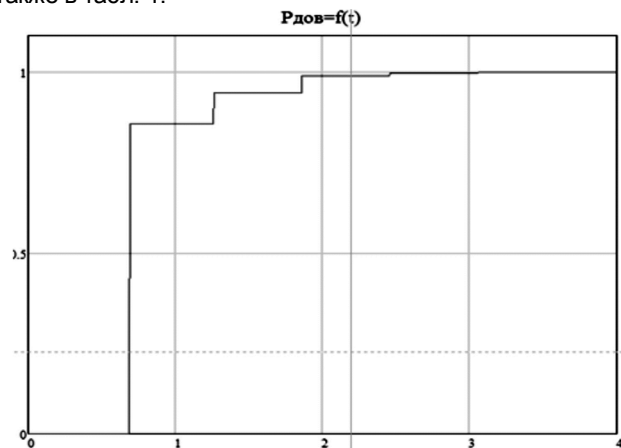


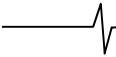
Рис. 2. ВВХ доведения пакета при разных шагах перехода

Из анализа таблицы и графика следует, что, во-первых, первая отличная от нуля вероятность доведения пакета достигается через 0,6895 с после начала сеанса передачи, тогда как из физики процесса данное время должно составлять 0,6 с ( $\tau_n + \tau_{кв}$ ); во-вторых, в результатах расчета вероятности доведения за 7 шагов получено 6 отличных от нуля значений вероятности доведения, тогда как должно быть не меньше 10.

Данные обстоятельства обусловлены усреднением времени перехода процесса на каждом шаге, а также комплексированием вероятностей различных путей по-

Таблица 1. Результаты расчёта ВВХ по УКЧ

$P_{доп}(t)$	0,855	0,9405	0,987	0,996	0,999	0,9997
$t$ (с)	0,6895	1,26375	1,8589	2,4572	3,0569	3,6568



дания процесса в поглощающее состояние в одну величину на каждом шаге моделирования. Причём данные методические погрешности расчёта ВВХ тем сильнее, чем больше разница  $\tau_n - \tau_{кв}$ .

Получить точные ВВХ процесса с различными значениями времён перехода можно с помощью метода введения фиктивных состояний, подробно изложенного в [1], когда в исходном графе состояний и переходов переходы, время которых больше минимального, дополняются цепочкой фиктивных состояний с тем, чтобы время переходов между соседними состояниями было одинаково. Однако, данный подход, приводит к многократному увеличению размера графа состояний и, соответственно МПВ.

Наиболее точный метод анализа временных характеристик неоднородной ПКМЦ с непостоянными по длительности шагами переходов предложен в работе [9]. Однако данный способ расчёта среднего времени и дисперсии времени попадания процесса в поглощающее состояние, во-первых, не позволяет получить полное распределение вероятностей времени попадания процесса в поглощающее состояние, что необходимо для анализа параллельных процессов [10]; во-вторых, не позволяет его развить на случай наличия переходов с функциями распределения времени общего вида.

Получить точные ВВХ процесса доведения сообщений и при этом не прибегать к изменению структуры графа состояний и переходов можно с помощью следующего подхода к анализу марковских процессов с дискретным детерминированным временем, сущность которого заключается в следующем [11].

Применим к МПВ  $\mathbf{P}$  и МШП  $\mathbf{T}$  размерности  $n \times n$  следующее преобразование  $\mathbf{G}(s) = \Theta(\mathbf{P}, \mathbf{T})$ :  $g_{ij}(s) = p_{ij} e^{st_{ij}}$ , где  $s$  – вспомогательная переменная.

Такое преобразование назовём **производящей функцией перехода**, а получаемую при этом матрицу назовём матрицей производящих функций переходов или – **производящей матрицей** [3].

Для нахождения вероятностей попадания исследуемого процесса из начального состояния  $C_i$  в состояние  $C_j$  за конечное число шагов  $k$  введём векторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  размерности  $n$ , элементы которых определяются по правилам:  $a_m = 0 | m \neq i$ ,  $b_m = 0 | m \neq j$ ,  $m = [1, n]$ , тогда искомые вероятности будут содержаться в элементе  $h = \mathbf{A} \cdot \mathbf{G}^k(s) \cdot \mathbf{B}^T = g_{ij}(s)$  [11].

Следовательно, для нахождения ВВХ доведения МПС необходимо получить вероятности перехода процесса из состояния  $C_1$  в состояние  $C_n$ . Тогда после возведения матрицы  $\mathbf{G}(s)$  в степень  $k$  элемент  $g_{1n}$  матрицы  $\mathbf{G}^k(s)$  будет состоять из суммы вида:

$$\begin{aligned} g_{1n}(s) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{G}^k(s) \cdot \mathbf{B}^T = \\ &= P_1 e^{st_1} + P_2 e^{st_2} + \dots + P_l e^{st_l} + \dots + P_L e^{st_L} = \\ &= \sum_{l=1}^L P_l e^{st_l} = \sum_{l=1}^L g_{1n}^{(l)}(s), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $P_l$  – вероятность попадания из  $C_1$  в  $C_n$  за время  $t_l$  и за число шагов процесса меньше или равное  $k$ .

Функция  $g_{1n}(s)$  является производящей функцией распределения вероятностей времени доведения одного пакета по КС за ограниченное число попыток доведе-

ния в соответствии с принятым протоколом управления логическим соединением. Причём данное распределение является усечённым, так как существует отличная от нуля вероятность недоведения сообщения за указанное количество повторов. Поэтому для корректного дальнейшего использования распределения вероятностей времени доведения сообщения за конечное число повторов передачи необходимо его нормировать к единице. Для этого выражение (10) необходимо разделить на сумму вероятностей всех времён успешного доведения сообщения, то есть

$$F_{дог}(t) \Leftrightarrow g_t(s) = (g_{1n}(0))^{-1} g_{1n}(s), \quad (11)$$

где  $F_{дог}(t)$  – функция распределения вероятностей времени доведения сообщения;  $g_t(s)$  – производящая функция вероятности распределения времени доведения сообщения.

Нетрудно заметить, что производящая функция распределения вероятности времени доведения сообщения  $g_t(s)$  является также производящей функцией моментов распределения.

Таким образом, доведение сообщения по КС АСУ за ограниченное число повторов может оказаться успешным с вероятностью  $P_{дог} = g_{1n}(0)$  и неуспешным с вероятностью  $P_{недог} = 1 - P_{дог}$ . При этом условное распределение вероятностей времени успешного доведения сообщения  $F_{дог}(t)$  определяется производящей функцией вида (11), из которого находится искомая вероятность доведения за время, не превышающее заданное

$$P(t \leq t_{зад}) = F_{дог}(t_{зад}) / P_{дог} = (1/P_{дог}) \sum P(t_l) | t_l \leq t_{зад}. \quad (12)$$

Математическое ожидание и дисперсия времени доведения сообщений определяются по выражениям (13-14):

$$m_t = \left. \frac{dg_t(s)}{ds} \right|_{s=0} = \sum_l P(t_l) \cdot t_l, \quad (13)$$

$$D_t = \left. \frac{d^2 g_{(t-m_t)}(s)}{ds^2} \right|_{s=0} = \sum_l [P(t_l) \cdot (t_l - m_t)^2]. \quad (14)$$

Следует отметить, что при определении производящей функции распределения вероятностей времени доведения сообщения за произвольное число повторов передачи степень производящей матрицы  $k$  необходимо выбирать с тем расчётом, чтобы заданное время  $t_{зад} \leq \max\{t_l\}$ . Это можно обеспечить, выбирая  $k = \lceil t_{зад} / \min\{\tau_{ij}\} \rceil$ , где  $\lceil \cdot \rceil$  – оператор округления до целого в большую сторону.

Таким образом, применение операторного способа моделирования процессов доведения сообщений с различными по длительности шагами и меняющимися вероятностями переходов при повторах передачи пакета, позволяет уменьшить размерность графов состояний и переходов таких процессов и соответствующие им МПВ и МШП, а также создаёт математический базис для анализа процессов доведения МПС по виртуальным маршрутам (ВМ) в режиме пакетной коммутации.

#### Подтверждение достоверности математических моделей

Для исследования достоверности результатов применения метода анализа ВВХ доведения МПС с помо-

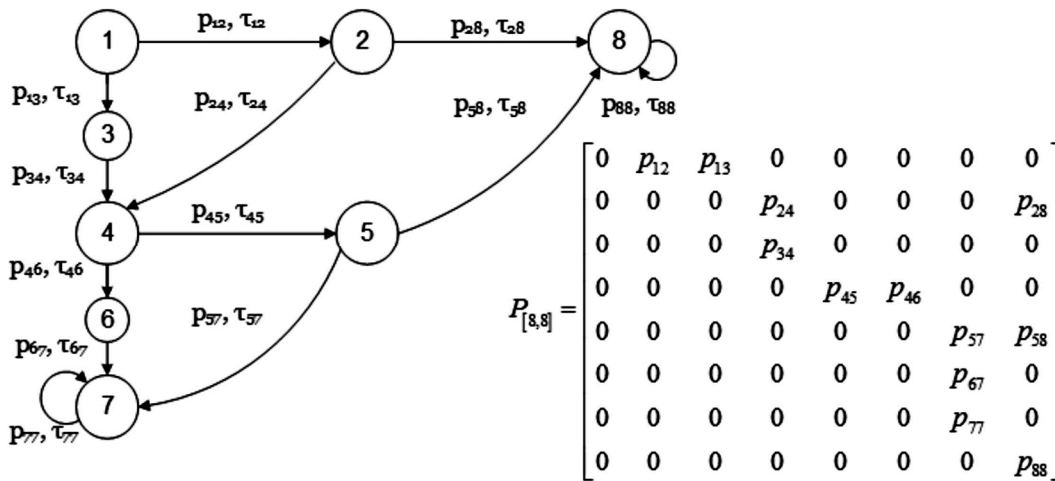


Рис. 3. ГСП и МПВ процесса доведения двухпакетного сообщения по отдельному КС с РОС

стью аппарата производящих функций вероятности времени доведения рассмотрим в аналитическом виде пример доведения двухпакетного сообщения по маршруту, состоящему из двух последовательных КС с различными скоростями передачи данных и вероятностью битовой ошибки. Примем также алгоритм доведения пакетов сообщения в соединении «точка-точка» с РОС. Тогда процесс доведения каждого пакета по одному из КС будет характеризоваться ГСП и МПВ следующего вида:

Однако время доведения является случайной величиной, зависящей от поведения процесса в конкретной реализации. При этом для первого КС:

- с вероятностью  $P_1 = p_n \cdot p_{кв}$  время доведения будет равно  $t_1 = \tau_n + \tau_{кв}$ ;

- с вероятностью  $P_2 = p_n^2 \cdot p_{кв} \cdot q_{кв}$ , время доведения будет равно  $t_2 = 2(\tau_n + \tau_{кв})$ ;

- с вероятностью  $P_3 = p_n \cdot q_n \cdot p_{кв}$ , время доведения будет равно  $t_3 = 2\tau_n + \tau_{кв} + \tau_m$ . Для второго КС аналогично:

- с вероятностью  $R_1 = r_n \cdot r_{кв}$ , время доведения будет равно  $\tau_1 = \theta_n + \theta_{кв}$ ;

- с вероятностью  $R_2 = r_n^2 \cdot r_{кв} \cdot d_{кв}$ , время доведения будет равно  $\tau_2 = 2(\theta_n + \theta_{кв})$ ;

- с вероятностью  $R_3 = r_n \cdot d_n \cdot r_{кв}$ , время доведения будет равно  $\tau_3 = 2\theta_n + \theta_{кв} + \theta_m$ .

Пусть также  $\tau_n < \theta_n$ ;  $\tau_{кв} < \theta_{кв}$ ;  $\tau_m < \theta_m$ ;  $\tau_m > \tau_{кв}$ ;  $\theta_m > \theta_{кв}$ .

Запишем функции распределения вероятностей времени доведения пакета по КС в табличном виде:

$F^{КС1} =$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$F^{КС2} =$	$R_1$	$R_2$	$R_3$
	$t_1$	$t_2$	$t_3$		$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$

При этом справедливо выражение  $t_1 < \tau_1 < t_2 < \tau_2 < t_3 < \tau_3$ .

Возможные варианты поведения процесса доведения двухпакетного сообщения по ВМ представлены на

графе рис. 3. При этом совместная функция распределения времени попадания процесса из состояния  $C_2$  в состояние  $C_3$  в табличном виде будет следующая:

$F^{23} =$	$P_1 R_1 + P_1 R_2 + P_1 R_3$	$P_2 R_2 + P_2 R_3$	$P_3 R_3$
	$t_1$	$t_2$	$t_3$

Совместная функция распределения времени попадания процесса из состояния  $C_2$  в состояние  $C_4$  в табличном виде будет следующая:

$F^{24} =$	$P_2 R_1 + P_3 R_1$	$P_3 R_2$
	$\tau_1$	$\tau_2$

С учётом параллельности процессов передачи обоих пакетов сообщения по разным КС маршрута совместная функция распределения времени попадания процесса из состояния  $C_3$  в состояние  $C_5$  в табличном виде будет следующая:

$F^{35} =$	$P_1 R_1$	$P_1 R_2$	$P_1 R_3$	$P_2 R_2$	$P_2 R_3$	$P_3 R_3$
	$\tau_1 - t_1$	$\tau_2 - t_1$	$\tau_3 - t_1$	$\tau_2 - t_2$	$\tau_3 - t_2$	$\tau_3 - t_3$

Совместная функция распределения времени попадания процесса из состояния  $C_4$  в состояние  $C_5$  в табличном виде будет следующая:

$F^{45} =$	$P_2 R_1$	$P_3 R_1$	$P_3 R_2$
	$t_2 - \tau_1$	$t_3 - \tau_1$	$t_3 - \tau_2$

В результате композиции функций распределения вероятностей времени переходов процесса между состояниями  $C_2$ - $C_3$ - $C_5$  общая интервальная функция распределения вероятностей времени движения процесса  $F^{235}$  будет иметь вид:

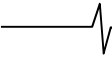
$F^{235} =$	$P_1 R_1$	$P_1 R_2 + P_2 R_2$	$P_1 R_3 + P_2 R_3 + P_3 R_3$
	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$

А в результате композиции функций распределения вероятностей времени переходов процесса между состояниями  $C_2$ - $C_4$ - $C_5$  общая интервальная функция распределения вероятностей времени движения процесса  $F^{245}$  будет иметь вид:

$F^{245} =$	$P_2 R_1$	$P_3 R_1 + P_3 R_2$
	$t_2$	$t_3$

Таким образом, суммарная функция распределения времени попадания процесса из состояния  $C_2$  в состояние  $C_5$   $F^{25} = F^{235} + F^{245}$  имеет следующий вид:

$F^{25} =$	$H_1 = P_1 R_1$	$H_2 = P_2 R_1$	$H_3 = P_1 R_2 + P_2 R_2$	$H_4 = P_3 R_1 + P_3 R_2$	$H_5 = P_1 R_3 + P_2 R_3 + P_3 R_3$
	$\tau_1$	$t_2$	$\tau_2$	$t_3$	$\tau_3$



Но так как обязательным условием попадания процесса в состояние  $C_5$  является завершение обоих подпроцессов доведения пакетов по первому и второму КС маршрута, то из композиции возможных времён доведения пакетов по первому и второму КС при условии одновременного начала этих подпроцессов в интервальную функцию распределения времени попадания процесса из состояния  $C_2$  в состояние  $C_5$  вошли максимальные времена из каждой пары ком-

$$F^{15} = \begin{array}{c|cccccccccc} & P_1H_1 & P_1H_2 & P_1H_3 & P_1H_4 & P_1H_5 & P_2H_1 & P_2H_2 & P_2H_3 & \dots & P_3H_5 \\ \hline & t_1+\tau_1 & t_1+t_2 & t_1+\tau_2 & t_1+t_3 & t_1+\tau_3 & t_2+\tau_1 & 2t_2 & t_2+\tau_2 & \dots & t_3+\tau_3 \end{array}$$

На последнем этапе процесса передачи двухпакетного сообщения второй пакет доводится по второму КС ВМ. При этом общее распределение времени движения процесса из начального состояния  $C_1$  в поглощающее

$$F^{16} = \begin{array}{c|cccccccccc} & P_1H_1R_1 & P_1H_1R_2 & P_1H_1R_3 & \dots & \dots & P_3H_5R_1 & P_3H_5R_2 & \dots & P_3H_5R_3 \\ \hline & t_1+2\tau_1 & t_1+\tau_1+\tau_2 & t_1+\tau_1+\tau_3 & \dots & \dots & t_3+\tau_1+\tau_3 & t_3+\tau_2+\tau_3 & \dots & t_3+2\tau_3 \end{array}$$

Проведём теперь анализ ВВХ этого же процесса (доведение МПС по ВМ) методом моделирования с помощью производящих функций вероятности времени переходов процесса. Для этого введём вместо МПВ и МШП процесса доведения пакета по КС производящую матрицу переходов  $G_{[8,8]}$ , где элементы  $g_{ij} = p_{ij} \cdot e^{st_{ij}}$ .

Для получения производящей функции вероятностей времени доведения пакета по КС возьмём начальный

$$\begin{array}{c|cccccccc} G_1 & G_2 & G_3 & G_4 & G_5 & G_6 & G_7 & G_8 \\ \hline 0 & g_{12} & g_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

На втором шаге вектор будет иметь вид:

$$\begin{array}{c|cccccccc} G_1 & G_2 & G_3 & G_4 & G_5 & G_6 & G_7 & G_8 \\ \hline 0 & 0 & 0 & g_{12} \cdot g_{24} + g_{13} \cdot g_{34} & 0 & 0 & 0 & g_{12} \cdot g_{28} \end{array}$$

На третьем шаге вектор будет иметь вид:

$$\begin{array}{c|cccccccc} G_1 & G_2 & G_3 & G_4 & G_5 & G_6 & G_7 & G_8 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & g_{12} \cdot g_{24} \cdot g_{45} + g_{13} \cdot g_{34} \cdot g_{45} & g_{12} \cdot g_{24} \cdot g_{46} + g_{13} \cdot g_{34} \cdot g_{46} & 0 & g_{12} \cdot g_{28} \end{array}$$

На четвёртом шаге вектор будет иметь вид:

$$\begin{array}{c|cccccccc} G_1 & G_2 & G_3 & G_4 & G_5 & G_6 & G_7 & G_8 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{12} \cdot g_{24} \cdot g_{45} \cdot g_{57} + g_{13} \cdot g_{34} \cdot g_{45} \cdot g_{57} + g_{12} \cdot g_{24} \cdot g_{46} \cdot g_{67} + g_{13} \cdot g_{34} \cdot g_{46} \cdot g_{67} & g_{12} \cdot g_{24} \cdot g_{45} \cdot g_{58} + g_{13} \cdot g_{34} \cdot g_{45} \cdot g_{58} + g_{12} \cdot g_{28} \end{array}$$

На пятом шаге и далее вектор больше не будет изменяться. Таким образом, производящая функция времени попадания процесса из состояния  $C_1$  в состояние  $C_8$ , содержится в 8-м элементе вектора уже после 4-го шага моделирования

$$\begin{aligned} G_{KC1} &= g_{12} \cdot g_{24} \cdot g_{45} \cdot g_{58} + g_{13} \cdot g_{34} \cdot g_{45} \cdot g_{58} + g_{12} \cdot g_{28} = \\ &= \underbrace{p_n^2 q_{K6} P_{K6}}_{P_2} \cdot e^{s(2\tau_n + 2\tau_{K6})} + \\ &+ \underbrace{q_n \cdot 1 \cdot p_n P_{K6}}_{P_3} \cdot e^{s(2\tau_n + \tau_m + \tau_{K6})} + \underbrace{p_n P_{K6}}_{P_1} \cdot e^{s(\tau_n + \tau_{K6})} = \\ &= P_1 e^{st_1} + P_2 e^{st_2} + P_3 e^{st_3} \end{aligned} \quad (15)$$

Аналогично для второго КС

$$G_{KC2} = R_1 e^{st_1} + R_2 e^{st_2} + R_3 e^{st_3} \quad (16)$$

Полученные производящие функции вероятности времени доведения пакетов  $G_{KC1}$  и  $G_{KC2}$  являются базисом процесса доведения МПС по ВМ, состоящему из этих КС. В частности, для определения производящей функции вероятностей времени доведения двухпакетного сообщения можно воспользоваться полученными в

позиции с соответствующими вероятностями.

Далее следует полученное распределение вероятностей времени движения процесса из состояния  $C_2$  в состояние  $C_5$  добавить к распределению вероятностей времени движения процесса из состояния  $C_1$  в состояние  $C_2$ , которое равно  $F^{12} = F^{KC1}$ . В результате получим композицию дискретных распределений вероятности независимых времён в виде:

состояние  $C_6$  будет определяться, как композиция распределений вероятности независимых времён движения процесса на интервалах  $C_1-C_5$  и  $C_5-C_6$ , и оно будет иметь вид:

вектор распределения вероятностей пребывания процесса в возможных состояниях  $\mathbf{V}_{\langle 8 \rangle} = \langle 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$  и будем последовательно умножать его на матрицу  $G_{[8,8]}$ , пока получаемое выражение производящей функции вероятностей времени попадания процесса в состояние  $C_8$  не перестанет изменяться. Таким образом, на первом шаге моделирования получается вектор производящих функций вероятности в виде:

[11] выражениями. Тогда производящая функция времени завершения процесса доведения двухпакетного сообщения по ВМ будет равна

$$G_{16}(s) = G_{KC1}(s) \times \quad (17)$$

$$\times [\pi_{\max(t')} (G_{KC1}(s) \times G_{KC2}(s))] \cdot G_{KC2}(s),$$

где

$$\begin{aligned} \pi_{\max(t')} (G_{KC1}(s) \times G_{KC2}(s)) &= P_1 R_1 e^{st_1} + P_1 R_2 e^{st_2} + \\ &+ P_1 R_3 e^{st_3} + P_2 R_1 e^{st_2} + P_2 R_2 e^{st_2} + \\ &+ P_2 R_3 e^{st_3} + P_3 R_1 e^{st_3} + P_3 R_2 e^{st_3} + P_3 R_3 e^{st_3} = \\ &+ P_2 R_2 e^{st_2} = \underbrace{P_1 R_1}_{H_1} e^{st_1} + \underbrace{P_2 R_1}_{H_2} e^{st_2} + \\ &+ \underbrace{(P_1 R_2 + P_2 R_2)}_{H_3} e^{st_2} + \underbrace{(P_3 R_2 + P_3 R_1)}_{H_4} e^{st_3} + \\ &+ \underbrace{(P_1 R_3 + P_2 R_3 + P_3 R_3)}_{H_5} e^{st_3} = \\ &= H_1 e^{st_1} + H_2 e^{st_2} + H_3 e^{st_2} + H_4 e^{st_3} + H_5 e^{st_3}. \end{aligned} \quad (18)$$

В итоге

$$G_{16}(s) = \quad (20)$$

$$= \underbrace{P_1 R_1 H_1 e^{s(t_1+2\tau_1)} + P_1 R_2 H_1 e^{s(t_1+\tau_1+\tau_2)} + \dots + P_3 R_3 H_5 e^{s(t_3+2\tau_3)}}_{45 \text{ слагаемых}}.$$

Применив обратное преобразование Лапласа, получим  $F_{2KC}^{2n}(t) = L^{-1}[G_{16}(s)] = \sum_{i=1}^{45} P_i \delta(t - T_i)$ , которая совпадает с распределением вероятностей времени доведения сообщения  $F^{16}$ , полученном в табличном виде.

Обратимся ещё раз к выражению (17) для производящей функции вероятностей времени доведения двухпакетного сообщения по ВМ из двух КС. Здесь следует отметить, что операция произведения так же, как и декартового произведения производящих функций, обладает свойством коммутативности [11], т.е.  $(g_1(s) \times g_2(s)) = g_2(s) \times g_1(s)$ . Из анализа выражения (17) вытекает важное следствие: ВВХ доведения  $n$ -пакетного сообщения по 2-канальному ВМ не зависят от порядка следования различных по качеству КС, а зависят только от их распределения вероятностей времени передачи одного пакета по отдельному КС ВМ (базиса).

### Заключение

Таким образом показано, что разработанный метод исследования ВВХ доведения МПС с помощью производящих функций вероятности не противоречит результатам, полученным традиционным способом, однако позволяет существенно сократить вычислительные затраты и автоматизировать процесс получения результата, что важно при анализе и синтезе сетей передачи данных АСУ.

### Литература

1. Цимбал В.А. Информационный обмен в сетях передачи данных. Марковский подход: монография / В.А. Цимбал. – М.: Вузовская книга, 2014. – 144 с.
2. Казаков В.А. Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи. М.: Сов. радио, 1973. – 232 с.
3. Тихонов, В.И. Марковские процессы / В.И. Тихонов, М.А. Миронов. – М.: «Сов. радио», 1977. – 488 с. с ил.
4. Потапов С.Е. Автоматизированный синтез погло-

щающей конечной марковской цепи, описывающей доведение многопакетного сообщения в соединении «точка-точка» системы передачи данных и исследование его оперативности / С. Е. Потапов, В.А. Цимбал, В. Е. Тоискин, В.В. Хоптар, О.И. Сорокин, М.А. Лягин, А.А. Березной, Н.В. Крючков // Радиотехнические и телекоммуникационные системы : науч.-техн. жур. – Муром, 2016. – Вып. 4. (24). – С. 59-65. – ISSN 2221–2574.

5. Склад Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. Изд. 2-е.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1104 с. : ил. – Парал. тит. англ. ISBN 5-8459-0497-8 (рус.).

6. Бостанджиян В.А. Пособие по статистическим распределениям. – Черноголовка. Редакционно-издательский отдел ИПХВ РАН, 2013. 1060 с.

7. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Наука, 2003. – 564 с.

8. Потапов С.Е. Математическая модель доставки сообщений по радиоканалу с высокой вероятностью битовых ошибок / С.Е. Потапов, А.А. Потапова, В.Е. Тоискин // Междун. конф. «Цифровая обработка сигналов и её применение» (DSPA-2019); Доклады; / Рос. науч.-техн. общ. радиотехн., электрон. и связи им. А.С. Попова. – М.: ООО «БРИС-М» – Вып. XXI-1, Т. 1. – С. 237-240.

9. Орехов С.Е. Метод анализа временных характеристик неоднородной поглощающей конечной марковской цепи с непостоянными по длительности шагами переходов / С.Е. Орехов // Теория и техника радиосвязи. 2014. – № 3. – С. 49-57.

10. Потапов С. Е. Исследование процесса передачи информации по виртуальным маршрутам в радиосети системы связи с подвижными объектами / Теория и техника радиосвязи: науч.-техн. жур. – Воронеж, АО «Концерн «Созвездие», 2019. – Вып. 3. – С. 11-23. ISSN 1995-7009.

11. Потапов С. Е. Реляционно-операторный метод математического моделирования передачи многопакетных сообщений по виртуальным маршрутам сети радиосвязи // Научно-технические исследования в космических исследованиях Земли. 2019. – Т. 11. № 6. – С. 61-73. doi: 10.24411/2409-5419-2018-10296.