УЛК 621.391

# АЛГОРИТМ АВТОФОКУСИРОВКИ МЕТОДОМ ОПТИМИЗАЦИИ РЕЗКОСТИ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ БОРТОВОЙ СИСТЕМЫ РАДИОВИДЕНИЯ

Дворянков Д.А., аспирант Рязанского государственного радиотехнического университета им. В.Ф.Уткина, e-mail: dvoryankov.d.a@mail.ru;

Андросов В.В., главный конструктор АО «Государственный Рязанский приборный завод»;

Витязев С.В., к.т.н., доцент Рязанского государственного радиотехнического университета им. В.Ф. Уткина, e-mail: Vityazev.s.v@tor.rsreu.ru

# AUTOFOCUS ALGORITHM FOR INCREASING THE RESOLUTION OF ON-BOARD RADAR IMAGING SYSTEMS BY THE SHARPNESS OPTIMIZATION METHOD

### Dvoryankov D.A., Androsov V.V., Vityazev S.V.

The paper discusses the effectiveness of sharpness optimization method using the sum of various pixel intensity degrees as the sharpness metric of radar image. It is shown that the sharpness optimization radar image autofocusing method gives a better efficiency result compared to traditional image focusing algorithms. Using the methods of the golden-section search and Fibonacci numbers allows to reduce the autofocusing time of radar image by more than 5 times in relation to the direct search method. Recommendations on the choice of determine intensity image pixels degree parameter  $\beta$  are given. In particular, it was found that according to the criterion «quality/recovery time», the best metric is  $[I(x,y)]^2$  ( $\beta=2$ ).

Key words: autofocus, radar image, sharpness optimization, resolution, phase errors, image pixels.

**Ключевые слова:** автофокусировка, радиолокационное изображение, оптимизация резкости, разрешающая способность, фазовые ошибки, пиксели изображения.

#### Введение

При формировании радиолокационных изображений (РЛИ) методом синтезирования апертуры антенны часто сталкиваются с проблемой наличия фазовых ошибок, обусловленных недостаточной информацией о параметрах движения носителя бортовой радиолокационной станции (БРЛС). Это приводит к искажению изображения. Восстановление корректного изображения по сигналу, содержащему такого рода искажения, с учетом имеющейся информации о типе картографируемой поверхности называется автофокусировкой [1]. Широко используемым методом автофокусировки является метод PGA (автофокусировка по градиенту фазы). С его помощью можно добиться довольно точной аппроксимации фазовых ошибок [2]. Однако, метод PGA не всегда дает удовлетворительное решение проблемы автофокусировки. Альтернативный класс методов автофокусировки ис-

называется автофокусировкой [1]. Широко используемым методом автофокусировки является метод PGA (автофокусировка по градиенту фазы). С его помощью можно добиться довольно точной аппроксимации фазовых ошибок [2]. Однако, метод PGA не всегда дает удовлетворительное решение проблемы автофокусировки. Альтернативный класс методов автофокусировки использует подходы на основе оптимизации РЛИ по некоторому критерию резкости изображения. В этих методах компенсация фазовых ошибок производится в процессе оптимизации заданной метрики резкости, оцениваемой по расфокусированному изображению. При этом к задаче оптимизации резкости могут применяться известные оптимизационные подходы, такие как метод градиентного спуска [3], итерационный метод покоординатного спуска [4], метод эллипсоидов и др. Методы, использу-

Проводится исследование эффективности автофокусировки методом оптимизации резкости при использовании в качестве метрики резкости суммы различных степеней интенсивности пикселей радиолокационного изображения (РЛИ). Показано, что автофокусировка РЛИ методом оптимизации резкости даёт положительный результат в тех случаях, когда традиционные алгоритмы восстановления изображения не работают достаточно эффективно. Установлено, что использование метода золотого сечения и метода чисел Фибоначчи позволяет многократно (более чем в 5 раз) уменьшить время автофокусировки РЛИ по отношению к прямому перебору, при соизмеримой точности восстановления. Даются рекомендации по выбору параметра  $\beta$ , определяющего степень интенсивности пикселей изображения. В частности установлено, что по критерию «качество/время восстановления» наилучшей является метрика  $[I(x,y)]^2$  ( $\beta=2$ ).

ющие метрики резкости считаются более надёжными, чем методы PGA.

В данной работе проводится исследование эффективности автофокусировки методом оптимизации резкости при использовании в качестве метрики резкости суммы различных степеней интенсивности пикселей РЛИ.

# Постановка задачи

Формирование РЛИ на завершающем этапе обработки сводится к выполнению обратного быстрого преобразования Фурье (ОБПФ), обеспечивающего разрешение по азимуту [6]:

$$g(x,y) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} u(l,y) e^{j\left(\frac{2\pi}{M}\right)xl},$$
 (1)

где u(l, y) – входные данные после разделения на ка-

налы дальности и компенсации перемещения элементов изображения между каналами дальности за период синтезирования апертуры; g(x,y) — комплексное значение пикселя изображения с координатами (x,y); индексы l и y представляют собой номера периодов зондирования и каналов дальности соответственно; M — количество отсчётов азимута, каждый из которых содержит N дискретных каналов дальности.

В случае наличия фазовых искажений сигнала формулу (1) можно представить в следующем виде:

$$\tilde{g}(x,y) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} u(l,y) e^{j\left(\left(\frac{2\pi}{M}\right)xl + \theta_e(l)\right)},$$
(2)

где  $\, \theta_e(l) \,$  – фазовая ошибка, не зависящая от канала дальности.

Для восстановления изображения необходимо оценить внесённую фазовую составляющую  $\theta_{\scriptscriptstyle e}(l)$ . Один из основных способов решения этой задачи — максимизация метрики резкости РЛИ [5]. Часто применяемой метрикой резкости является квадрат интенсивности, определяемый формулой:

$$C = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} (|\hat{g}(x,y)|^2)^2,$$
 (3)

где  $\left|\hat{g}(x,y)\right|^2 = \hat{g}(x,y)\hat{g}^*(x,y)$  — интенсивность пикселей изображения. Так как формируемое изображение зависит от фазовой ошибки  $\theta_e(I)$ , то резкость изображения следует выразить через оценку этой ошибки, а максимизацию метрики резкости проводить в соответствии со следующим выражением [6]:

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\alpha} C(\theta). \tag{4}$$

Для решения задачи максимизации резкости (4) могут быть применены различные оптимизационные подходы. Простейшим из них является метод полного перебора. Также помимо метрики квадрата интенсивности существует множество других метрик, каждая из которых может быть оптимальной для конкретного случая. Обоснованность применения той или иной метрики сильно зависит от наблюдаемой сцены (какие объекты преобладают и как они расположены). Рассмотрим случаи, когда метрика резкости является интенсивностью в какой-либо степени ( $C = I^{\beta}$ ). Когда изображение содержит очень яркие точечные объекты, вторая производная интенсивности возрастает с ростом самой интенсивности, следовательно, в таких случаях большие значения степени  $\beta$  подходят лучшим образом. Если же сцена не содержит таких ярких точечных объектов (поля, леса), вторая производная убывает с ростом интенсивности, следовательно, следует использовать значения  $\beta$  близкие к единице или меньше неё [3].

В рамках рассматриваемого исследования сформулируем задачу автофокусировки методом оптимизации резкости, как поиск такого алгоритма оценки корректирующей фазовой компоненты  $\hat{\theta}$  (4), который характеризуется минимальным временем реализации при максимальном качестве восстановления РЛИ при использовании в качестве метрики резкости суммы квадратов интенсивности пикселей изображения [3].

### Методы решения поставленной задачи Метод перебора

В качестве исходного изображения было смоделировано простейшее изображение размером 200х100 пикселей с яркими полосами типа «крест» (рис. 1).

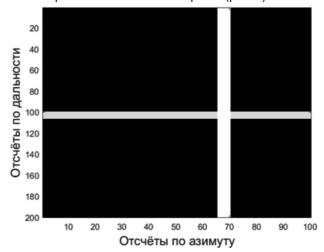


Рис. 1. Исходное сфокусированное изображение

В качестве модели вносимой фазовой ошибки была использована квадратичная фазовая ошибка. Расфокусированное изображение принимает вид, представленный на рис. 2. Обработка изображения проходит независимо для каждого канала дальности [6]. Таким образом, для каждого канала дальности мы подбираем фазовую составляющую, обеспечивающую максимальную метрику резкости для всего изображения. В результате получим восстановленное изображение (рис. 3)

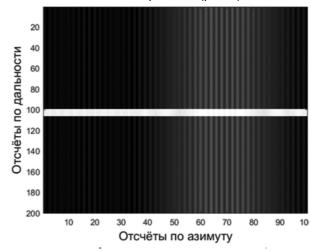


Рис. 2. Расфокусированное изображение

При данных условиях за 2 итерации удалось достигнуть 93 %-го восстановления резкости исходного изображения при шаге перебора  $\pi/64$ . При этом программа на ПЭВМ выполнялась около 3 минут. Здесь и далее точность восстановления рассчитывается как отношение значений метрик исходного и восстановленного изображений.

При использовании реальных данных, регистрируемых радиолокационной станцией миллиметрового диапазона длин волн, такого результата достигнуть не получилось в силу того, что для больших размерностей изображения перебор занимает очень много времени.

Из этого следует, что необходимо рассмотреть возможность применения других, более быстрых, методов поиска максимума. Также следует подробнее изучить вопрос выбора метрики в зависимости от типа исследуемой местности.

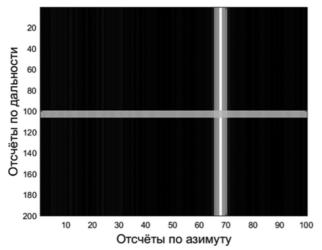


Рис. 3. Сфокусированное изображение

#### Метод золотого сечения

Отметим, что для более эффективного поиска минимума по сравнению с методом перебора лучше использовать методы последовательного поиска, в которых для вычисления очередной точки используется информация, полученная на более ранней стадии расчетов. К таким методам относится метод половинного деления или дихотомии. В этом методе на каждой итерации получаем отрезок, содержащий точку минимума (локализующий отрезок), так, что длина каждого следующего отрезка меньше длины предыдущего. Выгода рассмотренного подхода очевидна - в отличие от пассивного поиска (полного перебора), в методе дихотомии не требуется вычислять значения функции в точках, принадлежащих отбрасываемым на каждом шаге полуинтервалам. Использование такого метода позволило сэкономить на количестве обращений к вычислению функции. Однако в методе дихотомии имеется особенность, позволяющая строить более эффективные алгоритмы. На каждой итерации приходится вычислять значение функции в двух новых точках. Если удастся построить алгоритм так, чтобы каждый раз одна из этих точек совпадала с одной из аналогичных точек с предыдущей итерации, то это бы позволило на каждой итерации вычислять значение функции лишь в одной новой точке и, тем самым, обращаться к вычислению функции еще меньше. Оказывается, это можно сделать с помощью деления отрезка в пропорциях золотого сечения [7].

Рассмотрим симметричные точки  $\chi 1 < \chi 2$ . В дальнейшем мы получим либо отрезок [ $\chi 1$ , b], либо отрезок [a,  $\chi 2$ ]. При этом  $\chi 1$  является одной из точек деления отрезка [a,  $\chi 2$ ], а точка  $\chi 2$  – одна из точек деления отрезка [ $\chi 1$ , b]. Поясним этот метод при a = 0, b = 1. Положим  $\chi 2$  =  $\tau >$  0,5,  $\chi 1$  = 1 –  $\tau$ . Пусть отброшен отрезок [ $\chi 2$ , b], тогда  $\tau / 1$  =  $(1 - \tau) / \tau$ , т.е. отношение большего отрезка ко всему равно отношению меньшего к

большему. Отсюда получаем  $\tau = (\sqrt{5}-1)/2 \approx 0,61803$ . Число  $\tau$  называется отношением золотого сечения. При этом отношение отрезков в процессе счета не изменятся.

Для отрезка [a,b] получаем  $\chi 1=a+(3-\sqrt{5})/2*(b-a);$   $\chi 2=a+(\sqrt{5}-1)/2*(b-a).$  Легко проверить, что  $\chi 1=a+b-\chi 2$ ;  $\chi 2=a+b-\chi 1$ . Аналогичные соотношения сохраняются и для последующих отрезков [8].

Проверим этот метод для нашего тестового изображения 200х100. В результате выполнения программы за 3 итерации метрика изображения восстановилась на 88 %, причём время выполнения оказалось в шесть раз меньшим по сравнению с полным перебором (29 секунд).

#### Метод чисел Фибоначчи

Метод аналогичен методу золотого сечения. Отличие состоит в том, что коэффициент сжатия интервала неопределенности меняется от итерации к итерации согласно последовательности Фибоначчи. Последовательность чисел определяется следующим образом [9]:

$$F_0 = F_1 = 1, F_{k+1} = F_k + F_{k-1}, k = 1, 2, \dots$$
 (5)

Пробные точки  $\lambda_{\scriptscriptstyle k}$  и  $\mu_{\scriptscriptstyle k}$  вычисляют по формулам (10).

$$\lambda_{k} = \alpha_{k} + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}} (b_{k} - a_{k}),$$

$$\mu_{k} = \alpha_{k} + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}} (b_{k} - a_{k}).$$
(6)

При этом число итераций выбирается до начала вычислений и обусловлено требуемой точностью  $\varepsilon = \frac{b_1 - a_1}{F_{\scriptscriptstyle n}}.$ 

Алгоритм нахождения максимума

Шаг 0. Задать  $\varepsilon$ , a>0,  $[a_1,\ b_1]$ , k = 1. Вычислить  $\lambda_1$ ,  $\mu_1$  по формулам (2),  $f(\lambda_k)$ ,  $f(\mu_k)$ .

Шаг 1. Если  $f(\lambda_k) \leq f(\mu_k)$ , то перейти на шаг 2, иначе на шаг 3.

Шаг 2. Положим  $a_{k+1} = \lambda_k$ ,  $b_{k+1} = b_k$ ,  $\lambda_{k+1} = \mu_k$ ,

$$\mu_{k+1} = \alpha_{k+1} + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k}}(b_{k+1} - a_{k+1}).$$

Если k=n-2, то перейти на шаг 5, иначе вычислить  $f(\mu_{k+1})$ , перейти на шаг 4.

Шаг 3. Положим ,  $a_{k+1}=a_k$ ,  $b_{k+1}=\mu_k$ ,  $\mu_{k+1}=\lambda_k$ ,

$$\lambda_{k+1} = \alpha_{k+1} + \frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k}} (b_{k+1} - a_{k+1}).$$

Если k=n-2, то перейти на шаг 5, иначе вычислить  $f(\mu_{k+1})$ , перейти на шаг 4.

Шаг 4. k = k + 1 перейти на шаг 1.

Шаг 5. Положим  $\lambda_n=\lambda_{n-1},\;\mu_n=\lambda_{n+\alpha},\;$  вычислить  $f(\lambda_n)$  и  $f(\mu_n)$ . Если  $f(\lambda_n)\leq f(\mu_n),\;$  то  $a_n=\lambda_n,\;b_n=b_{n-1},\;$  иначе  $a_n+b_n$ 

$$a_n=a_{n-1},\,b_n=\lambda_n.$$
 Оптимальное решение  $x=\frac{a_n+b_n}{2}.$ 

В отличии от методов дихотомии и золотого сечения в методе Фибоначчи не нужно на каждом шаге проверять критерий остановки. Количество шагов здесь задаётся заранее, исходя из выражения  $F_{n+2} \ge (b-a)/\varepsilon$ . Отметим также, что метод Фибоначчи является оптимальным, в том смысле, что позволяет найти решение с заданной точностью при наименьшем количестве обращений к вычислению функции. Это может быть важно, когда вычисление функции связано с дорогостоящими физическими опытами, либо сама функция имеет сложный вид, что делает ее вычисление трудоёмким [7].

Проверим метод чисел Фибоначчи для того же тестового изображения 200х100. В результате выполнения программы за 3 итерации метрика изображения восстановилась на 90 %, причём время выполнения оказалось чуть большим по сравнению с методом золотого сечения (33 секунды).

#### Обработка реального сигнала

Рассмотрим эффективность работы вышеописанных алгоритмов с фрагментом реального радиолокационного изображения (рис. 4). Было проведено тестирование работоспособности метода перебора применительно к фрагменту сигнала размером 50х300.

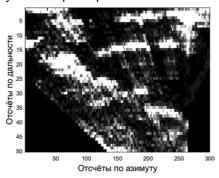


Рис. 4. Исходный фрагмент радиолокационного изображения В результате внесенной расфокусировки фрагмент изображения принимает вид, представленный на рис. 5.

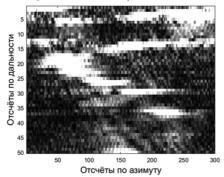


Рис. 5. Расфокусированное радиолокационное изображение

В итоге при шаге перебора  $\pi/64$  за 5 итераций метрика восстановилась на 98,9835 %, причём время выполнения программы на ПЭВМ составило 13 минут. Результат восстановления самого изображения представлен на рис. 6.

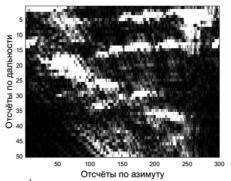


Рис. 6. Сфокусированное радиолокационное изображение методом перебора

Проведём аналогичный эксперимент для методов золотого сечения и чисел Фибоначчи. Для метода золотого сечения за 3 итерации метрика изображения восстановилась на 97,3095 %. При этом само изображение визуально восстановилось также значительно лучше. Ниже на рис. 7 представлены слева направо: исходное, искажённое и восстановленное изображения.

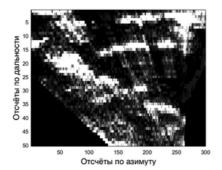
Время выполнения программы составило 66 секунд, что в несколько раз быстрее времени выполнения алгоритма полного перебора.

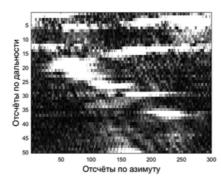
Рассмотрим результат обработки реального сигнала изображения методом чисел Фибоначчи. Для данного метода за 6 итераций метрика изображения восстановилась на 99,4081 %. При этом само изображение визуально восстановилось примерно так же, как и при методе золотого сечения. На рис. 8 представлены слева направо: исходное, искажённое и восстановленное изображения.

Время выполнения программы составило 144 секунды, что немного больше, чем аналогичная величина для метода золотого сечения.

Имеет смысл подбирать оптимальную точность вычислений arepsilon в обоих методах (в данном эксперименте

она была принята  $\frac{\pi}{512}$  ), такую чтобы обеспечить максимальную точность восстановления.





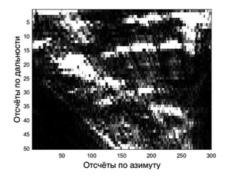


Рис. 7. Результат обработки радиолокационного изображения методом золотого сечения

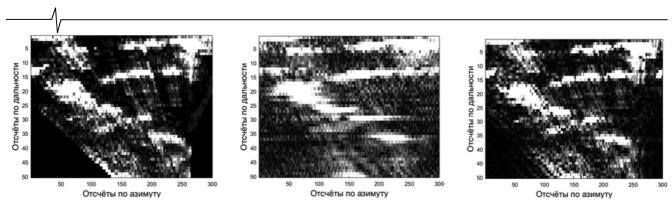


Рис. 8. Результат обработки радиолокационного изображения методом чисел Фибоначчи

## Сравнение разных метрик резкости

Представим метрику резкости изображения как функцию интенсивности.

$$\Gamma[I(x,y)] = [I(x,y)]^{\beta} \tag{7}$$

При этом в зависимости от типа исследуемой поверхности рационально использовать метрику с какимто определённым значением степени  $\beta$ . Важно отметить, что для значений  $\beta$  < 1 метрику необходимо не максимизировать, а минимизировать (либо максимизировать величину, ей отрицательную) [3]. Значения степени  $\beta$ , которые были использованы в эксперименте: 4, 3, 2, 1,5, 0,5. Эксперименты проводились с использованием метода золотого сечения для реального радиолокационного сигнала размера 50х300.

Как видно из табл. 1, значение параметра  $\beta$  сильно влияет на точность восстановления резкости изображения. Из полученных данных можно сделать вывод, что

для радиолокационных изображений исследуемого типа с точки зрения соотношения качество восстановления время выполнения программы оптимальной является метрика  $[I(x,y)]^2$ , в этом случае наблюдается высокая точность восстановления при относительно небольших временных затратах. Если же важно получить максимальную точность восстановления, то рационально использовать метрику  $[I(x,y)]^{1,5}$ . В таблице указано количество итераций, при котором наблюдается значение метрики резкости, максимально приближенное к значению для исходного изображения. Стоит отметить, что по мере увеличения метрики наступает момент, когда она достигает максимально близкого к исходному значению, при этом с каждой итерацией продолжая расти. Поэтому важно вовремя остановить работу алгоритма, причём из табл. 1 видно, что при разных метриках наблюдается различная скорость увеличения метрики от итерации к итерации, что объясняет разброс количества итераций, необходимого для восстановления изображения.

Таблица 1. Сравнение разных метрик резкости

	$\beta = 4$	$\beta = 3$	$\beta = 2$	$\beta = 1.5$	$\beta = 0.5$
Метрика сфокусированного изображения	1,1490e+21	2,6053e+16	7,1540e+11	4,3259e+09	373535
Метрика искажённого изображения	2,2443e+20	8,0828e+15	3,7506e+11	3,0743e+09	513970
Метрика восстановленного изображения	8,4079e+20	2,4065e+16	7,1039e+11	4,3245e+09	396050
Степень восстановления метрики, %	73,18	92,37	99,30	99,97	94,32
Количество итераций восстановления	2	3	6	8	10
Время выполнения программы, с	98,70	147,07	216,66	395,13	395,93
Исходное изображение	$\beta = 4$	$\beta = 3$	$\beta = 2$	$\beta = 1,5$	$\beta = 0.5$

T-6	Chariania	влияния фазовых	~

Вид метрики	Степень фазовой ошибки	Результат восстановления метрики, %	Количество итераций восстановления	Время работы программы, сек	Значение параметра $k$
$\beta = 2$	2	98,9	2	35	0,01
$\beta = 2$	3	78	2	33	0,01
$\beta = 2$	1,5	75	2	37	0,1
$\beta = 3$	2	82	2	44	0,01
$\beta = 3$	2	41	2	44	0,01
$\beta = 3$	2	42	2	44	0,1
$\beta = 1.5$	2	93	3	65	0,01
$\beta = 1.5$	2	98	2	43	0,01
$\beta = 1.5$	2	99	2	43	0,1

Особый интерес также представляет метрика  $\beta$  = 0,5. При её применении метрика возрастает крайне медленно, поэтому в рамках эксперимента работа программы была ограничена 10-ю итерациями. Если повысить это предельное значение, то точность восстановления увеличится, но это займёт большее время, чем для аналогичной метрики  $\beta$  = 1,5.

Исходя из вышесказанного, можно сделать предположение о том, что метрика  $\beta$  = 0,5 весьма полезна, но для данного исследуемого изображения не подходит в силу медленности восстановления.

# **Сравнение влияния разных видов фазовых ошибок** на точность восстановления

Было проведено сравнение влияния разных фазовых ошибок и различных метрик на степень восстановления изображения (табл. 2). Ранее использовалась квадратичная фазовая ошибка с параметром k=0,01. В таблице рассматриваются результаты восстановления для фазовой ошибки второй степени, третьей степени и степени 1,5.

Таким образом, можно убедиться в том, что наиболее точно программа восстановления работает для случая квадратичной фазовой ошибки, то есть когда моделью искажений является ЛЧМ.

#### Заключение

Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы.

- 1. Автофокусировка радиолокационных изображений методом оптимизации резкости даёт положительный результат в тех случаях, когда традиционные алгоритмы восстановления изображения не работают достаточно эффективно.
- 2. Использование метода золотого сечения и метода чисел Фибоначчи позволяет многократно (более чем в 5 раз) уменьшить время автофокусировки радиолокационного изображения по отношению к прямому перебору, при соизмеримой точности восстановления.
  - 3. Тип метрики резкости изображения (степень  $\beta$ ) в

значительной степени влияет на точность восстановления резкости. Даются рекомендации по выбору параметра  $\beta$ . В частности установлено, что по критерию «качество/время восстановления» наилучшей является метрика  $[I(x,y)]^2$ .

Статья подготовлена при поддержке НИИ «Фотон», Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина.

#### Литература

- 1. R.L. Morrison, M.N. Do, D.C. Munson, SAR image autofocus by sharpness optimization: a theoretical study, IEEE Trans. Image Process, vol. 16 (9) (2007), pp. 2309-2321.
- 2. C.V. Jakowatz, Jr., D.E. Wahl, P.H. Eichel, D.C. Ghiglia, and P.A. Thompson, Spotlight-Mode Synthetic Aperture Radar: A Signal Processing Approach., Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996.
- 3. J.R. Fienup and J. J. Miller, «Aberration correction by maximizing generalized sharpness metrics», J. Opt. Soc. Amer. A, vol. 20, no. 4, pp. 609-620, April 2003.
- 4. L. Xi, L. Guosui, and J. Ni, «Autofocusing of ISAR images based on entropy minimization», IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 35, no. 4, pp. 1240-1252, October 1999.
- 5. Schulz, T.J.: «Optimal sharpness function for SAR autofocus», IEEE Signal Process. Lett., 2007, 14, (1), pp. 27-30.
- 6. Gao, Yang; Yu, Weidong; Liu, Yabo; Wang, Robert: «Autofocus algorithm for SAR imagery based on sharpness optimization», Electronics Letters, 2014, 50, (11), pp. 830-832.
- 7. Аббасов М.Э. Методы оптимизации: Учеб. пособие / Аббасов М.Э. СПб.: Издательство «ВВМ», 2014. 64 с.
- 8. Аверинцев М.Б., Корниенко Н.А. Одномерная оптимизация: Конспект лекций. М.: МГУПС (МИИТ), 2016. 41 с.
- 9. Методы одномерной оптимизации: методические указания и задания к выполнению лабораторных работ по дисциплине «Методы оптимизации» / сост. Т.М. Попова. Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2011. 26 с.