

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДОВЕДЕНИЯ МНОГОПАКЕТНЫХ СООБЩЕНИЙ ПО АССИМЕТРИЧНЫМ КАНАЛАМ СВЯЗИ С ПРОЦЕДУРОЙ LLC

*Цимбал В.А., д.т.н., профессор филиала Военной академии РВСН имени Петра Великого г. Серпухов, e-mail: tsimbalva@mail.ru;*

*Потапов С.Е., к.т.н., доцент Военной академии РВСН имени Петра Великого, e-mail: 41kaf\_rabota@mail.ru;*

*Потапова А.А., преподаватель филиала Военной академии РВСН имени Петра Великого г. Серпухов, e-mail: 41kaf\_rabota@mail.ru.*

## MATHEMATICAL MODELS OF MULTI-PACKET MESSAGE DELIVERY BY ASYMETRIC COMMUNICATION CHANNELS WITH THE LLC PROCEDURE

*Tsimbal V.A., Potapov S.E., Potapova A.A.*

*The article presents the main provisions of mathematical models of the processes of delivering multi-packet messages over duplex communication channels with the LLC procedure. Moreover, channels with different quality logical forward and reverse channels are considered. The first of the given mathematical models takes into account the worst quality in terms of the bit error probability of the forward logical data transmission channel. The second of the considered models allows you to determine the timeliness of delivering messages over a connected virtual connection with handshaking at the transport layer of the OSI model.*

**Key words:** virtual route, LLC procedure, information exchange, timing characteristics, finite Markov chains, frame length optimization.

**Ключевые слова:** виртуальный маршрут, процедура LLC, информационный обмен, временные характеристики, конечные марковские цепи, оптимизация длины кадра.

### Введение

Как известно, в дуплексных каналах связи (КС) стека протоколов TCP/IP передача сообщений на канальном уровне осуществляется по процедуре LLC, которая для повышения достоверности использует подтверждение правильности приёма информационных кадров (пакетов) квитанционными кадрами в режиме «скользящего окна» (LLC 2, LLC 3) [1, 2]. При этом за время передачи каждого последующего пакета приёмная сторона успевает передать квитанционный кадр, содержащий информацию о правильном приёме или неприёме предыдущего пакета сообщения. В случае неполучения передающей стороной подтверждающего правильность приёма переданного пакета квитанционного кадра она следующим информационным кадром повторяет передачу неприятого. Размер «скользящего окна» в таком алгоритме информационного обмена соответствует максимальному значению номера кадра в заголовке, а вероятность возникновения пауз при передаче информации, связанных с ожиданием квитанции, ничтожна мала. Такой алгоритм передачи информации на канальном уровне целесообразен при наличии обратного КС (по которому передаются квитанционные кадры) достаточно хорошего качества. То есть, скорость передачи данных и коэффициент битовых ошибок в таком КС позволяет своевременно и достоверно доводить квитанции до начала передачи очередного информационного кадра.

Поскольку на уровне управления логическим кана-

*Приведены основные положения математических моделей процессов доведения многопакетных сообщений по дуплексным каналам связи с процедурой LLC. Рассматриваются каналы с различными по качеству логическими прямым и обратным каналами. Первая из приведённых математических моделей учитывает худшее качество по вероятности битовой ошибки прямого логического канала передачи данных. Вторая из рассматриваемых моделей позволяет определить своевременность доведения сообщений по проклоченному виртуальному соединению с квитированием на транспортном уровне модели OSI.*

лом (LLC) не предусматривается исправление возникающих при передаче ошибок, а осуществляется лишь проверка их отсутствия в принимаемом кадре по контрольной сумме, то любое искажение битов принимаемого кадра повлечёт в дальнейшем его повторную передачу. При этом, как известно, чем больше длина кадра в битах (байтах), тем выше вероятность его искажения при передаче по КС с помехами.

Следует также отметить, что передаваемый информационный кадр любой длительности содержит обязательную служебную часть фиксированного размера. Тогда, чем меньше информационная часть передаваемого кадра, тем больше этих кадров потребуется передать для доведения всего сообщения и, соответственно, больше служебной информации в виде заголовков кадров будет передаваться вместе с полезным сообщением.

Отсюда следует, что увеличение размера передаваемых информационных кадров сообщения с одной стороны уменьшает общее время его передачи за счёт уменьшения доли передаваемой служебной информации заголовков, а с другой стороны - увеличивает вероятность неправильного доведения этих кадров, и, соот-

ответственно, количества повторных их передач, что также увеличивает общее время доведения сообщения. Поэтому актуальной задачей является выбор оптимального значения объёма информационной части пакетов сообщения, обеспечивающего минимальное среднее время его доведения по КС с фиксированным качеством по битовой ошибке.

### Математическая модель доведения многопакетных сообщений по отдельному каналу связи

Для определения оптимального значения объёма информационной части пакетов сообщения разрабатывается и исследуется математическая модель данного процесса на основе аппарата однородных поглощающих конечных марковских цепей (ПКМЦ) [3, 4].

Формализуем процесс доведения сообщений по процедуре LLC следующим образом. Пусть по дуплексному КС с надёжным обратным каналом передаётся информационное сообщение объёмом  $L$  байт. При этом скорость передачи данных и вероятность битовой ошибки в прямом канале составляют соответственно  $V_{\text{пр}}$  бит/с и  $p_0$ . Будем также считать известными длину в байтах информационной  $l_u$  и служебной  $l_c$  частей передаваемых информационных кадров. Тогда общая длина передаваемых кадров составляет  $l_k = l_u + l_c$  байт, а их количество  $n = L/l_u$ .

Процесс передачи многопакетного сообщения начинается с последовательной выдачи двух первых информационных кадров и далее при получении положительной квитанции передаются новые кадры, а при не получении положительной квитанции – повторяется передача предыдущих, т.е. неподтверждённых кадров. Процесс доставки останавливается при получении квитанции о правильном доведении всех информационных кадров передаваемого сообщения.

Таким образом, в исследуемом процессе можно выделить  $n+2$  устойчивых состояния. Их семантика такова:

$S_0$  – начальное состояние процесса, когда на приёмной стороне не получено ни одного информационного кадра сообщения и осуществляется передача первого кадра;

$S_1$  – состояние процесса, при котором приёмная сторона правильно получила первый информационный кадр и осуществляет передачу квитанции об этом событии, либо после ошибочно принятого первого информационного кадра был правильно принят второй. Передающая сторона при этом выдаёт второй информационный кадр сообщения или повторяет первый;

$S_2$  – состояние процесса, при котором приёмная сторона правильно получила два информационных кадра и осуществляет передачу квитанции об этом событии,

передающая сторона выдаёт новый информационный кадр сообщения либо повторяет передачу ранее недоведённого кадра;

....

$S_i$  – состояние процесса, при котором приёмная сторона правильно получила  $i-1$  информационных кадров и осуществляет передачу квитанции об этом событии, передающая сторона выдаёт новый информационный кадр сообщения, либо повторяет передачу ранее недоведённого кадра;

....

$S_{n-1}$  – состояние процесса, при котором приёмная сторона правильно получила  $n-1$  информационных кадров и осуществляет передачу квитанции об этом событии, передающая сторона выдаёт последний недоведённый информационный кадр сообщения;

$S_n$  – состояние процесса, при котором приёмная сторона получила первый информационный кадр, содержащий ошибки, и осуществляет передачу квитанции об этом событии. Передающая сторона выдаёт второй информационный кадр сообщения, ожидая квитанцию на первый;

$S_{n+1}$  – поглощающее состояние процесса, при котором приёмная сторона правильно получила все  $n$  информационных кадров и осуществляет передачу квитанции об этом событии.

Обобщённый граф переходов ПКМЦ, описывающий переходы исследуемого процесса между состояниями, представлен на рис. 1.

При этом переходы «вправо», то есть соответствующие переходу процесса в состояния с большим порядковым номером, осуществляются с вероятностью правильного доведения информационного кадра  $P_{i,i+1} = P_K$ . За исключением перехода  $S_0-S_n$ , который осуществляется с вероятностью ошибочного приёма кадра сообщения  $P_{0n} = 1 - P_K$ . Все переходы процесса «самого в себя» (петли на графе ПКМЦ) осуществляются с вероятностью ошибочного приёма кадра сообщения  $P_{ii} = 1 - P_K$ . За исключением перехода  $S_{n+1}-S_{n+1}$ , который осуществляется с вероятностью, равной «1», поскольку данное состояние является поглощающим  $P_{n+1,n+1} = 1$ .

Поскольку все переходы процесса осуществляются после приёма очередного информационного кадра, то все времена переходов (шаги процесса) равны времени передачи одного информационного кадра ( $t_u = \tau_k = l_k/V_{\text{пр}}$ ).

Таким образом, поведение во времени исследуемого процесса полностью определяется его матрицей переходных вероятностей (МПВ) [3], которая имеет следующий вид

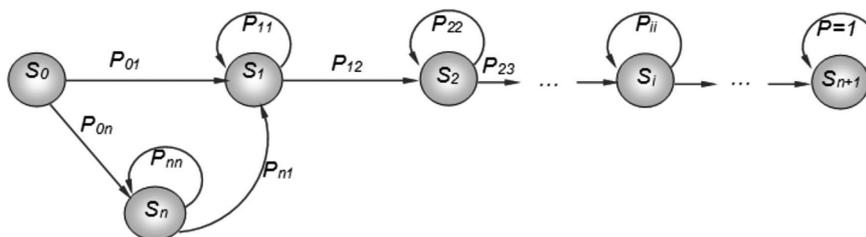


Рис. 1. Граф переходов ПКМЦ для процесса доведения сообщения по процедуре LLC в соединении «точка-точка»

$$\mathbf{P}_{[n+1, n+1]} = \begin{pmatrix} 0 & P_{\kappa} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1-P_{\kappa} & 0 \\ 0 & 1-P_{\kappa} & P_{\kappa} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-P_{\kappa} & P_{\kappa} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-P_{\kappa} & P_{\kappa} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1-P_{\kappa} & 0 & P_{\kappa} \\ 0 & P_{\kappa} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1-P_{\kappa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Среднее значение времени, проводимого процессом до попадания в поглощающее состояние, находится при помощи так называемой фундаментальной матрицы [3].

Для поглощающих цепей фундаментальная матрица  $\mathbf{N}$  определяется соотношением  $\mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$ , где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица;  $\mathbf{Q}$  – правая нижняя подматрица матрицы переходных вероятностей, записанной в каноническом виде [4]:

$$P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Среднее время, проводимое процессом до попадания в поглощающее состояние, при этом будет определяться суммой элементов нижней строки фундаментальной матрицы, умноженной на шаг перехода процесса.

В качестве примера, фундаментальная матрица процесса доведения четырёх информационных кадров сообщения по исследуемому протоколу будет иметь следующий вид

$$\mathbf{N}_{[5,5]} = \begin{pmatrix} 1/P_{\kappa} & 1/P_{\kappa} & 1/P_{\kappa} & 1/P_{\kappa} & 0 \\ 0 & 1/P_{\kappa} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/P_{\kappa} & 1/P_{\kappa} & 0 & 0 \\ 0 & 1/P_{\kappa} & 1/P_{\kappa} & 1/P_{\kappa} & 0 \\ -(P_{\kappa}-1)/P_{\kappa} & 1/P_{\kappa} & 1/P_{\kappa} & 1/P_{\kappa} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

При этом несложно заметить, что сумма элементов последней строки матрицы (3) будет равна  $4/P_{\kappa}$ . Следует также отметить, что фундаментальная матрица процесса доведения  $n$  кадров будет иметь вид, аналогичный (3), а сумма элементов последней её строки всегда будет равна  $n/P_{\kappa}$ . Следовательно, среднее время доведения  $n$  информационных кадров сообщения будет равно

$$\bar{T}_{\text{дов}}(n, P_{\kappa}) = \frac{l_{\kappa} \cdot n}{V_{\text{ПИИ}} \cdot P_{\kappa}}, \quad (4)$$

где  $P_{\kappa} = (1 - p_0)^{8l_{\kappa}}$  поскольку длину пакета принято считать в байтах.

Таким образом, выражение для среднего времени доведения сообщения объёмом  $L$  при известных  $l_c$ ,  $V_{\text{ПИИ}}$ ,  $p_0$ , будет выглядеть следующим образом

$$\bar{T}_{\text{дов}}(l_u) = \frac{(l_u + l_c) \cdot L}{V_{\text{ПИИ}} \cdot l_u \cdot q_0^{(l_u + l_c)}}, \quad (5)$$

где  $q_0 = (1 - p_0)^8$  – вероятность правильного доведения одного байта сообщения.

Графики зависимостей среднего времени доведения сообщения от длины информационной части кадра при

различном значении вероятности битовой ошибки в канале связи изображены на рис. 2.

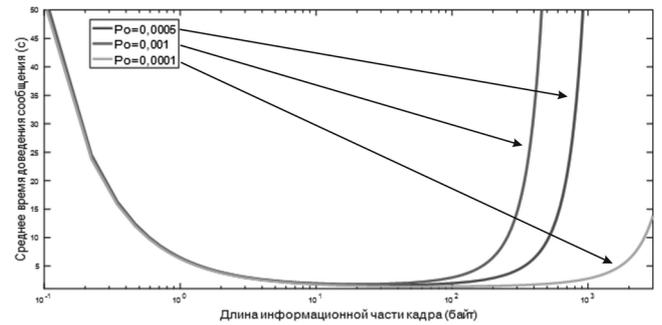


Рис. 2. Графики зависимостей среднего времени доведения сообщения от длины информационной части кадра при  $p_0 = 10^{-4}$ ,  $0.5 \cdot 10^{-4}$ ,  $10^{-3}$

Из анализа представленных графиков следует, что для каждого значения вероятности битовой ошибки существует оптимальное значение длины информационной части кадра, при которой достигается минимальное среднее время доведения сообщения. Для определения этого значения в аналитическом виде продифференцируем выражение (5) по  $l_u$  и приравняем его к нулю. В результате получим следующее уравнение

$$\frac{d\bar{T}_{\text{дов}}(l_u)}{dl_u} = -\frac{L \cdot (\ln(q_0) \cdot l_u^2 + l_c \cdot \ln(q_0) \cdot l_u + l_c)}{V_{\text{ПИИ}} \cdot l_u^2 \cdot q_0^{(l_u + l_c)}} = 0. \quad (6)$$

Рациональное решение уравнения (6) относительно величины  $l_u$  достигается из решения квадратного уравнения

$$\ln(q_0) \cdot l_u^2 + l_c \cdot \ln(q_0) \cdot l_u + l_c = 0, \quad (7)$$

корни которого получаются по выражению

$$l_u = \frac{-\ln(q_0) \cdot l_c \pm \sqrt{(\ln(q_0) \cdot l_c)^2 - 4 \ln(q_0) \cdot l_c}}{2 \ln(q_0)}. \quad (8)$$

Учитывая, что  $\ln(q_0) \leq 0$  при любом допустимом  $q_0$ , то положительное значение  $l_u$  будет обуславливать окончательное выражение

$$l_u^* = \quad (9)$$

$$= -\frac{\ln(q_0) \cdot l_c + \sqrt{(\ln(q_0) \cdot l_c)^2 - 4 \ln(q_0) \cdot l_c}}{2 \ln(q_0)} : \bar{T}_{\text{дов}}(l_u^*) \rightarrow \min,$$

позволяющее определить оптимальное значение длины информационной части кадра, обеспечивающее минимальное среднее время доведения сообщения по каналу связи с известными значениями вероятности битовой ошибки и длины заголовка кадра.

Из полученного результата следует особо отметить, что оптимальное значение длины информационной части кадра не зависит от общей длины передаваемого сообщения и скорости передачи данных в канале связи.

### Математическая модель доведения многопакетных сообщений по виртуальному маршруту

Процесс доведения многопакетных сообщений по составному (виртуальному) маршруту в режиме пакетной коммутации отличается от процесса доведения в соединении «точка-точка» тем, что передаваемые пакеты, «упакованные» в кадры LLC канального протокола, могут быть искажены помехами на любом участке маршрута [5, 6]. При этом транзитные звенья передачи данных зачастую работают по процедуре LLC 1. То есть правильно принятые по одному из портов коммутатора пакеты пересылаются для дальнейшей выдачи на другой порт, затем выдаются, не дожидаясь получения квитанции с подтверждением их правильного получения [7]. В этом случае гарантированность доведения сообщений достигается за счёт квитирования пакетов на транспортном уровне.

Тогда процесс доведения сообщения по виртуальному маршруту может быть формализован следующим образом. Пусть по составному маршруту, состоящему из двух последовательных каналов связи, передаётся информационное сообщение объёмом  $L$  байт. При этом скорости передачи данных в каналах составляют  $V_{III}$  бит/с, а вероятности битовой ошибки соответственно, и  $p_0$  и  $r_0$ . Будем также считать известными длину информационной  $l_u$  и служебной  $l_c$  части передаваемых информационных кадров, содержащих пакеты сообщения. Тогда общая длина передаваемых кадров составляет  $l_k = l_u + l_c$ , а их количество  $n = L/l_u$ .

Процесс передачи сообщения начинается с последовательной выдачи всех информационных кадров. При получении на транспортном уровне положительной квитанции о доведении пакетов повтор их выдачи не производится, а при неполучении положительной квитанции – повторяется передача неподтверждённых пакетов (кадров). Процесс останавливается при получении квитанции о правильном доведении всех пакетов передаваемого сообщения.

Таким образом, в исследуемом процессе можно выделить  $2(n+1)$  устойчивых состояний. Их семантика такова:

$S_0$  – начальное состояние процесса, когда на приёмной стороне и в транзитном звене не получено ни одного информационного кадра сообщения и осуществляется передача первого кадра;

$S_1$  – состояние процесса, при котором приёмная сторона правильно получила первый информационный кадр и осуществляет его передачу по второму каналу получателю, либо после ошибочно принятого первого информационного кадра был правильно принят второй. Передающая сторона при этом выдаёт очередной информационный кадр сообщения;

$S_2$  – состояние процесса, при котором приёмная сторона правильно получила один информационный кадр и осуществляет передачу квитанции об этом событии. Ещё

один информационный кадр был правильно доведён транзитному звену, которое осуществляет его передачу по второму КС получателю. Передающая сторона выдаёт следующий информационный кадр сообщения, либо повторяет передачу ранее недоведённого кадра;

....

$S_i$  – состояние процесса, при котором приёмная сторона правильно получила  $i-1$  информационных кадров и осуществляет передачу квитанции об этом событии. Ещё один информационный кадр был правильно доведён транзитному звену, которое осуществляет его передачу по второму КС получателю. Передающая сторона выдаёт следующий информационный кадр сообщения, либо повторяет передачу ранее недоведённого кадра;

....

$S_n$  – состояние процесса, при котором приёмная сторона правильно получила  $n-1$  информационных кадров и осуществляет передачу квитанции об этом событии. Ещё один информационный кадр был правильно доведён транзитному звену, которое осуществляет его передачу по второму КС получателю. Передающая сторона ожидает квитанции на последний неподтверждённый информационный кадр;

$S_{n+1}$  – состояние процесса, при котором транзитное звено получило первый информационный кадр, содержащий ошибки. Принятый с ошибками кадр не подлежит дальнейшей транспортировке и был стёрт. Передающая сторона выдаёт очередной информационный кадр сообщения.

$S_{n+2}$  – состояние процесса, при котором транзитное звено получило второй информационный кадр, содержащий ошибки. При этом первый кадр был успешно доставлен получателю. Принятый с ошибками кадр был стёрт. Передающая сторона выдаёт очередной информационный кадр сообщения.

....

$S_{n+1+i}$  – состояние процесса, при котором транзитное звено получило очередной информационный кадр, содержащий ошибки. При этом  $i-1$  информационных кадров было успешно доставлено получателю. Принятый с ошибками кадр был стёрт. Передающая сторона выдаёт очередной информационный кадр сообщения.

....

$S_{2n}$  – состояние процесса, при котором транзитное звено получило очередной информационный кадр, содержащий ошибки. При этом  $n-1$  информационных кадров было успешно доставлено получателю. Принятый с ошибками кадр был стёрт. Передающая сторона выдаёт последний недоведённый информационный кадр сообщения.

$S_{2n+1}$  – поглощающее состояние процесса, при котором приёмная сторона правильно получила все  $n$  информационных кадров и осуществляет передачу квитанции об этом событии.

Обобщённый граф переходов ПКМЦ, описывающий переходы исследуемого процесса между состояниями, представлен на рис. 3.

При этом переходы процесса «вправо» между верхними состояниями осуществляются с вероятностями,

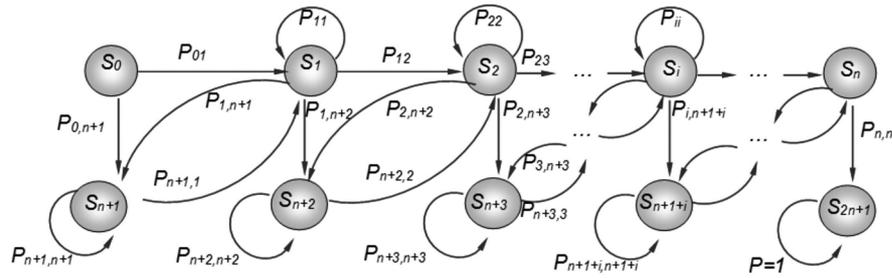


Рис. 3. Граф переходов ПКМЦ для процесса доведения многопакетного сообщения по виртуальному маршруту

соответствующими правильному доведению обоих кадров по двум каналам связи  $P_{i,i+1} = P_{k1} \cdot P_{k2}$ , ( $i = 1..n$ ), за исключением перехода из состояния  $S_0$ , при котором осуществляется передача первого кадра по первому каналу  $P_{01} = P_{k1}$ .

Переходы процесса «самого в себя» для верхних состояний осуществляются с вероятностями, соответствующими правильному доведению кадра по первому КС и ошибочному доведению кадра по второму КС:  $P_{i,i} = P_{k1} \cdot (1 - P_{k2})$ , ( $i = 1..n$ ).

Переходы процесса из верхних состояний в нижние, расположенные на графе строго под исходящими верхними состояниями, осуществляются с вероятностями, соответствующими правильному доведению кадра по второму каналу и ошибочному доведению кадра по первому каналу  $P_{i,n+1+i} = (1 - P_{k1}) \cdot P_{k2}$ , ( $i = 1..n$ ), за исключением перехода из состояния  $S_0$ , при котором осуществляется передача первого пакета по первому каналу  $P_{0,n+1} = 1 - P_{k1}$  и перехода из состояния  $S_n$ , при котором осуществляется передача последнего кадра по второму каналу  $P_{n,2n+1} = P_{k2}$ .

Переходы процесса из верхних состояний в нижние, расположенные на графе левее исходящих верхних состояний, осуществляются с вероятностями, соответствующими ошибочному доведению кадра по первому и второму каналу  $P_{i,n+i} = (1 - P_{k1}) \cdot (1 - P_{k2})$ , ( $i = 1..n$ ), за исключением перехода из состояния  $S_n$ , при котором осу-

ществляется передача последнего кадра по второму каналу  $P_n, 2n = 1 - P_{k2}$ .

Переходы процесса из нижних состояний в верхние осуществляются с вероятностями, соответствующими правильному доведению кадра по первому каналу  $P_{n+i,i} = P_{k1}$ , ( $i = 1..n$ ).

Переходы процесса «самого в себя» для нижних состояний, кроме поглощающего, осуществляются с вероятностями, соответствующими ошибочному доведению кадра по первому каналу:  $P_{n+1+i,n+1+i} = 1 - P_{k1}$ , ( $i = 0..n-1$ ).

Поскольку все переходы процесса осуществляются после одновременного приёма очередных информационных кадров по обоим каналам связи маршрута, то все времена переходов (шаги процесса) равны времени передачи одного информационного кадра ( $t_{ш} = \tau_k = l_k / V_{шл}$ ).

Таким образом, поведение во времени исследуемого процесса полностью определяется его МПВ, которая имеет очевидные правила построения.

Среднее значение времени, проводимого процессом до попадания в поглощающее состояние, так же, как и в предыдущем случае будем находить при помощи фундаментальной матрицы [8].

В качестве примера, фундаментальная матрица процесса доведения четырёх информационных кадров сообщения по маршруту, состоящему из двух последовательных КС, будет иметь следующий вид

$$N_{[9,9]} = \begin{vmatrix} \frac{1}{(P_{k1} \cdot P_{k2})} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{P_{k2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(P_{k1} \cdot P_{k2} - 1) & (P_{k1} \cdot P_{k2} - P_{k1} + 1) & 0 & 0 & \frac{1}{P_{k2}} & \frac{1}{P_{k2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{(P_{k1} \cdot P_{k2})} & \frac{1}{(P_{k1} \cdot P_{k2})} & 0 & 0 & \frac{1}{P_{k2}} & \frac{1}{P_{k2}} & \frac{1}{P_{k2}} & 0 & 0 \\ -(P_{k1} \cdot P_{k2} - 1) & -(P_{k1} - 1) & (P_{k1} \cdot P_{k2} - P_{k1} + 1) & 0 & \frac{1}{P_{k2}} & \frac{1}{P_{k2}} & \frac{1}{P_{k2}} & \frac{1}{P_{k2}} & 0 \\ \frac{1}{(P_{k1} \cdot P_{k2})} & \frac{1}{(P_{k1} \cdot P_{k2})} & \frac{1}{(P_{k1} \cdot P_{k2})} & \frac{1}{(P_{k1} \cdot P_{k2})} & \frac{1}{P_{k2}} & \frac{1}{P_{k2}} & \frac{1}{P_{k2}} & \frac{1}{P_{k2}} & 0 \\ \frac{-(P_{k2} - 1)}{(P_{k1} \cdot P_{k2})} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{P_{k2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(P_{k1} \cdot P_{k2} - 1) & -(P_{k1} + P_{k2} - P_{k1} \cdot P_{k2} - 1) & 0 & 0 & \frac{1}{P_{k2}} & \frac{1}{P_{k2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{(P_{k1} \cdot P_{k2})} & \frac{1}{(P_{k1} \cdot P_{k2})} & 0 & 0 & \frac{1}{P_{k2}} & \frac{1}{P_{k2}} & \frac{1}{P_{k2}} & 0 & 0 \\ -(P_{k1} \cdot P_{k2} - 1) & -(P_{k1} - 1) & -(P_{k1} + P_{k2} - P_{k1} \cdot P_{k2} - 1) & 0 & \frac{1}{P_{k2}} & \frac{1}{P_{k2}} & \frac{1}{P_{k2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{(P_{k1} \cdot P_{k2})} & \frac{1}{(P_{k1} \cdot P_{k2})} & \frac{1}{(P_{k1} \cdot P_{k2})} & 0 & \frac{1}{P_{k2}} & \frac{1}{P_{k2}} & \frac{1}{P_{k2}} & \frac{1}{P_{k2}} & 0 \\ -(P_{k1} \cdot P_{k2} - 1) & -(P_{k1} - 1) & -(P_{k1} - 1) & -(P_{k1} + P_{k2} - P_{k1} \cdot P_{k2} - 1) & \frac{1}{P_{k2}} & \frac{1}{P_{k2}} & \frac{1}{P_{k2}} & \frac{1}{P_{k2}} & 0 \\ \frac{1}{(P_{k1} \cdot P_{k2})} & \frac{1}{(P_{k1} \cdot P_{k2})} & \frac{1}{(P_{k1} \cdot P_{k2})} & \frac{1}{(P_{k1} \cdot P_{k2})} & \frac{1}{P_{k2}} & \frac{1}{P_{k2}} & \frac{1}{P_{k2}} & \frac{1}{P_{k2}} & 1 \\ -(P_{k1} \cdot P_{k2} - 1) & -(P_{k1} - 1) & -(P_{k1} - 1) & -(P_{k1} - 1) & \frac{1}{P_{k2}} & \frac{1}{P_{k2}} & \frac{1}{P_{k2}} & \frac{1}{P_{k2}} & 1 \\ \frac{1}{(P_{k1} \cdot P_{k2})} & \frac{1}{(P_{k1} \cdot P_{k2})} & \frac{1}{(P_{k1} \cdot P_{k2})} & \frac{1}{(P_{k1} \cdot P_{k2})} & \frac{1}{P_{k2}} & \frac{1}{P_{k2}} & \frac{1}{P_{k2}} & \frac{1}{P_{k2}} & 1 \end{vmatrix} \quad (10)$$

При этом после приведения подобных сумма элементов последней строки матрицы (10) будет равна  $(P_{\kappa1+4})P_{\kappa1} \cdot P_{\kappa2}$ . Следует также отметить, что фундаментальная матрица процесса доведения  $n$  кадров по тому же маршруту будет иметь вид, аналогичный (10), а сумма элементов последней её строки всегда будет равна  $(P_{\kappa1+n})P_{\kappa1} \cdot P_{\kappa2}$ . Следовательно, среднее время доведения  $n$  информационных кадров сообщения будет равно

$$\bar{T}_{\text{дос}}(n, P_{\kappa1}, P_{\kappa2}) = \frac{l_{\kappa} \cdot (n + P_{\kappa1})}{V_{\text{III}} \cdot P_{\kappa1} \cdot P_{\kappa2}}, \quad (11)$$

где  $P_{\kappa1} = (1 - p_0)^{8l_{\kappa}}$  и  $P_{\kappa2} = (1 - r_0)^{8l_{\kappa}}$ .

Таким образом, выражение для среднего времени доведения сообщения объёмом  $L$  при известных  $l_c$ ,  $V_{\text{III}}$ ,  $p_0$  и  $r_0$  будет выглядеть следующим образом

$$\bar{T}_{\text{дос}}(l_u) = \frac{(L + l_u \cdot q_1^{(l_u+l_c)}) \cdot (l_u + l_c)}{V_{\text{III}} \cdot l_u \cdot q_1^{(l_u+l_c)} \cdot q_2^{(l_u+l_c)}}, \quad (12)$$

где  $q_1 = (1 - p_0)^8$ ,  $q_2 = (1 - r_0)^8$  – вероятности правильного доведения байта по первому и второму КС маршрута.

Примем во внимание, что отношение  $n / P_{\kappa1} \approx n$  уже при  $p_0 < 10^{-3}$ . Тогда выражение (12) несколько упрощается для анализа:

$$\bar{T}_{\text{дос}}(l_u) = \frac{(L + l_u)(l_u + l_c)}{V_{\text{III}} \cdot l_u \cdot q_1^{(l_u+l_c)} \cdot q_2^{(l_u+l_c)}} \quad (13)$$

Графики зависимости среднего времени доведения сообщения по составному маршруту имеют вид, аналогичный рис. 2. При этом также существует оптимальное значение длины информационной части кадра, при котором достигается минимальное время доведения сообщения по маршруту.

Для определения этого значения в аналитическом виде продифференцируем выражение (13) по  $l_u$  и приравняем его к нулю. В результате после преобразования получим следующее уравнение

$$\frac{d\bar{T}_{\text{дос}}(l_u)}{dl_u} = \frac{l_u^3 \cdot \ln(q_1 \cdot q_2) + l_u^2 \cdot ((L + l_c) \cdot \ln(q_1 \cdot q_2) - 1) + l_u \cdot L \cdot l_c \cdot \ln(q_1 \cdot q_2) + L \cdot l_c}{V_{\text{III}} \cdot l_u^2 \cdot q_2^{(l_u+l_c)} \cdot q_1^{(l_u+l_c)}} = 0. \quad (14)$$

Рациональное решение уравнения (14) относительно величины  $l_u$  достигается из решения кубического уравнения

$$l_u^3 \cdot \ln(q_1 \cdot q_2) + l_u^2 \cdot ((L + l_c) \cdot \ln(q_1 \cdot q_2) - 1) + l_u \cdot L \cdot l_c \cdot \ln(q_1 \cdot q_2) + L \cdot l_c = 0, \quad (15)$$

один из корней которого является положительным рациональным числом.

Решение может быть получено одним из численных методов [9]. Оно позволяет определить оптимальное значение длины информационной части кадра, обеспечивающее минимальное среднее время доведения сообщения по маршруту из двух последовательных каналов связи с известными значениями вероятности битовой ошибки, длины заголовка кадра и объёма передаваемого сообщения.

С другой стороны, для определения оптимального

значения размера передаваемых по составному маршруту информационных кадров можно воспользоваться выражением (5) для каждого из каналов, входящих в маршрут. Тогда решение задачи определения оптимального значения длины информационных кадров может быть получено из выражения вида

$$l_u^* : \max \left( \frac{l_u + l_c}{l_u \cdot q_1^{(l_u+l_c)}}, \frac{l_u + l_c}{l_u \cdot q_2^{(l_u+l_c)}} \right) \xrightarrow{\{l_u\}} \min, \quad (16)$$

которое разрешается одним из методов одномерной нелинейной оптимизации [10, 11].

В результате решения задачи (16) определяется оптимальное значение длины информационной части пакетов сообщения, позволяющее минимизировать среднее время его доведения. Для определения своевременности доведения многопакетного сообщения по 2-канальному маршруту с процедурой LLC1 необходимо синтезировать МПВ  $\mathbf{P}[2n+2; 2n+2]$  процесса доведения с учётом полученного оптимального значения длины пакета  $P_{\kappa1} = (1 - p_0)^{lc+lu}$ ,  $P_{\kappa2} = (1 - r_0)^{lc+lu}$ , а также определить время шага процесса  $\tau_{uu} = (lc + lu^*) / V_{\text{III}}$ .

Допустимое количество шагов процесса определяется из выражения  $Li_{\text{дон}} = \lfloor T_{\text{дон}} / \tau_{uu} \rfloor$ , где  $\lfloor \cdot \rfloor$  – оператор округления до целого в меньшую сторону.

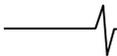
Вероятность непревышения допустимого времени доведения МПС определяется из выражения  $\mathbf{P}_{\text{дон}}^{\text{дон}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^k \cdot \mathbf{B}^T$ , где  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  – векторы размерности  $2n+2$ , элементы которых определяются по правилам:  $a_m = 0 | m \neq 1$ ,  $b_m = 0 | m \neq 2n+1$ ,  $a_1 = 1$ ,  $b_{2n+2} = 1$ ,  $m = [1, \dots, 2n+2]$  [12].

## Заключение

Таким образом, получены необходимые выражения для минимизации времени доведения многопакетных сообщений по прямым КС и составным маршрутам доведения, а также определения вероятности своевременного доведения сообщений. Однако необходимым условием применимости разработанных моделей является постоянное квитиование каждого кадра сообщения параллельно процессу их передачи, а также высокая достоверность передачи квитанций по обратному логическому каналу.

## Литература

- Олифер В.Г. Компьютерные сети. Принципы, технологии, протоколы / В.Г. Олифер, Н.А. Олифер. – СПб., 2012. – 944 с.
- Протоколы информационно-вычислительных сетей: Справочник / С.А. Аничкин С.А. Белов, А.В. Бернштейн и др.; под общ. ред. И.А. Мизин, А.П. Кулешова. – М.: Радио и связь, 1990. – 504 с.: ил. ISBN 5-256-00359-3.
- Казаков В.А. Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи. – М.: Сов. радио, 1973. – 232 с.
- Потапов С.Е. Автоматизированный синтез поглощающей конечной марковской цепи, описывающей доведение многопакетного сообщения в соединении «точка-точка» системы передачи данных и исследование его оперативности / С. Е. Потапов, В.А. Цимбал, В. Е. Тоис-



кин, В.В. Хоптар, О.И. Сорокин, М.А. Лягин, А.А. Бережной, Н.В. Крючков // Радиотехнические и телекоммуникационные системы: науч.-техн. жур. Муром, 2016. – Вып. 4. (24). – С. 59-65. – ISSN 2221–2574.

5. Гольдштейн А.Б., Гольдштейн Б.С. MPLS технология и протоколы. – СПб.: БХВ-Санкт-Петербург, 2005. – 304 с.: ил.

6. Олвейн В. Структура и реализация современной технологии MPLS.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 480 с.: ил.

7. Таненбаум Э., Уэзеролл Д. Компьютерные сети. 5-е изд. – СПб.: Питер, 2012. – 960 с.: ил.

8. Цимбал В.А., Косарева Л.Н., Исаева Т.А., Потапов С.Е., Ваганов И.Н. Математическая модель доставки многопакетных сообщений в соединении «точка-точка» на сети пере-

дачи данных с процедурой «скользящее окно»//Известия Института инженерной физики, 2009. № 3 (13). С. 13-19.

9. Лохмотко В.В., Пирогов К.И. Анализ и оптимизация цифровых сетей интегрального обслуживания. Мн.: Наука и техника. 2001. 192 с.

10. Parker G., Rardin R. Discrete Optimization, Academic Press, Orlando, FL, 1988.

11. Taha H. Integer Programming: Theory, Applications, and Computations, Academic Press, Orlando, FL, 1975.

12. Потапов С. Е. Реляционно-операторный метод математического моделирования передачи многопакетных сообщений по виртуальным маршрутам сети радиосвязи // Научные технологии в космических исследованиях Земли. 2019. Т. 11. № 6. С. 61-73. DOI: 10.24411/2409-5419-2018-10296.