УДК 621.376

АНАЛИЗ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОЦЕДУР КВАДРАТУРНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ОБРАБОТКИ КОМПЛЕКСНЫХ СИГНАЛОВ

***Кузьмин Е.В.,** к.т.н., доцент, доцент кафедры радиотехники ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет»; e-mail: EKuzmin@sfu-kras.ru; kuzminev@mail.ru*

ANALYSIS OF THE FREQUENCY RESPONSES OF THE QUADRATURE CORRELATION PROCESSING OF COMPLEX SIGNALS

Kuzmin E.V.

The frequency responses of classical correlator and two procedures for the quadrature correlation processing of complex signals based on the Fourier transform have been analytically obtained. The considered procedures imply the quadrature transformation of the incoming signal and differ in the method of forming the reference signal. The first method involves preparing the reference signal in the same way as the input one, which is the most common case. The implementation of the second method is focused on a special case – processing a binary phase shift keying signal, while the reference signal is formed by samples of a pseudo-random sequence.

Key words: correlation processing, cross-correlation function, frequency response, phase shift keying signal, Fourier transform.

Ключевые слова: корреляционная обработка, взаимная корреляционная функция, частотная характеристика, фазоманипулированный сигнал, преобразование Фурье.

Аналитическим путём получены частотные характеристики классического коррелятора и двух процедур квадратурной корреляционной обработки комплексных сигналов, использующих преобразование Фурье. Рассмотренные процедуры предусматривают квадратурное преобразование входной реализации и отличаются способом формирования опорного сигнала. Первый способ предполагает подготовку опорного сигнала аналогично входному, что является наиболее общим случаем. Реализации второго способа ориентированы на частный случай – обработку фазоманипулированного сигнала, при этом опорный сигнал образуется отсчётами псевдослучайной последовательности.

Введение

В теории и практике приёма сигналов широкое применение находит квадратурная корреляционная схема (к примеру, [1, стр. 44]; [2, стр. 593]; [3, стр. 123]; [4]), образованная парой корреляторов, вычисляющих значения взаимных корреляционные функций (ВКФ) входной реализации $y(t)$ и квадратурных опорных сигналов. При современном уровне развития программных и аппаратных средств всё чаще встречаются примеры обработки сигналов и вычисления ВКФ на основе дискретного и быстрого преобразования Фурье (например, [3, стр. 502-505]; [5, стр. 263]; [6-12]). На рис. 1 представлена структурная схема, поясняющая одно из возможных типовых решений общего характера для реализации процедуры квадратурной корреляционной обработки на основе преобразования Фурье (ПФ). Данная схема демонстрирует «подготовку» комплексных сигналов [5, стр. 280] и применение к ним широко используемой методики получения ВКФ [5-9]. Здесь и далее для удобства записи и проведения анализа временные процессы и частотные спектры показаны функциями непрерывных аргументов. Как видно из рис. 1, квадратурная «подготовка» комплексного входного сигнала[1] $\dot{a}_{\text{вх}}(t)$ обеспечивается гетеродинированием входной реализации $y(t)$ при помощи комплексного сигнала опорной частоты: $\dot{a}_{\text{вх}}(t) = y(t)\exp(\pm j\omega_{\text{оп}}t)$. Аналогичным образом подготавливается комплексный опорный сигнал – на основе гетеродинирования вещественного опорного сигнала: $\dot{a}_{\text{оп}}(t) = s_{\text{оп}}(t)\exp(\mp j\omega_{\text{оп}}t)$. Известно [13, стр. 494], что при выполнении таких операций над сигналами $y(t)$ и $s_{\text{оп}}(t)$ происходит сдвиг соответствующих им спектров $\dot{Y}(\omega)$ и $\dot{S}_{\text{оп}}(\omega)$, причём направление сдвига спектра определяется знаком показателя экспоненты [5, стр. 280]. Преобразование Фурье сигналов $\dot{a}_{\text{вх}}(t)$ и $\dot{a}_{\text{оп}}(t)$, показанное на рис. 1, 2 в виде оператора $\mathcal{F}(\bullet)$, приводит соответственно к спектрам $\dot{A}_{\text{вх}}(\omega) = \dot{Y}(\omega \mp \omega_{\text{оп}})$ и $\dot{A}_{\text{оп}}(\omega) = \dot{S}_{\text{оп}}(\omega \pm \omega_{\text{оп}})$ [5]; [13]. Перемножение спектров $\dot{A}_{\times}(\omega) = \dot{A}_{\text{вх}}(\omega)\dot{A}^{*}_{\text{оп}}(\omega)$ определяет свёртку соответствующих им сигналов [13, стр. 34], поэтому обратное ПФ $\mathcal{F}^{-1}(\dot{A}_{\times}(\omega))$ приводит к величине, пропорциональной интегралу[2] $\dot{Z}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{a}_{\text{вх}}(t)\dot{a}_{\text{оп}}(t-\tau)\,dt$, представляю-

[1] По тексту статьи точка сверху означает комплексную величину либо указывает на потенциально возможный комплексный характер величины.

[2] При оговоренном проводимом рассмотрении задачи в непрерывном времени и учёте взаимного соответствия операций комплексного сопряжения спектра и временной «перестановки» сигнала.

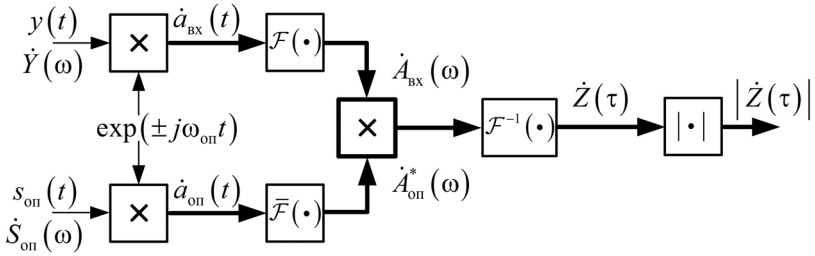

Рис. 1. Обобщённая структурная схема процедуры квадратурной корреляционной обработки, основанной на преобразовании Фурье (случай произвольного опорного сигнала)

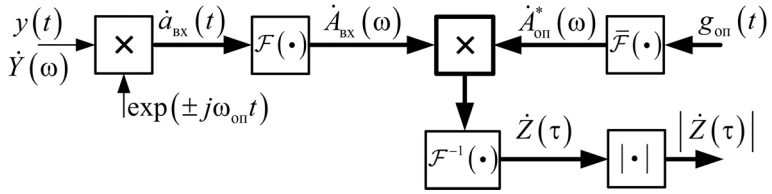

Рис. 2. Структурная схема процедуры вычисления ВКФ входной реализации и опорной ПСП (порождающей ФМ-сигнал) на основе преобразовании Фурье (частный случай реализации квадратурного коррелятора для обработки ФМ-сигнала)

щему собой ВКФ[3] [13, стр. 70]. На рис. 1, 2 операция вычисления модуля показана в виде $|\bullet|$; черта сверху в операторе ПФ $\bar{\mathcal{F}}(\bullet)$ и символ звездочка «$*$» означают комплексное сопряжение.

На рис. 2 показан часто встречающийся частный случай (к примеру, [7-9]), предполагающий реализацию на основе ПФ процедуры квадратурной корреляционной обработки сигнала с фазовой манипуляцией (ФМ), образуемого псевдослучайной последовательностью (ПСП), опорная копия $\dot{a}_{оп}(t) = g_{оп}(t)$ которой формируется в приёмнике. Как видно из рис. 1, 2, общей частью рассматриваемых структурных схем является квадратурное гетеродинирование входной реализации, а отличия заключаются в способе формирования опорного сигнала.

Известно [14, стр. 8], что коррелятор, составляющий основу квадратурной корреляционной схемы, является частотно-избирательным устройством, позволяющим максимизировать выходное отношение «сигнал/помеха» при обработке полезного сигнала в смеси с помехой в виде белого гауссовского шума, что паритетно эффективности согласованного фильтра с точки зрения указанного достигаемого положительного эффекта [14, стр. 11]. Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) согласованного фильтра записывается путём взятия модуля от его комплексной передаточной функции, и с точностью до постоянного множителя определяется амплитудным спектром сигнала, для которого фильтр является согласованным [15, стр. 27]. Однозначная же формализация АЧХ коррелятора не так очевидна по причине «организационных» различий данных подходов, хотя интуитивно понятно, что определяющим фактором, по-прежнему, является спектр полезного сигнала, подаваемого в качестве опорного на один из входов коррелятора. При реализации процедур квадратурной корреляционной обработки за счёт вычисления ВКФ комплексных сигналов[4] на основе ПФ, «прозрачности» в вопросе о форме АЧХ не добавляется. Таким образом, поскольку описание частотных характеристик коррелятора[5] в явном виде в литературе не встречается, а потребность в таком описании может представлять интерес для учёта особенностей его работы, то получение формализации частотных характеристик процедур квадратурной корреляционной обработки (рис. 1, 2) представляется востребованной и полезной научной задачей.

Для решения данной задачи необходимо сделать терминологическую оговорку об определении АЧХ коррелятора, а также обсудить методику её получения. Как известно, АЧХ линейной системы – это модуль отношения комплексных выходной и входной величин, т.е. модуль комплексной передаточной функции [16, стр. 361]; [17, стр. 96]. Следует обязательно заметить, что отклик традиционных линейных фильтров (в т.ч. согласованных) является временны́м процессом, обладающим длительностью не меньшей, чем у входного процесса, а откликом коррелятора[6] является скалярное произведение [15, стр. 25], что существенно отличает коррелятор. Понимание этих отличий делает слегка затруднительным однозначное толкование и определение комплексной передаточной функции коррелятора, которое бы не противоречило общепринятому, и используемому, в частотности, применительно к согласованным фильтрам. Поэтому для проведения анализа будем пользоваться дополнительно оговариваемым обобщённым термином «частотная характеристика коррелятора» (далее частотная характеристика), которую условимся считать зависимостью комплексной выходной величины

[3] Здесь и далее необходимое комплексное сопряжение функции комплексного опорного сигнала [13, стр. 70], находящегося в подынтегральных выражениях, учтено при гетеродинировании.

[4] Получаемых путём гетеродинирования.

[5] Здесь и далее, исходя из контекста, может подразумеваться как классический одноканальный коррелятор, так и процедуры обработки сигналов создаваемые на его основе.

[6] При обработке за время накопления в интеграторе.

(отклика) коррелятора от частоты. Модуль введённой частотной характеристики является аналогом общепринятой и хорошо воспринимаемой АЧХ. Для её определения обратимся к возможной методике [17, стр. 96] и на вход рассматриваемых процедур квадратурной корреляционной обработки будем подавать гармонический тестовый сигнал (ТС) $y(t) = y_{\text{тс}}(t)$ с фиксированной амплитудой. Изменяя частоту входного ТС и проводя фиксацию значения соответствующего ей отклика[7], получим зависимость, которая представляется величиной, пропорциональной искомой частотной характеристике, что и является решением обсуждаемой задачи анализа.

Цель статьи: формализация частотных характеристик двух процедур квадратурной корреляционной обработки, реализуемых на основе преобразования Фурье, при общем и частном виде опорных сигналов, а также вычислительная верификация полученных выражений.

Анализ частотных характеристик процедур корреляционной обработки при наблюдении за время одного периода опорного сигнала

Для формализации частотных характеристик рассматриваемых процедур квадратурной корреляционной обработки, реализуемых за счёт перехода в частотную область и обратно, зададимся моделью гармонического ТС $y_{\text{тс}}(t)$, спектральная плотность $\dot{Y}_{\text{тс}}(\omega)$ которого записывается известным образом [13, стр. 53]:

$$\begin{aligned} &y_{\text{тс}}(t) = A_{\text{тс}}\cos(\omega_{\text{тс}}t + \varphi_{\text{тс}}) \rightleftarrows \dot{Y}_{\text{тс}}(\omega), \\ &\dot{Y}_{\text{тс}}(\omega) = A_{\text{тс}}\pi[e^{j\varphi_{\text{тс}}}\,\delta(\omega-\omega_{\text{тс}}) + e^{-j\varphi_{\text{тс}}}\,\delta(\omega+\omega_{\text{тс}})], \end{aligned} \quad (1)$$

где $A_{\text{тс}}$, $\omega_{\text{тс}}$, $\varphi_{\text{тс}}$ – соответственно амплитуда, угловая частота и начальная фаза ТС; символ «$\rightleftarrows$» означает переход от временной функции к частотной и обратно за счёт пары преобразований Фурье; $\delta(\omega)$ – дельта-функция [13, стр. 43]. Квадратурное гетеродинирование ТС приводит к комплексному сигналу $\dot{a}_{\text{вх}}(t)$, обладающему функцией спектральной плотности $\dot{Y}_{\text{тс}}(\omega-\omega_{\text{оп}})$, смещённой вправо относительно функции $\dot{Y}_{\text{тс}}(\omega)$ [5]; [13]:

$$\begin{aligned} &\dot{A}_{\text{вх}}(\omega) = \dot{Y}_{\text{тс}}(\omega-\omega_{\text{оп}}) \rightleftarrows \dot{a}_{\text{вх}}(t) = y_{\text{тс}}(t)\,e^{j\omega_{\text{оп}}t}, \\ &\dot{Y}_{\text{тс}}(\omega-\omega_{\text{оп}}) = A_{\text{тс}}\pi[e^{j\varphi_{\text{тс}}}\,\delta(\omega-(\omega_{\text{тс}}+\omega_{\text{оп}})) + \\ &+ e^{-j\varphi_{\text{тс}}}\,\delta(\omega+(\omega_{\text{тс}}-\omega_{\text{оп}}))]. \end{aligned} \quad (2)$$

Произвольный опорный сигнал $s_{\text{оп}}(t) \rightleftarrows \dot{S}_{\text{оп}}(\omega)$, подвергнутый операции гетеродинирования, образует комплексный опорный сигнал $\dot{a}_{\text{оп}}(t)$ со спектральной плотностью [5]; [13]:

$$\dot{A}_{\text{оп}}(\omega) = \dot{S}_{\text{оп}}(\omega+\omega_{\text{оп}}) \rightleftarrows \dot{a}_{\text{оп}}(t) = s_{\text{оп}}(t)\,e^{-j\omega_{\text{оп}}t}. \quad (3)$$

Выходная величина процедуры квадратурной корреляционной обработки, формируемая за время одного периода работы T, определяется на основе скалярного произведения комплексных сигналов $\dot{Z} = <\dot{a}_{\text{вх}}(t), \dot{a}_{\text{оп}}(t)>$, которое может быть вычислено в частотной области [13, стр. 34]; [18, стр. 56]:

$$\dot{Z} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{a}_{\text{вх}}(t)\dot{a}_{\text{оп}}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{A}_{\text{вх}}(\omega)\dot{A}^{*}_{\text{оп}}(\omega)\,d\omega. \quad (4)$$

Выражение (4) является аналитической основой для вычисления выходной величины процедуры квадратурной корреляционной обработки при произвольных входных и опорных сигналах. Подставим спектральные плотности (2) и (3) в выражение для скалярного произведения (4) и, таким образом, оценим отклик[8] рассматриваемой процедуры на ТС. Вычислительная работа приводит к следующим результатам для скалярного произведения и его модуля

$$\begin{aligned} &\dot{Z} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{Y}_{\text{тс}}(\omega-\omega_{\text{оп}})\dot{S}^{*}_{\text{оп}}(\omega+\omega_{\text{оп}})\,d\omega = \\ &= \frac{A_{\text{тс}}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[e^{j\varphi_{\text{тс}}}\,\delta(\omega-(\omega_{\text{тс}}+\omega_{\text{оп}})) + \\ &+ e^{-j\varphi_{\text{тс}}}\,\delta(\omega+(\omega_{\text{тс}}-\omega_{\text{оп}}))]\dot{S}^{*}_{\text{оп}}(\omega+\omega_{\text{оп}})d\omega = \\ &= \frac{A_{\text{тс}}}{2}\left(e^{j\varphi_{\text{тс}}}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-(\omega_{\text{тс}}+\omega_{\text{оп}}))\dot{S}^{*}_{\text{оп}}(\omega+\omega_{\text{оп}})\,d\omega + \right. \\ &\left. + e^{-j\varphi_{\text{тс}}}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega+(\omega_{\text{тс}}-\omega_{\text{оп}}))\dot{S}^{*}_{\text{оп}}(\omega+\omega_{\text{оп}})\,d\omega\right) = \\ &= \frac{A_{\text{тс}}}{2}\left[e^{j\varphi_{\text{тс}}}\,\dot{S}^{*}_{\text{оп}}(\omega_{\text{тс}}+2\omega_{\text{оп}}) + e^{-j\varphi_{\text{тс}}}\,\dot{S}^{*}_{\text{оп}}(2\omega_{\text{оп}}-\omega_{\text{тс}})\right]; \\ &\left|\dot{Z}\right| = \frac{A_{\text{тс}}}{2}\left|e^{j\varphi_{\text{тс}}}\,\dot{S}^{*}_{\text{оп}}(\omega_{\text{тс}}+2\omega_{\text{оп}}) + e^{-j\varphi_{\text{тс}}}\,\dot{S}^{*}_{\text{оп}}(2\omega_{\text{оп}}-\omega_{\text{тс}})\right|. \end{aligned} \quad (5)$$

Подстановка в (4) сигналов $\dot{a}_{\text{вх}}(t) = y(t) \rightleftarrows \dot{Y}(\omega)$ и $\dot{a}_{\text{оп}}(t) = s_{\text{оп}}(t) \rightleftarrows \dot{S}_{\text{оп}}(\omega)$ позволяет получить отклик классического одноканального коррелятора [15, стр. 26], т.е. скалярное произведение $\dot{Z} = <y(t), s_{\text{оп}}(t)> = \int_0^T y(t)\,s_{\text{оп}}(t)\,dt$ [15, стр. 25]. При этом частотная характеристика, а также и её модуль, могут быть найдены с использованием (1) и (4) по аналогии с (5):

$$\begin{aligned} &\dot{Z} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{Y}_{\text{тс}}(\omega)\dot{S}^{*}_{\text{оп}}(\omega)\,d\omega = \\ &= \frac{A_{\text{тс}}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[e^{j\varphi_{\text{тс}}}\,\delta(\omega-\omega_{\text{тс}}) + e^{-j\varphi_{\text{тс}}}\,\delta(\omega+\omega_{\text{тс}})]\dot{S}^{*}_{\text{оп}}(\omega)\,d\omega = \\ &= \frac{A_{\text{тс}}}{2}[e^{j\varphi_{\text{тс}}}\,\dot{S}^{*}_{\text{оп}}(\omega_{\text{тс}}) + e^{-j\varphi_{\text{тс}}}\,\dot{S}^{*}_{\text{оп}}(-\omega_{\text{тс}})]; \\ &\left|\dot{Z}\right| = \frac{A_{\text{тс}}}{2}\left|e^{j\varphi_{\text{тс}}}\,\dot{S}^{*}_{\text{оп}}(\omega_{\text{тс}}) + e^{-j\varphi_{\text{тс}}}\,\dot{S}^{*}_{\text{оп}}(-\omega_{\text{тс}})\right|. \end{aligned} \quad (6)$$

При проведении интегрирования в (5), (6) учтено фильтрующее свойство дельта-функции [13, стр. 44]. Полученные выражения (5), (6) определяют величины, пропорциональные частотным характеристикам для процедуры квадратурной корреляционной обработки и классического одноканального коррелятора соответст-

[7] В момент окончания корреляционной обработки.

[8] В одной «точке».

венно при опорном сигнале произвольного вида. Как видно из (5), (6) поведение функций $\dot{Z}(\omega_{тс})$ и $|\dot{Z}(\omega_{тс})|$ определяется спектральной плотностью $\dot{S}_{оп}(\omega)$ сигнала $s_{оп}(t)$, на который «настроена» корреляционная схема. Выражения (5), (6) обладают общностью и позволяют производить учёт нюансировки, связанной со спектром конкретного сигнала и особенностями последующей обработки, к примеру – с возведением в квадрат значений откликов. Кроме того, далее будет показано, что при несложной модификации выражения (5), (6) позволяют получать частотные характеристики процедур корреляционной обработки при М-кратном увеличении времени накопления (интегрирования).

Поинтересуемся формой частотной характеристики процедуры квадратурной корреляционной обработки (рис. 1) для случая её «настройки» на полезный ФМ-сигнал $s_{оп}(t)$ [3, стр. 86]; [15, стр. 39]:

$$
\begin{aligned}
&s_{оп}(t) = A_{оп} g_{оп}(t)\cos(\omega_{оп}t + \varphi_{оп}),\\
&g_{оп}(t) = \sum_{l=1}^{L} g_{оп\,l}\,\mathrm{rect}(t-(l-1)T_g),\\
&g_{оп\,l} = \{\pm 1\}_{l=1}^{L},\ t\in[0,T],\\
&T = LT_g,\ \mathrm{rect}(t) = \begin{cases}1, t\in[0,T_g],\\ 0, t\notin[0,T_g],\end{cases}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где $g_{оп}(t)$ – видеосигнал бинарной ПСП $g_{оп\,l}$ длины L, спектральная плотность $\dot{G}_{оп}(\omega)$ которого записывается в виде [15, стр. 40]

$$
\begin{aligned}
&g_{оп}(t) \rightleftarrows \dot{G}_{оп}(\omega) = \dot{G}_{оп\,0}(\omega)\sum_{l=1}^{L} g_{оп\,l}\,\mathrm{e}^{-j\omega(l-1)T_g},\\
&\dot{G}_{оп\,0}(\omega) = \frac{1}{j\omega}(1-\mathrm{e}^{-j\omega T_g}) =\\
&= T_g\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T_g}{2}\right)\mathrm{e}^{-j\omega\frac{T_g}{2}},\ \mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x},
\end{aligned}
\tag{8}
$$

и позволяет на основе известного свойства преобразования Фурье [13, стр. 32] записать спектральную плотность вещественного опорного ФМ-сигнала (7)

$$
\begin{aligned}
&\dot{S}_{оп}(\omega) \rightleftarrows s_{оп}(t) = A_{оп} g_{оп}(t)\cos(\omega_{оп}t + \varphi_{оп}),\\
&\dot{S}_{оп}(\omega) = \frac{A_{оп}}{2}\left[\mathrm{e}^{j\varphi_{оп}}\,\dot{G}_{оп}(\omega-\omega_{оп}) + \mathrm{e}^{-j\varphi_{оп}}\,\dot{G}_{оп}(\omega+\omega_{оп})\right].
\end{aligned}
\tag{9}
$$

В выражении (8) $\dot{G}_{оп\,0}(\omega)$ – спектральная плотность одиночного парциального импульса ПСП (прямоугольного rect-импульса длительности T_g) [15, стр. 40]; [16, стр. 261].

Нетрудно показать, что подстановка функции $\dot{G}_{оп}(\omega)$ (8) в (9) приводит к результату, исчерпывающе описывающему спектральную плотность несмещённого опорного сигнала (7) для произвольных параметров. Указанная подстановка приводит к следующему выражению:

$$
\begin{aligned}
&\dot{S}_{оп}(\omega) = \frac{A_{оп}}{2}\Bigg[\mathrm{e}^{j\varphi_{оп}}\,\frac{(1-\mathrm{e}^{-j(\omega-\omega_{оп})T_g})}{j(\omega-\omega_{оп})}\times\\
&\times\sum_{l=1}^{L} g_{оп\,l}\,\mathrm{e}^{-j(\omega-\omega_{оп})(l-1)T_g} +\\
&+\mathrm{e}^{-j\varphi_{оп}}\,\frac{(1-\mathrm{e}^{-j(\omega+\omega_{оп})T_g})}{j(\omega+\omega_{оп})}\sum_{l=1}^{L} g_{оп\,l}\,\mathrm{e}^{-j(\omega+\omega_{оп})(l-1)T_g}\Bigg] =\\
&= \frac{A_{оп}T_g}{2}\Bigg[\mathrm{e}^{j\varphi_{оп}}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{(\omega-\omega_{оп})T_g}{2}\right)\times\\
&\times\mathrm{e}^{-j(\omega-\omega_{оп})\frac{T_g}{2}}\sum_{l=1}^{L} g_{оп\,l}\,\mathrm{e}^{-j(\omega-\omega_{оп})(l-1)T_g} +\\
&+\mathrm{e}^{-j\varphi_{оп}}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{(\omega+\omega_{оп})T_g}{2}\right)\mathrm{e}^{-j(\omega+\omega_{оп})\frac{T_g}{2}}\sum_{l=1}^{L} g_{оп\,l}\,\mathrm{e}^{-j(\omega+\omega_{оп})(l-1)T_g}\Bigg].
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Спектральная плотность (9) и её «расширенная» версия (10) позволяют производить учёт различных манипуляций над сигналом, к примеру – внесение задержки, смещение частоты.

Подстановка спектральной плотности (10) в (5) даёт искомые характеристики при опорном сигнале вида (7). Для уменьшения громоздкости выкладок, при записи данных характеристик, подставим спектральную плотность (9) в (5) и для скалярного произведения (а также его модуля) тестового сигнала (1) и опорного сигнала (7), подвергнутых квадратурному гетеродинированию, запишем

$$
\begin{aligned}
&\dot{Z} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{Y}_{тс}(\omega-\omega_{оп})\,\dot{S}^{*}_{оп}(\omega+\omega_{оп})\,d\omega =\\
&= \frac{A_{тс}}{2}\left[\mathrm{e}^{j\varphi_{тс}}\,\dot{S}^{*}_{оп}(\omega_{тс}+2\omega_{оп}) + \mathrm{e}^{-j\varphi_{тс}}\,\dot{S}^{*}_{оп}(2\omega_{оп}-\omega_{тс})\right] =\\
&= \frac{A_{тс}A_{оп}}{4}\Big[\mathrm{e}^{j\varphi_{тс}}(\mathrm{e}^{-j\varphi_{оп}}\,\dot{G}^{*}_{оп}(\omega_{тс}+\omega_{оп}) +\\
&+\mathrm{e}^{j\varphi_{оп}}\,\dot{G}^{*}_{оп}(\omega_{тс}+3\omega_{оп})) +\\
&+\mathrm{e}^{-j\varphi_{тс}}(\mathrm{e}^{-j\varphi_{оп}}\,\dot{G}^{*}_{оп}(\omega_{оп}-\omega_{тс}) + \mathrm{e}^{j\varphi_{оп}}\,\dot{G}^{*}_{оп}(3\omega_{оп}-\omega_{тс}))\Big];\\
&\left|\dot{Z}\right| = \frac{A_{тс}A_{оп}}{4}\Big|\mathrm{e}^{j\varphi_{тс}}\,\mathrm{e}^{-j\varphi_{оп}}\,\dot{G}^{*}_{оп}(\omega_{тс}+\omega_{оп}) +\\
&+\mathrm{e}^{j\varphi_{тс}}\,\mathrm{e}^{j\varphi_{оп}}\,\dot{G}^{*}_{оп}(\omega_{тс}+3\omega_{оп}) +\\
&+\mathrm{e}^{-j\varphi_{тс}}\,\mathrm{e}^{-j\varphi_{оп}}\,\dot{G}^{*}_{оп}(\omega_{оп}-\omega_{тс}) + \mathrm{e}^{-j\varphi_{тс}}\,\mathrm{e}^{j\varphi_{оп}}\,\dot{G}^{*}_{оп}(3\omega_{оп}-\omega_{тс})\Big|.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

При выводе (11) учтено, что

$$
\begin{aligned}
&\dot{S}^{*}_{оп}(\omega) = 0{,}5A_{оп}[\mathrm{e}^{-j\varphi_{оп}}\,\dot{G}^{*}_{оп}(\omega-\omega_{оп}) + \mathrm{e}^{j\varphi_{оп}}\,\dot{G}^{*}_{оп}(\omega+\omega_{оп})],\\
&\dot{S}^{*}_{оп}(\omega_{тс}+2\omega_{оп}) =\\
&= 0{,}5A_{оп}[\mathrm{e}^{-j\varphi_{оп}}\,\dot{G}^{*}_{оп}(\omega_{тс}+\omega_{оп}) + \mathrm{e}^{j\varphi_{оп}}\,\dot{G}^{*}_{оп}(\omega_{тс}+3\omega_{оп})],\\
&\dot{S}^{*}_{оп}(2\omega_{оп}-\omega_{тс}) =\\
&= 0{,}5A_{оп}[\mathrm{e}^{-j\varphi_{оп}}\,\dot{G}^{*}_{оп}(\omega_{оп}-\omega_{тс}) + \mathrm{e}^{j\varphi_{оп}}\,\dot{G}^{*}_{оп}(3\omega_{оп}-\omega_{тс})].
\end{aligned}
$$

Полученные выражения (11) описывают частную характеристику процедуры квадратурной корреляционной обработки ФМ-сигнала на основе структурной схемы, показанной на рис. 1.

Далее, проведём формализацию, аналогичную (5), для случая реализации процедуры квадратурной корреляционной обработки на основе структурной схемы, показанной на рис. 2. Данный случай, в отличие от предыдущего (рис. 1), ориентирован исключительно на обра-

[9] В случае (12) подразумевается группа из опорных ПСП.

ботку ФМ-сигналов. Подставляя в (4) спектральную плотность ТС (2), спектральную плотность видеосигнала бинарной ПСП, а также применяя упомянутое ранее фильтрующее свойство дельта-функции, получим выражения для $\dot{Z}$ и $|\dot{Z}|$:

$$\dot{Z} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{Y}_{\text{тс}}(\omega-\omega_{\text{оп}})\dot{G}^{*}_{\text{оп}}(\omega)\,d\omega =$$

$$= \frac{A_{\text{тс}}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\mathrm{e}^{j\varphi_{\text{тс}}}\,\delta(\omega-(\omega_{\text{тс}}+\omega_{\text{оп}}))+$$

$$+\mathrm{e}^{-j\varphi_{\text{тс}}}\,\delta(\omega+(\omega_{\text{тс}}-\omega_{\text{оп}}))\Big]\dot{G}^{*}_{\text{оп}}(\omega)d\omega =$$

$$= \frac{A_{\text{тс}}}{2}\Bigg(\mathrm{e}^{j\varphi_{\text{тс}}}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-(\omega_{\text{тс}}+\omega_{\text{оп}}))\dot{G}^{*}_{\text{оп}}(\omega)\,d\omega + \qquad (12)$$

$$+\mathrm{e}^{-j\varphi_{\text{тс}}}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega+(\omega_{\text{тс}}-\omega_{\text{оп}}))\dot{G}^{*}_{\text{оп}}(\omega)\,d\omega\Bigg) =$$

$$= \frac{A_{\text{тс}}}{2}[\mathrm{e}^{j\varphi_{\text{тс}}}\,\dot{G}^{*}_{\text{оп}}(\omega_{\text{тс}}+\omega_{\text{оп}})+\mathrm{e}^{-j\varphi_{\text{тс}}}\,\dot{G}^{*}_{\text{оп}}(\omega_{\text{оп}}-\omega_{\text{тс}})];$$

$$\left|\dot{Z}\right| = \frac{A_{\text{тс}}}{2}\left|\mathrm{e}^{j\varphi_{\text{тс}}}\,\dot{G}^{*}_{\text{оп}}(\omega_{\text{тс}}+\omega_{\text{оп}})+\mathrm{e}^{-j\varphi_{\text{тс}}}\,\dot{G}^{*}_{\text{оп}}(\omega_{\text{оп}}-\omega_{\text{тс}})\right|.$$

Выражения (11), (12) имеют общий характер с точки зрения вида ПСП $g_{\text{оп}l}$ и позволяют легко записать выражения для квадратов модулей $|\dot{Z}|^2$, при необходимости возведения в квадрат выходной величины рассматриваемых процедур корреляционной обработки. Подстановка комплексно-сопряжённой спектральной плотности $\dot{G}^{*}_{\text{оп}}(\omega)$ (8) в (11), (12) позволяет выполнять расчёты искомых характеристик для произвольных параметров опорного сигнала и опорной ПСП.

Анализ частотных характеристик процедур корреляционной обработки при М-кратном увеличении времени накопления (интегрирования)

Полученные выражения (5), (6), (11), (12) позволяют производить расчёт частотных характеристик рассматриваемых процедур квадратурной корреляционной обработки и классического одноканального коррелятора, при времени наблюдения, равном как одному T, так и нескольким периодам работы MT (M – целое). Условие $M>1$ соответствует так называемому когерентному накоплению, предполагающему формирование выходной величины коррелятора по результатам непрерывной обработки за время, равное M периодам опорного сигнала (к примеру, [3, стр. 130, 135]). Для формализации частотных характеристик рассматриваемых процедур в режиме М-кратного накопления необходимо произвести модификацию функций спектральных плотностей $\dot{S}_{\text{оп}}(\omega)$ и $\dot{G}_{\text{оп}}(\omega)$ опорных сигналов $s_{\text{оп}}(t)$ и $g_{\text{оп}}(t)$, учитывающую трансформацию спектра при переходе от одиночного сигнала к группе (пачке, серии) из M сигналов. Спектральная плотность группы из M примыкающих друг к другу опорных сигналов, обладающих длительностью T, записывается известным образом – путём умножения спектра одиночного сигнала на множитель $(1+\mathrm{e}^{-j\omega T}+\mathrm{e}^{-j\omega 2T}+\cdots+\mathrm{e}^{-j\omega(M-1)T}) = \sum_{n=1}^{M}\mathrm{e}^{-j\omega(n-1)T}$ [13, стр. 41]; [16, стр. 263]:

$$\dot{S}_{M\,\text{оп}}(\omega) = \dot{S}_{\text{оп}}(\omega)\sum_{n=1}^{M}\mathrm{e}^{-j\omega(n-1)T}, \qquad (13)$$

$$\dot{G}_{M\,\text{оп}}(\omega) = \dot{G}_{\text{оп}}(\omega)\sum_{n=1}^{M}\mathrm{e}^{-j\omega(n-1)T}. \qquad (14)$$

Подстановка $\dot{S}_{M\,\text{оп}}(\omega)$ (13) в (5), (6) вместо $\dot{S}_{\text{оп}}(\omega)$, позволяет вычислить частотную характеристику (и её модуль) процедуры квадратурной корреляционной обработки (рис. 1) и классического одноканального коррелятора в режиме М-кратного накопления при произвольном опорном сигнале. Для краткости ограничимся подстановкой (13) в (5) и запишем выражение лишь для $\dot{Z}_{M}(\omega_{\text{тс}})$, понимая, что операция взятия модуля $|\dot{Z}_{M}(\omega_{\text{тс}})|$ элементарно записывается при необходимости:

$$\dot{Z}_{M} = \frac{A_{\text{тс}}}{2}[\mathrm{e}^{j\varphi_{\text{тс}}}\,\dot{S}^{*}_{M\,\text{оп}}(\omega_{\text{тс}}+2\omega_{\text{оп}})+$$

$$+\mathrm{e}^{-j\varphi_{\text{тс}}}\,\dot{S}^{*}_{M\,\text{оп}}(2\omega_{\text{оп}}-\omega_{\text{тс}})] =$$

$$= \frac{A_{\text{тс}}}{2}\Bigg[\mathrm{e}^{j\varphi_{\text{тс}}}\left(\dot{S}_{\text{оп}}(\omega_{\text{тс}}+2\omega_{\text{оп}})\sum_{n=1}^{M}\mathrm{e}^{-j(\omega_{\text{тс}}+2\omega_{\text{оп}})(n-1)T}\right)^{*} + \qquad (15)$$

$$+\mathrm{e}^{-j\varphi_{\text{тс}}}\left(\dot{S}_{\text{оп}}(2\omega_{\text{оп}}-\omega_{\text{тс}})\sum_{n=1}^{M}\mathrm{e}^{-j(2\omega_{\text{оп}}-\omega_{\text{тс}})(n-1)T}\right)^{*}\Bigg].$$

Замена $\dot{G}_{\text{оп}}(\omega)$ на $\dot{G}_{M\,\text{оп}}(\omega)$ в (11) и (12), с использованием (14), позволяет вычислить аналогичные характеристики для обеих рассматриваемых процедур при опорной группе ФМ-сигналов[9]. Подстановки (10) в (13) и (8) в (14) приводят соответственно к частным случаям – выражениям для спектральных плотностей групп ФМ-сигналов и групп ПСП:

$$\dot{S}_{M\,\text{оп}}(\omega) = \frac{A_{\text{оп}}T_g}{2}\Bigg[\mathrm{e}^{j\varphi_{\text{оп}}}\,\operatorname{sinc}\left(\frac{(\omega-\omega_{\text{оп}})T_g}{2}\right)\times$$

$$\times\mathrm{e}^{-j(\omega-\omega_{\text{оп}})\frac{T_g}{2}}\sum_{l=1}^{L}g_{\text{оп}l}\,\mathrm{e}^{-j(\omega-\omega_{\text{оп}})(l-1)T_g} +$$

$$+\mathrm{e}^{-j\varphi_{\text{оп}}}\,\operatorname{sinc}\left(\frac{(\omega+\omega_{\text{оп}})T_g}{2}\right)\mathrm{e}^{-j(\omega+\omega_{\text{оп}})\frac{T_g}{2}}\times \qquad (16)$$

$$\times\sum_{l=1}^{L}g_{\text{оп}l}\,\mathrm{e}^{-j(\omega+\omega_{\text{оп}})(l-1)T_g}\Bigg]\sum_{n=1}^{M}\mathrm{e}^{-j\omega(n-1)T},$$

$$\dot{G}_{M\,\text{оп}}(\omega) =$$

$$= \left[T_g\,\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T_g}{2}\right)\mathrm{e}^{-j\omega\frac{T_g}{2}}\sum_{l=1}^{L}g_{\text{оп}l}\,\mathrm{e}^{-j\omega(l-1)T_g}\right]\sum_{n=1}^{M}\mathrm{e}^{-j\omega(n-1)T}. \qquad (17)$$

Итак, в результате проведённого анализа получены аналитические выражения для частотных характеристик классического одноканального коррелятора и двух процедур квадратурной корреляционной обработки, основанных на использовании преобразования Фурье. Кроме того, записаны необходимые вспомогательные выражения для спектральных плотностей частных рассматриваемых опорных процессов. В качестве дополнения отметим, что аналитические выражения (5), (11), (12), (15) получены без учёта возможной и применяемой (см. к

примеру, [5, стр. 285]; [19]; [20, стр. 367]) низкочастотной фильтрации компонентов входного и опорного комплексных сигналов. Такой подход обоснован, с одной стороны, возможностью получения наиболее полного представления о спектральном составе получаемых комплексных сигналов, причём не исключает возможности учёта низкочастотной фильтрации (при необходимости) за счёт соответствующей коррекции (2), (3) и последующих выражений. С другой стороны, при обработке ФМ-сигналов на основе рассматриваемых процедур (рис. 1, 2), низкочастотная фильтрация не является необходимой и может не использоваться [7-9].

Верификация проведённого анализа и обсуждение результатов

Для оценки правильности полученных в статье выражений (11), (12) проведена серия вычислительных проверок. Основные принципы проведённой верификации заключаются в следующем. Путём изменения частоты ТС и, таким образом, проведения табулирования выражений (11), (12), получались массивы значений $|\dot{Z}(\omega_{тс})|$. Одновременно с этим, для каждой из устанавливаемых частот ТС, производились вычислительные оценки преобразований генерируемых с шагом дискретизации $T_д$ отсчётов ТС (1) и опорных процессов (7), образующих соответствующие векторы $\{y_{тс}(kT_д)\}_{k=1}^{MK}$, $\{s_{оп}(kT_д)\}_{k=1}^{MK}$, $\{g_{оп}(kT_д)\}_{k=1}^{MK}$, содержащие MK отсчётов:

$$\begin{aligned}
&\hat{A}_{вх} = \mathcal{F}(\{A_{тс}\cos(\omega_{тс}kT_д + \varphi_{тс})[e^{j\omega_{оп}kT_д}]\}_{k=1}^{MK}),\\
&\hat{A}^*_{оп1} =\\
&= \bar{\mathcal{F}}(\{A_{оп}g_{оп}(kT_д)\cos(\omega_{оп}kT_д + \varphi_{оп})[e^{-j\omega_{оп}kT_д}]\}_{k=1}^{MK}),\\
&\hat{A}^*_{оп2} = \bar{\mathcal{F}}(\{g_{оп}(kT_д)\}_{k=1}^{MK}),\\
&|\dot{Z}_1| = |\mathcal{F}^{-1}(\hat{A}_{вх}\hat{A}^*_{оп1})|,\ |\dot{Z}_2| = |\mathcal{F}^{-1}(\hat{A}_{вх}\hat{A}^*_{оп2})|.
\end{aligned} \qquad (18)$$

То есть проводилось имитационное моделирование рассматриваемых процедур обработки сигналов, показанных в виде структурных схем на рис. 1, 2. Временному интервалу $t \in [0, T]$ соответствуют отсчёты с номерами $k = 1, 2, \ldots, K$. Смысл M прежний.

С целью визуализации примеров частотных характеристик, рассчитываемых по полученным в статье аналитическим выражениям, на рис. 3-10 показаны сегменты нормированных модулей частотных характеристик $Z_н = |\dot{Z}(\omega_н)|/|\dot{Z}_{max}(\omega_н)|$ как функции нормированной частоты $\omega_н = \omega_{тс}/\omega_{оп}$. Рис. 3, 4 соответствуют процедуре квадратурной корреляционной обработки, структурная схема которой показана на рис. 1. Рис. 5-10 относятся ко второй из рассматриваемых процедур (рис. 2). Сплошные линии на рис. 3, 4 рассчитаны на основе (8), (11), (17), а круглыми символами « ∘ » показаны нормированные значения $|\dot{Z}_1|$, полученные согласно (18). Для исключения избыточности круглых символов при их отображении использована децимация: десятикратная для рис. 3 и пятикратная для рис. 4. Как видно из рис. 3, 4, результаты аналитических вычислений совпадают с результатами имитационного моделирования. Дальнейшая проведённая верификация показала, что такое же совпадение имеет место для всех рассмотренных характеристик, поэтому на рис. 5-10, полученных на основе (8), (12), (17), круглые символы для $|\dot{Z}_2|$ (18) с целью облегчения визуализации не показаны. Основные условия, при которых получены рис. 3-10, были следующими. Рис. 3, 5, 6 соответствуют времени обработки в корреляторе, равном одному периоду опорного сигнала: $M = 1$. Рис. 7, 8 соответствуют случаю двух когерентных накоплений $M = 2$. Рис. 4, 9, 10 получены при пяти когерентных накоплениях $M = 5$. Рис. 3, 4 получены для ПСП в виде М-последовательности длины $L = 15$ [15, стр. 59]. Рис. 5-10 получены при длине ПСП $L = 1023$, причём рис. 5, 7, 9 получены для кода Голда [21, стр. 64], а рис. 6, 8, 10 соответствуют М-последовательности [15, стр. 60]. Длительности парциальных импульсов ПСП выбраны произвольно и являются различными для рис. 3, 4 и рис. 5-10. Сравнительно небольшая длина ПСП ($L = 15$) позволила показать детали модуля частотной характеристики (рис. 3) в её главном и первых

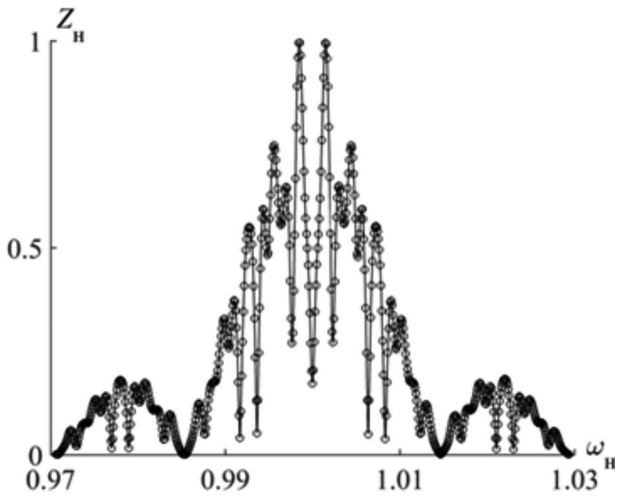

Рис. 3. Сегмент нормированной частотной характеристики процедуры (рис. 1) при опорном ФМ-сигнале на основе М-последовательности (L = 15; M = 1)

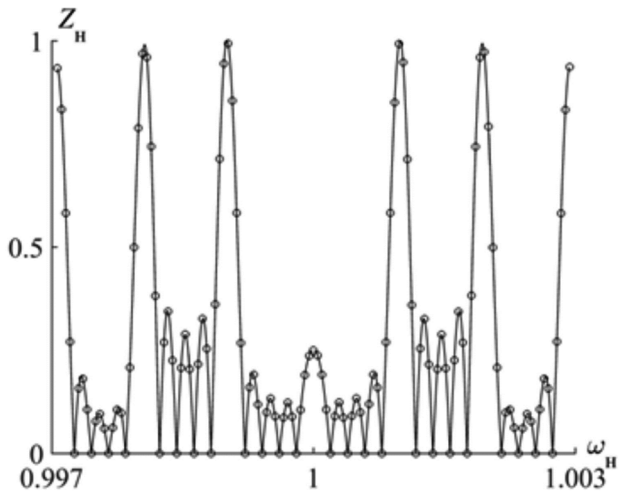

Рис. 4. Сегмент нормированной частотной характеристики процедуры (рис. 1) при опорном ФМ-сигнале на основе М-последовательности (L = 15; M = 5)

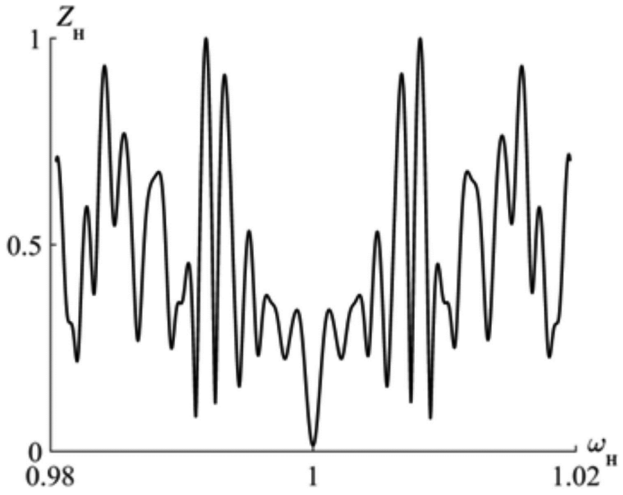

Рис. 5. Сегмент нормированной частотной характеристики процедуры (рис. 2) при опорной ПСП в виде кода Голда (L = 1023; M = 1)

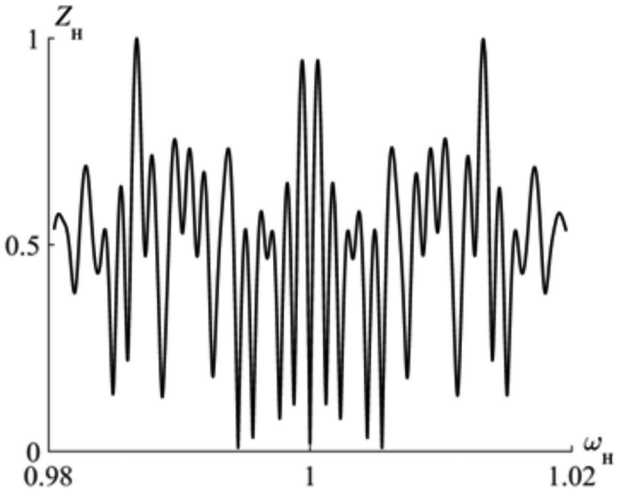

Рис. 6. Сегмент нормированной частотной характеристики процедуры (рис. 2) при опорной ПСП в виде M-последовательности (L = 1023; M = 1)

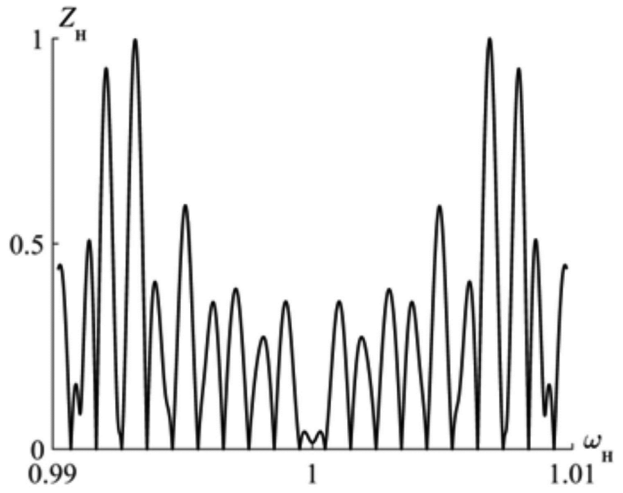

Рис. 7. Сегмент нормированной частотной характеристики процедуры (рис. 2) при опорной ПСП в виде кода Голда (L = 1023; M = 2)

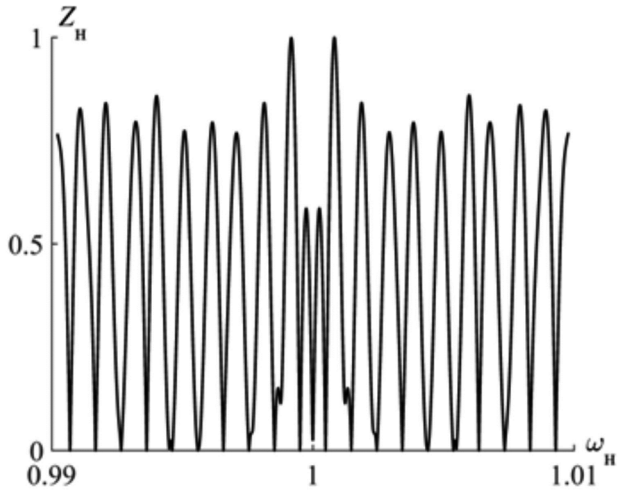

Рис. 8. Сегмент нормированной частотной характеристики процедуры (рис. 2) при опорной ПСП в виде M-последовательности (L = 1023; M = 2)

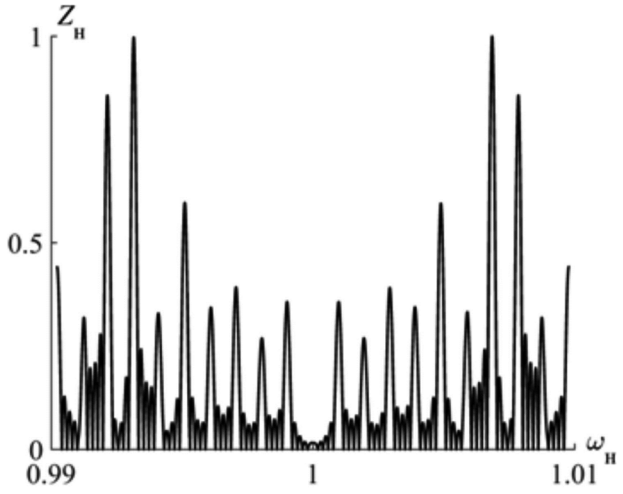

Рис. 9. Сегмент нормированной частотной характеристики процедуры (рис. 2) при опорной ПСП в виде кода Голда (L = 1023; M = 5)

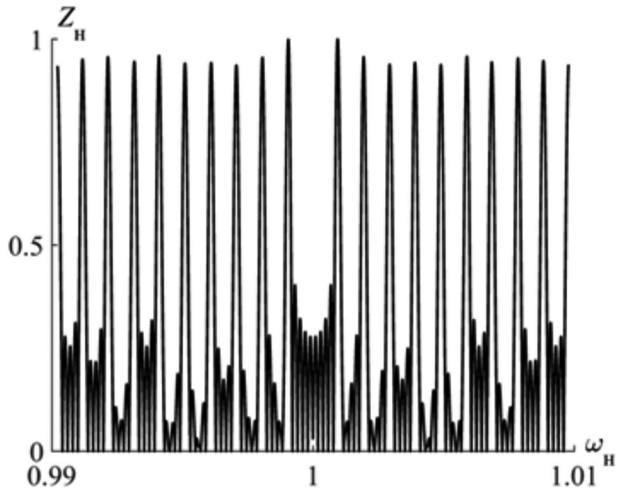

Рис. 10. Сегмент нормированной частотной характеристики процедуры (рис. 2) при опорной ПСП в виде M-последовательности (L = 1023; M = 5)

боковых «лепестках», т.е. в сравнительно широких пределах изменения частоты. При длине ПСП $L = 1023$ (рис. 5-10) сегменты характеристик представлены лишь для заметно ограниченного интервала частот, примыка-

ющего к центральной области. Проведённое рассмотрение этих характеристик при более широких пределах изменения частоты приводит к спектральным картинам, форма которых определяется амплитудными спектрами опорных сигналов (как и для рис. 3), однако рассмотрение деталей получаемых характеристик при этом оказывается затруднительным. По этой же причине все характеристики, соответствующие случаям $M > 1$, представлены в более узком интервале частот.

Таким образом, проведённая вычислительная верификация показала, что для всех рассмотренных случаев результаты имитационного моделирования (18) с точностью до постоянного множителя совпадают с расчётами, выполненными на основе (11), (12) с применением вспомогательных выражений, представленных в статье. Рис. 3-10 наглядно иллюстрируют сегменты частотных характеристик процедур квадратурной корреляционной обработки в случае «настройки» последних на сигнал с фазовой манипуляцией вида (7), порождаемый псевдослучайной последовательностью. Как видно из рис. 3-10, форма частотных характеристик квадратурного коррелятора, формализованных в статье, существенно зависит от спектральных особенностей опорного сигнала. Кроме того, заметное влияние на форму полученных кривых оказывает количество производимых когерентных накоплений. Из полученных аналитических выражений, а также из рис. 3-10 видно, что непосредственное влияние на особенности поведения представленных частотных характеристик $Z_{\text{н}}$ оказывают структура и параметры используемой псевдослучайной последовательности.

Заключение

В статье получены аналитические выражения частотных характеристик классического одноканального коррелятора, а также двух процедур квадратурной корреляционной обработки, реализуемых на основе преобразования Фурье. Частотные характеристики формализованы для случаев обработки в корреляторе за время одного периода, а также для режима М-кратного когерентного накопления. Методика проведённого анализа основана на вычислении отклика коррелятора в частотной области. Проведённая вычислительная верификация, приближенная к возможной практической реализации, подтвердила правильность полученных аналитическим путём выражений, на основе которых рассчитаны представленные в статье сегменты нормированных частотных характеристик.

Литература

1. Радиотехнические системы: учебник для вузов. / Ю.П. Гришин, В.П. Ипатов, Ю.М. Казаринов и др. Под. ред. Ю.М. Казаринова. М.: Высшая школа, 1990. – 496 с.

2. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б.Р. Левин. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1989. – 656 с.

3. ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования / под ред. А.И. Перова, В.Н. Харисова. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Радиотехника, 2010. – 800 с.

4. Кравец А.П. Поиск и обнаружение сигналов спутниковой радионавигационной системы ГЛОНАСС в бортовом навигационном комплексе космического потребителя / А.П. Кравец, В.Ю. Лебедев, В.И. Тисленко, В.А. Филимонов, В.В. Шаврин // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. – 2015. – № 4 (38). – С.35-41. URL: https://journal.tusur.ru/storage/43423/6.pdf?1464686947 .

5. Глинченко А.С. Цифровая обработка сигналов: учеб. пособие. 2-е изд., перераб. и доп. / А.С. Глинченко. – Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2005. – 482 с.

6. Кириллов С.Н. Быстрый алгоритм поиска и обнаружения фазоманипулированного сигнала спутниковой системы передачи информации, адаптивный к действию узкополосных помех / С.Н. Кириллов, А.С. Слесарев // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. – 2009. – №1 (27). – С. 3-7. URL: http://vestnik.rsreu.ru/ru/archive/2009/1-vypusk-27.

7. Власов И.Б. Применение последовательных алгоритмов для решения задачи ускоренного поиска навигационного сигнала / И.Б. Власов, Я.В. Мыкольников, И.С. Слепова // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2012. №1. URL: http://technomag.edu.ru/doc/290478.html .

8. Kim B. Design of FFT-Based TDCC for GNSS Acquisition / B. Kim, S.-H. Kong // IEEE Transactions On Wireless Communications, V. 13, №5, May 2014. P. 2798–2808.

9. Leclère J. FFT Splitting for Improved FPGA-Based Acquisition of GNSS Signals / J. Leclère, C. Botteron, R.Jr. Landry, P.-A. Farine // International Journal of Navigation and Observation, V. 2015, Article ID 765898, 12 p. URL: http://dx.doi.org/10.1155/2015/765898.

10. Yang Y. A Novel VLSI Architecture for Multi-Constellation and Multi-Frequency GNSS Acquisition Engine / Y. Yang, X. Ba, J. Chen // IEEE Access, V. 7, 2019. Pp. 655-665.

11. Бахолдин В.С. Обнаружение радиосигналов спутниковых навигационных систем бескодовым методом / В.С. Бахолдин, Д.А. Гаврилов, В.А. Добриков, В.Ф. Иванов // Гироскопия и навигация. – 2019. – Т. 27. – № 4 (107). – С. 147-161. – URL: http://www.elektropribor.spb.ru/nauchnaya-deyatelnost/zhurnal/elektronnaya-versiya/156/1298 .

12. Кузьмин Е.В. О влиянии квантования по уровню на эффективность процедуры поиска шумоподобного сигнала по задержке на фоне шума и гармонической помехи / Е.В. Кузьмин // Цифровая обработка сигналов. – 2020. – №2. – С.41-45.

13. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: учебник для вузов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1986. – 512 с.

14. Варакин Л.Е. Теория сложных сигналов / Л.Е. Варакин. – М.: Советское радио, 1970. – 376 с.

15. Варакин Л.Е. Системы связи с шумоподобными сигналами / Л.Е. Варакин. – М.: Радио и связь, 1985. – 384 с.

16. Атабеков Г.И. Основы теории цепей. Учебник для вузов. – М.: Энергия, 1969. – 424 с.

17. Каганов В.И. Радиотехника: от истоков до наших дней : учеб. пособие / В.И. Каганов. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2018. – 352 с.

18. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. для вузов / С.И. Баскаков. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 2000. – 462с.

19. Бехар В. Алгоритмы цифровой демодуляции ЛЧМ-сигналов / В. Бехар, Х. Кабакчиев // Цифровая обработка сигналов. – 2001. – №2. – С.25-31.

20. Оптимальный приём сигналов на фоне помех и шумов / Под ред. Ю.И. Савватеева. – М.: Радиотехника, 2011. – 424 с.

21. Сетевые спутниковые радионавигационные системы / В.С. Шебшаевич, П.П. Дмитриев, Н.В. Иванцевич и др.; Под ред. В.С. Шебшаевича. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1993. – 408 с.