

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДВУМЕРНОЙ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ В БАЗИСАХ ФУРЬЕ С ВАРЬИРУЕМЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

*Пономарев А.В., к.э.н., доцент Ижевского государственного университета имени М.Т. Калашникова,
e-mail: ponva@mail.ru.*

FUNDAMENTALS OF THE THEORY OF TWO-DIMENSIONAL DIGITAL SIGNAL PROCESSING IN THE FOURIER BASES WITH VARYING PARAMETERS

Ponomarev A.V.

The fundamentals of the theory of two-dimensional digital signal processing in Fourier bases with varying parameters are proposed. The developed theory is a generalization of the classical theory of discrete two-dimensional spectral processing of signals specified on the finite reference plane in Fourier bases. Proposed theory allows us to develop new and improve existing methods and algorithms for two-dimensional Fourier signal processing, as well as to eliminate or significantly reduce the impact of negative effects accompanying the use of standard 2-D DFT. Proposed two-dimensional parametric DFT, which significantly expands the mathematical methods of spectral digital signal processing (including images) into spatial and spatial-frequency domains.

Key words: two-dimensional digital signal processing, varying parameters, Fourier bases, two-dimensional parametric DFT, spatial-frequency domains.

Ключевые слова: двумерный дискретный сигнал, конечная опорная плоскость, дискретное преобразование Фурье, двумерное параметрическое дискретное преобразование Фурье, двумерный параметрический базис, параметрическая двумерная экспоненциальная функция.

Введение

В настоящее время методы, алгоритмы и средства цифровой обработки сигналов находят свое приложение во многих отраслях науки и техники. Трудно назвать предметные области, которых не коснулся бы в той или иной мере процесс цифровизации. Информационные технологии цифровой спектральной обработки одномерных и двумерных сигналов играют важнейшую роль в медицине, криминалистике, активной и пассивной гидролокации, сейсмологии, радиотехнике, геодезии, метеорологии, контроле и диагностике как естественных, так и искусственных систем различного назначения.

Математический аппарат информационных технологий цифровой спектральной обработки одномерных сигналов¹ был значительно расширен благодаря работам [1-7] в которых:

- проведено обобщение одномерного дискретного преобразование Фурье (ДФФ) в виде одномерного параметрического дискретного преобразования Фурье (ДФФ-П);
- исследованы аналитические и стохастические свойства ДФФ-П;

Предложены основы теории двумерной цифровой обработки сигналов в базисах Фурье с варьируемыми параметрами. Разрабатываемая теория является обобщением классической теории дискретной двумерной спектральной обработки сигналов, заданных на конечной опорной плоскости в базисах Фурье. Предлагаемая теория позволяет разрабатывать новые и совершенствовать существующие методы и алгоритмы двумерной Фурье – обработки сигналов, а также исключить или существенно снизить влияние негативных эффектов, сопровождающих применение стандартного 2-D ДПФ. Предложено двумерное параметрическое ДПФ, которое существенно расширяет математический аппарат методов информационных технологий цифровой спектральной обработки сигналов (в том числе изображений) в пространственной и пространственно-частотной областях.

– доказаны свойства базиса ДПФ-П – базиса параметрических дискретных экспоненциальных функций (ДФФ-П).

Прямое ДПФ-П и обратное ДПФ-П (ОДФФ-П) в алгебраической и матричной форме дискретного сигнала $x(n)$, заданного на конечном интервале, определены авторами преобразований в следующем виде:

Алгебраическая форма прямого ДПФ-П:

$$S_N(k, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(k+\theta)n}, \quad W_N = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N}\right), \quad (1)$$

$$k = \overline{0, N-1}; \quad 0 \leq \theta < 1.$$

Матричная форма прямого ДПФ-П:

$$S_{N,\theta} = \frac{1}{N} F_{N,\theta} \cdot X_N, \quad 0 \leq \theta < 1, \quad (2)$$

где $X_N = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$ – представление дискретного сигнала $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, в виде вектора N – мерного линейного пространства; T – знак транспонирования; $S_{N,\theta} = [s(0), s(1), \dots, s(N-1)]^T$ – вектор коэф-

¹ Сигнал – это материальный носитель информации различной о процессах, явлениях, состояниях или физических величинах объектов материального мира, средство перенесения информации в пространстве и времени. **Обработка сигналов** – извлечение содержащейся в сигналах информации.

коэффициентов разложения X_N по системе параметрических дискретных экспоненциальных функций, задаваемой матрицей $F_{N,\theta}$:

$$F_{N,\theta} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N-1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ (N-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & W_N^\theta & \dots & W_N^{\theta(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1+\theta)} & \dots & W_N^{(N-1+\theta)(N-1)} \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} n \\ \vdots \\ k \end{matrix}$$

Алгебраическая форма ОДПФ-П:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S_N(k, \theta) W_N^{-(k+\theta)n}, \quad n = 0, N-1, \quad 0 \leq \theta < 1. \quad (3)$$

Матричная форма ОДПФ-П:

$$X_N = F_{N,\theta}^* \cdot S_{N,\theta}, \quad 0 \leq \theta < 1. \quad (4)$$

где * – знак комплексного сопряжения.

В дальнейших работах вышеназванных авторов [8-15] проведены исследования множества предложенных ДПФ-П (именно множества, поскольку при каждом значении параметра θ ДПФ-П имеет свою ортогональную полную базисную систему ДЭФ-П), доказано существование быстрых алгоритмов реализации ДПФ-П (алгоритмов БПФ-П). Проведенные исследования позволили исключить или существенно снизить влияние негативных эффектов, сопровождающих применение ДПФ (*эффекты утечки, частотола, наложения, амплитудной модуляции*), а также значительно расширить области приложения Фурье – обработки одномерных дискретных сигналов.

В настоящее время наблюдается не только расширение областей приложения цифровых методов обработки сигналов, но и существенное усложнение решаемых задач, в частности, переход от методов спектральной обработки одномерных сигналов (1-D сигналов) к методам спектральной обработки двумерных сигналов (2-D сигналов) на основе двумерного дискретного преобразования Фурье (2-D ДПФ)

Задача данной работы – создание основ теории двумерной цифровой обработки сигналов, заданных на конечной опорной плоскости, в базисах Фурье с варьируемыми параметрами, разработка новых и совершенствованию существующих методов и алгоритмов двумерной Фурье – обработки сигналов.

Двумерная цифровая обработка сигналов на основе 2-D ДПФ

С математической точки зрения дискретный 2-D сигнал $x(n_1, n_2)$ конечной длины – это двумерная последовательность конечной длины, являющаяся множеством действительных (или в общем случае комплексных) чисел, ределенных для упорядоченных пар целых чисел n_1 и n_2 ,

² **Опорная область** – это диапазон значений переменных n_1 и n_2 , для которого двумерная последовательность $x(n_1, n_2)$ отлична от нуля.

при $0 \leq n_1 \leq N_1 - 1$; $0 \leq n_2 \leq N_2 - 1$ [16]. Дискретный 2-D сигнал $x(n_1, n_2)$ на прямоугольной пространственной опорной плоскости², при $0 \leq n_1 \leq N_1 - 1$ и $0 \leq n_2 \leq N_2 - 1$, может быть представлен в виде матрицы:

$$X_{N_1 \times N_2} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N_2-1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ (N_1-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} x(0,0) & x(0,1) & \dots & x(0, N_2-1) \\ x(1,0) & x(1,1) & \dots & x(1, N_2-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N_1-1,0) & x(N_1-1,1) & \dots & x(N_1-1, N_2-1) \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} n_2 \\ \vdots \\ n_1 \end{matrix} \quad (5)$$

Проведенный системный анализ методов цифровой обработки 2-D сигналов и предметных областей их приложений показал, что 2-D ДПФ (рис. 1) играет ведущую роль, благодаря целому ряду присущих ему преимуществ:

- ядра преобразования 2-D ДПФ симметричны и разделимы (сепарабельны);
- 2-D ДПФ может быть реализовано быстрыми алгоритмами;
- оценки, получаемые помощью 2-D ДПФ, структурно устойчивы;
- эффективность двумерных методов, основанных на основе 2-D ДПФ, доказана временем.

При выборе для векторного и спектрального анализа³ дискретных двумерных сигналов унитарного двумерного преобразования Фурье мы используем систему двумерных дискретных экспоненциальных функций (2-D ДЭФ), (система является базисом двумерного дискретного преобразования Фурье):

$$\begin{aligned} def_{N_1, N_2}(k_1, n_1, k_2, n_2) &= \left[\exp\left(-j \frac{2\pi}{N_1}(k_1 n_1)\right) \right] \times \\ &\times \left[\exp\left(-j \frac{2\pi}{N_2}(k_2 n_2)\right) \right] = \left[W_{N_1}^{k_1 n_1} \right] \cdot \left[W_{N_2}^{k_2 n_2} \right] = \\ &= \left[\cos\left(\frac{2\pi}{N_1} k_1 n_1\right) - j \sin\left(\frac{2\pi}{N_1} k_1 n_1\right) \right] \times \\ &\times \left[\cos\left(\frac{2\pi}{N_2} k_2 n_2\right) - j \sin\left(\frac{2\pi}{N_2} k_2 n_2\right) \right] = \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{N_1} k_1 n_1 + \frac{2\pi}{N_2} k_2 n_2\right) - j \sin\left(\frac{2\pi}{N_1} k_1 n_1 + \frac{2\pi}{N_2} k_2 n_2\right). \quad (6) \end{aligned}$$

где k_1, k_2 – пространственные частоты; $k_1, n_1 = \overline{0, (N_1 - 1)}$; $k_2, n_2 = \overline{0, (N_2 - 1)}$.

На рис. 2-5 даны примеры 2-D ДЭФ при различных k_1, k_2 (приведены огибающие 2-D ДЭФ).

³ **Векторный анализ** – методы Фурье – анализа дискретных сигналов, в результате которых обеспечивается получение информации о частотах, амплитудах и фазах составляющих сигналов и/или их изменений во времени. **Спектральный анализ** – методы Фурье – анализа дискретных сигналов, в результате которых обеспечивается получение информации о частотах и амплитудах составляющих сигналов и/или их изменений во времени.

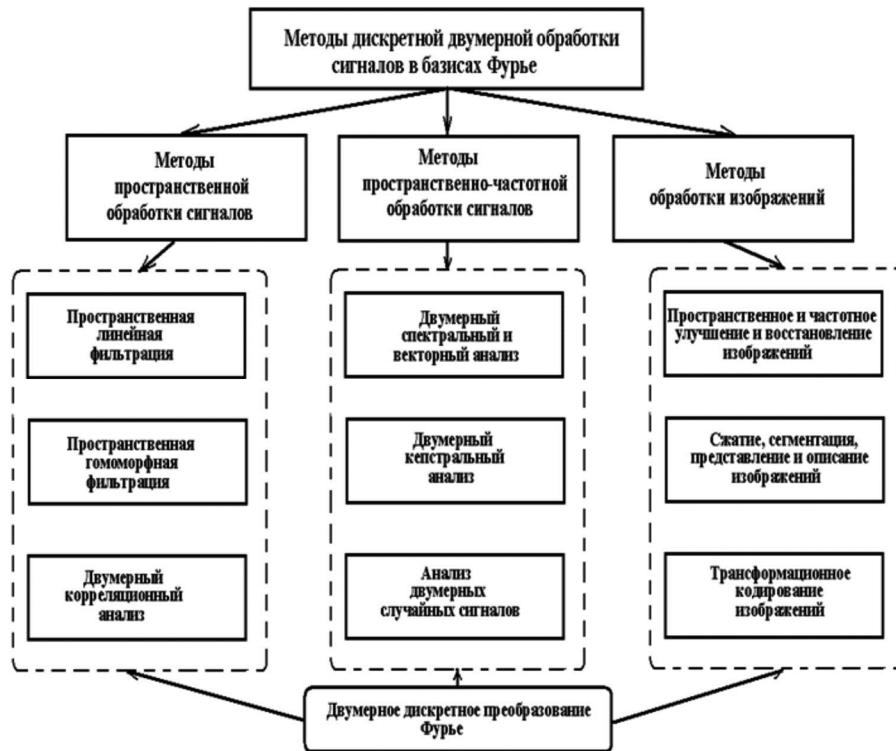


Рис. 1. Предметные области приложения двумерного дискретного преобразования Фурье

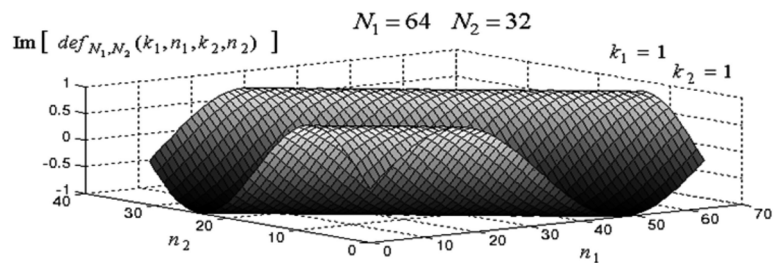
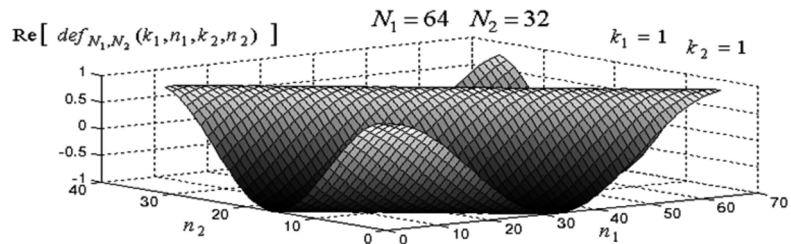


Рис. 2. 2-D ДЭФ при $k_1 = 1, k_2 = 1$

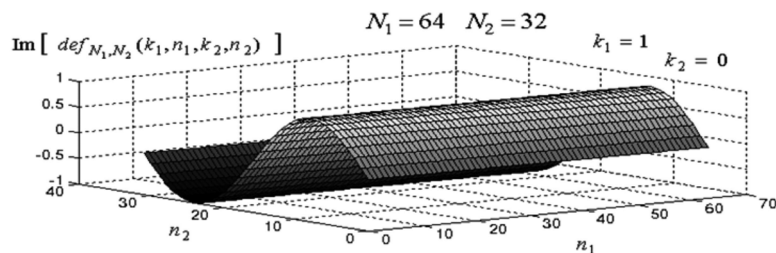
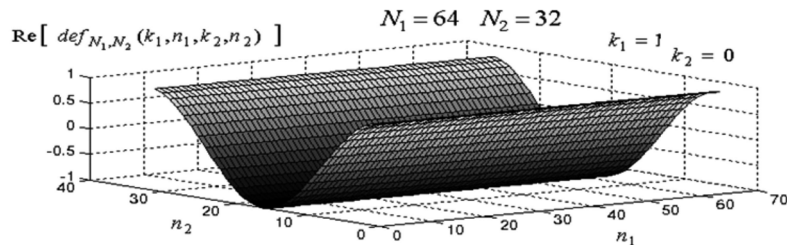


Рис. 3. 2-D ДЭФ при $k_1 = 1, k_2 = 0$

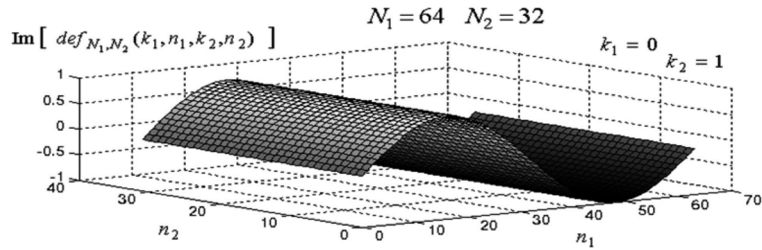
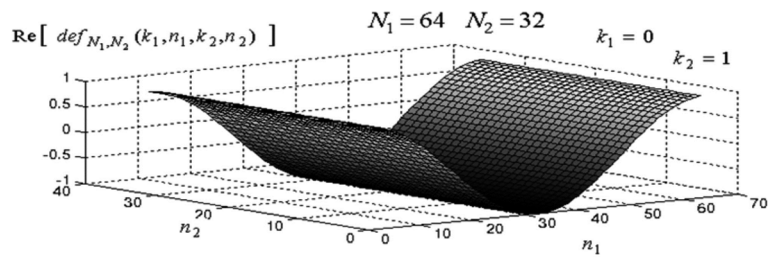


Рис. 4. 2-D ДЭФ при $k_1=0, k_2=1$

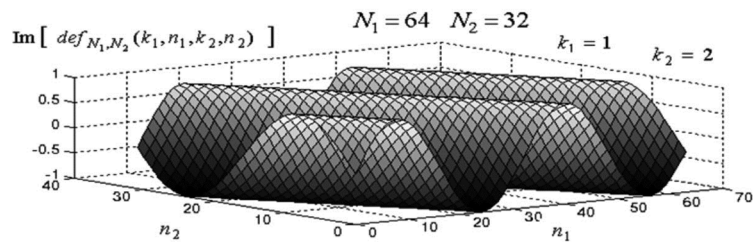
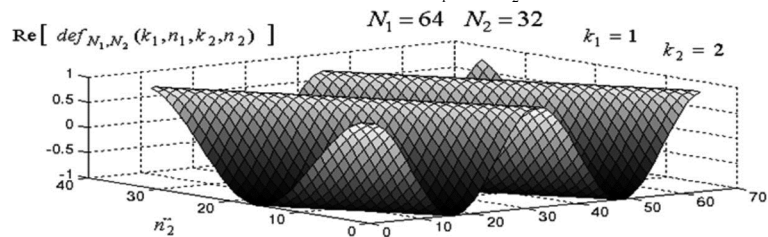


Рис. 5. 2-D ДЭФ при $k_1=1, k_2=2$

Алгебраическая форма прямого 2-D ДПФ:

$$S_{N_1, N_2}(k_1, k_2) = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) W_{N_1}^{k_1 n_1} \cdot W_{N_2}^{k_2 n_2}; \quad (7)$$

где $k_1 = \overline{0, (N_1-1)}$, $k_2 = \overline{0, (N_2-1)}$ – пространственные частоты; $x(n_1, n_2)$ – двумерный сигнал, $n_1 = \overline{0, N_1-1}$, $n_2 = \overline{0, N_2-1}$, $S_{N_1, N_2}(k_1, k_2)$ – коэффициенты 2-D ДПФ (двумерный векторный пространственно-частотный спектр сигнала $x(n_1, n_2)$).

Алгебраическая форма прямого 2-D ДПФ, учитывая свойство разделимости ядра 2-D ДПФ, может быть представлена в виде:

$$S_{N_1, N_2}(k_1, k_2) = \frac{1}{N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} W_{N_1}^{k_1 n_1} \left[\frac{1}{N_2} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) W_{N_2}^{k_2 n_2} \right]; \quad (7a)$$

или в виде:

$$S_{N_1, N_2}(k_1, k_2) = \frac{1}{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} W_{N_1}^{k_2 n_2} \left[\frac{1}{N_1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x(n_1, n_2) W_{N_2}^{k_1 n_1} \right]. \quad (7b)$$

Формулами (7 а и 7 б) задается поэтапное определение прямого 2-D ДПФ методом двух 1-D ДПФ, выполняемых последовательно: формулой (7 а) – по строкам, а затем по столбцам; формулой (7 б) – по столбцам, а затем по строкам. 1-D ДПФ могут вычисляться методом быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Двумерный векторный пространственно-частотный спектр $S_{N_1, N_2}(k_1, k_2)$ на прямоугольной частотно-пространственной опорной плоскости, при $0 \leq k_1 \leq N_1-1$ и $0 \leq k_2 \leq N_2-1$, может быть представлен в виде матрицы:

$$S_{N_1 \times N_2} = \begin{matrix} & & & & & k_2 \\ & & & & & (N_2-1) \\ & & & & & S(0, N_2-1) \\ & & & & & S(1, N_2-1) \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & S(N_1-1, N_2-1) \\ & & & & & \end{matrix} \quad (8)$$

Введем матрицы базисной системы преобразований 2-D ДПФ:

$$F_{N_2 \times N_2}^{(1)} = \begin{matrix} & & & & & k_2 \\ & & & & & (N_2-1) \\ & & & & & W_{N_2}^{0 \cdot (N_2-1)} \\ & & & & & W_{N_2}^{1 \cdot (N_2-1)} \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & W_{N_2}^{(N_2-1) \cdot (N_2-1)} \\ & & & & & \end{matrix} \quad (9)$$

$N_2 r_2 \times N_2 r_2$ в прямоугольную матрицу размера $N_2 \times N_2 r_2$ (16).

$$F_{N_2 r_2 \times N_2}^{(1)} = \begin{matrix} & 0 & 1 & \dots & (N_2 r_2 - 1) \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N_2 - 1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} W_{N_2 r_2}^{0 \cdot 0} & W_{N_2 r_2}^{0 \cdot 1} & \dots & W_{N_2 r_2}^{0 \cdot (N_2 r_2 - 1)} \\ W_{N_2 r_2}^{1 \cdot 0} & W_{N_2 r_2}^{1 \cdot 1} & \dots & W_{N_2 r_2}^{1 \cdot (N_2 r_2 - 1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{N_2 r_2}^{(N_2 - 1) \cdot 0} & W_{N_2 r_2}^{(N_2 - 1) \cdot 1} & \dots & W_{N_2 r_2}^{(N_2 - 1) \cdot (N_2 r_2 - 1)} \end{bmatrix} & \begin{matrix} k_2 \\ \dots \\ n_2 \end{matrix} \end{matrix} \quad (16)$$

На втором этапе вычисления прямого 2-D ДПФ нулевые отсчеты матрицы, полученной на первом этапе, приводят к усечению столбцов матрицы $F_{N_1 r_1 \times N_1 r_1}^{(2)}$ преращению ее из прямоугольной матрицы размера $N_1 r_1 \times N_1 r_1$ в прямоугольную матрицу размера $N_1 r_1 \times N_1$ (17).

$$F_{N_1 r_1 \times N_1}^{(2)} = \begin{matrix} & 0 & 1 & \dots & (N_1 - 1) \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N_1 r_1 - 1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} W_{N_1 r_1}^{0 \cdot 0} & W_{N_1 r_1}^{0 \cdot 1} & \dots & W_{N_1 r_1}^{0 \cdot (N_1 - 1)} \\ W_{N_1 r_1}^{1 \cdot 0} & W_{N_1 r_1}^{1 \cdot 1} & \dots & W_{N_1 r_1}^{1 \cdot (N_1 - 1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{N_1 r_1}^{(N_1 r_1 - 1) \cdot 0} & W_{N_1 r_1}^{(N_1 r_1 - 1) \cdot 1} & \dots & W_{N_1 r_1}^{(N_1 r_1 - 1) \cdot (N_1 - 1)} \end{bmatrix} & \begin{matrix} n_1 \\ \dots \\ k_1 \end{matrix} \end{matrix} \quad (17)$$

Рассмотрим структуру матрицы $F_{N_2 r_2 \times N_2}^{(1)}$ и структуру матрицы $F_{N_1 r_1 \times N_1}^{(2)}$. Обозначим множество номеров столбцов матрицы $F_{N_2 r_2 \times N_2}^{(1)}$ через $A: A = \{0, 1, 2, \dots, (N_2 r_2 - 1)\}$, а множество номеров строк матрицы $F_{N_1 r_1 \times N_1}^{(2)}$, через $C: C = \{0, 1, 2, \dots, (N_1 r_1 - 1)\}$. Применим к множествам A и C **отношение сравнимости по модулю r_2 и r_1** соответственно. Известно, что отношение сравнимости по модулю m является отношением **эквивалентности и обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности**.

Отношение сравнимости по модулю r_2 разбивает множество A на r_2 классов вычетов по модулю r_2 :

$$A_0 = \{0, r_2, \dots, (N_2 - 1)r_2\};$$

$$\dots$$

$$A_{(r_2 - 1)} = \{(r_2 - 1), \dots, (N_2 r_2 - 1)\}; \quad (18)$$

$$A_i \neq \emptyset; \quad A_i \cap A_j = \emptyset; \quad \bigcup_{i=0}^{r_2 - 1} A_i = A.$$

Матрицу $F_{N_2 r_2 \times N_2}^{(1)}$, применив разбиение (18) множества A на r_2 классов вычетов по модулю r_2 , представим в виде r_2 матриц размером $N_2 \times N_2$:

$$F_{N_2 \times N_2, \theta_2}^{(1)} = \quad (19)$$

$$= \begin{matrix} & 0 & 1 & \dots & (N_2 - 1) \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N_2 - 1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} W_{N_2}^{0 \cdot (0 + \theta_2)} & W_{N_2}^{0 \cdot (1 + \theta_2)} & \dots & W_{N_2}^{0 \cdot (N_2 - 1 + \theta_2)} \\ W_{N_2}^{1 \cdot (0 + \theta_2)} & W_{N_2}^{1 \cdot (1 + \theta_2)} & \dots & W_{N_2}^{1 \cdot (N_2 - 1 + \theta_2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{N_2}^{(N_2 - 1) \cdot (0 + \theta_2)} & W_{N_2}^{(N_2 - 1) \cdot (1 + \theta_2)} & \dots & W_{N_2}^{(N_2 - 1) \cdot (N_2 - 1 + \theta_2)} \end{bmatrix} & \begin{matrix} k_2 \\ \dots \\ n_2 \end{matrix} \end{matrix};$$

где $\theta_2 = 0, 1/r_2, \dots, (r_2 - 1)/r_2$.

Отношение сравнимости по модулю r_1 разбивает множество C на r_1 классов вычетов по модулю r_1 :

$$C_0 = \{0, r_1, \dots, (N_1 - 1)r_1\};$$

$$\dots$$

$$C_{(r_1 - 1)} = \{(r_1 - 1), \dots, (N_1 r_1 - 1)\}; \quad (20)$$

$$C_i \neq \emptyset; \quad C_i \cap C_j = \emptyset; \quad \bigcup_{i=0}^{r_1 - 1} C_i = C.$$

Матрицу $F_{N_1 r_1 \times N_1}^{(2)}$, применив разбиение (20) множества C на r_1 классов вычетов по модулю r_1 , представим в виде r_1 матриц размером $N_1 \times N_1$:

где $\theta_2 = 0, 1/r_2, \dots, (r_2 - 1)/r_2$

$$F_{N_1 \times N_1, \theta_1}^{(2)} = \begin{matrix} & 0 & 1 & \dots & (N_1 - 1) \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N_1 - 1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} W_{N_1}^{(0 + \theta_1) \cdot 0} & W_{N_1}^{(0 + \theta_1) \cdot 1} & \dots & W_{N_1}^{(0 + \theta_1) \cdot (N_1 - 1)} \\ W_{N_1}^{(1 + \theta_1) \cdot 0} & W_{N_1}^{(1 + \theta_1) \cdot 1} & \dots & W_{N_1}^{(1 + \theta_1) \cdot (N_1 - 1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{N_1}^{(N_1 - 1 + \theta_1) \cdot 0} & W_{N_1}^{(N_1 - 1 + \theta_1) \cdot 1} & \dots & W_{N_1}^{(N_1 - 1 + \theta_1) \cdot (N_1 - 1)} \end{bmatrix} & \begin{matrix} n_1 \\ \dots \\ k_1 \end{matrix} \end{matrix} \quad (21)$$

где $\theta_1 = 0, 1/r_1, \dots, (r_1 - 1)/r_1$.

Дискретные двумерные функции:

$$W_{N_1}^{(k_1 + \theta_1) \cdot n_1} \cdot W_{N_2}^{(k_2 + \theta_2) \cdot n_2} = \left[\exp \left(-j \frac{2\pi}{N_1} (k_1 + \theta_1) \cdot n_1 \right) \right] \times$$

$$\times \left[\exp \left(-j \frac{2\pi}{N_2} (k_2 + \theta_2) \cdot n_2 \right) \right] =$$

$$= \left[\cos \left(\frac{2\pi}{N_1} (k_1 + \theta_1) \cdot n_1 \right) - j \sin \left(\frac{2\pi}{N_1} (k_1 + \theta_1) \cdot n_1 \right) \right] \times$$

$$\times \left[\cos \left(\frac{2\pi}{N_2} (k_2 + \theta_2) \cdot n_2 \right) - j \sin \left(\frac{2\pi}{N_2} (k_2 + \theta_2) \cdot n_2 \right) \right] =$$

$$= \cos \left(\frac{2\pi}{N_1} (k_1 + \theta_1) n_1 + \frac{2\pi}{N_2} (k_2 + \theta_2) n_2 \right) -$$

$$- j \sin \left(\frac{2\pi}{N_1} (k_1 + \theta_1) n_1 + \frac{2\pi}{N_2} (k_2 + \theta_2) n_2 \right), \quad (22)$$

назовем **2-D параметрическими дискретными экспоненциальными функциями (2-D ДЭФ-П) – 2-D def_p(k₁, n₁, θ₁, k₂, n₂, θ₂)**.

На рис. 7-10 приведены примеры 2-D ДЭФ при различных k_1, k_2 и θ_1, θ_2 .

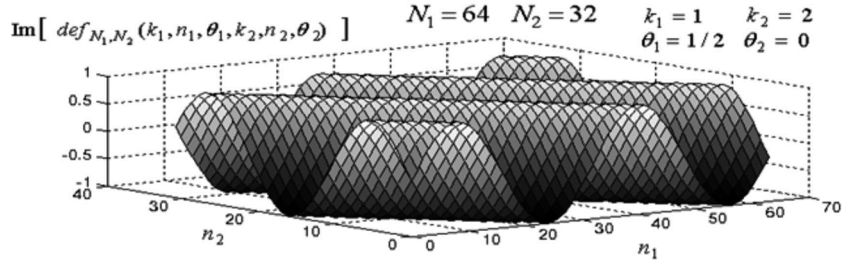
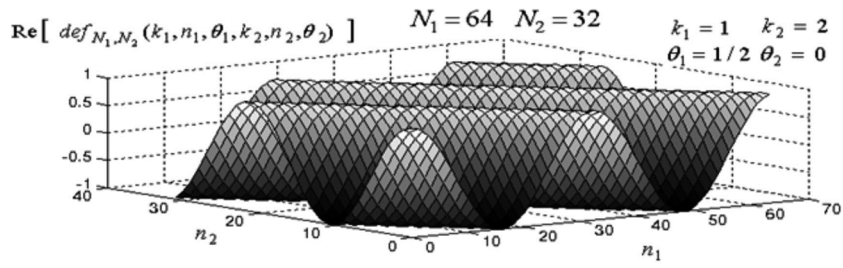


Рис. 7. 2-D ДЭФ при $k_1 = 1, \theta_1 = 1/2, k_2 = 2, \theta_2 = 1/2$

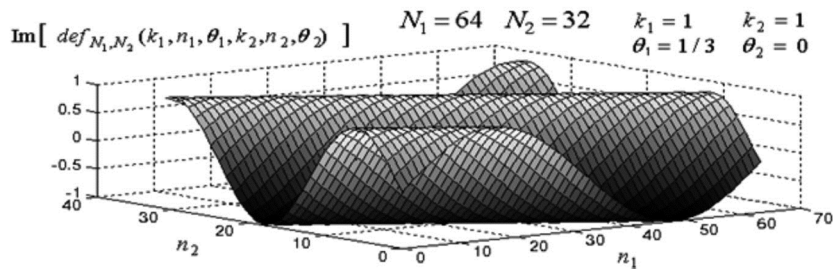
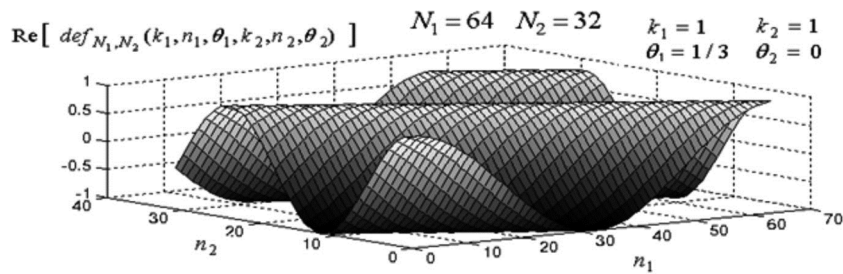


Рис. 8. 2-D ДЭФ при $k_1 = 1, \theta_1 = 1/3, k_2 = 1, \theta_2 = 0$

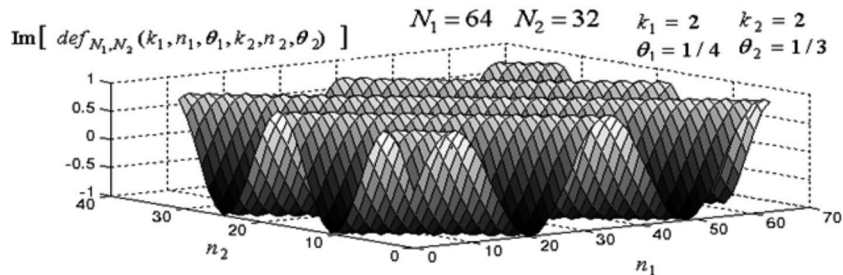
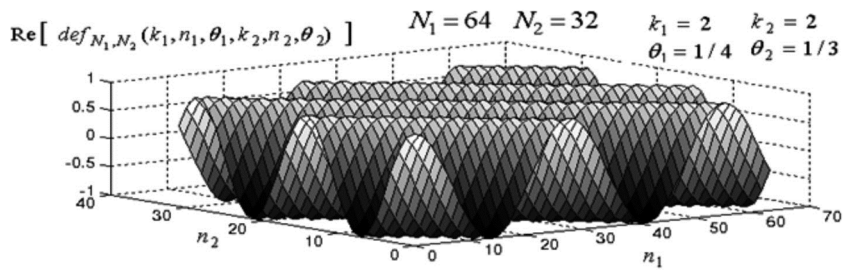


Рис. 9. 2-D ДЭФ при $k_1 = 2, \theta_1 = 1/4, k_2 = 2, \theta_2 = 1/3$

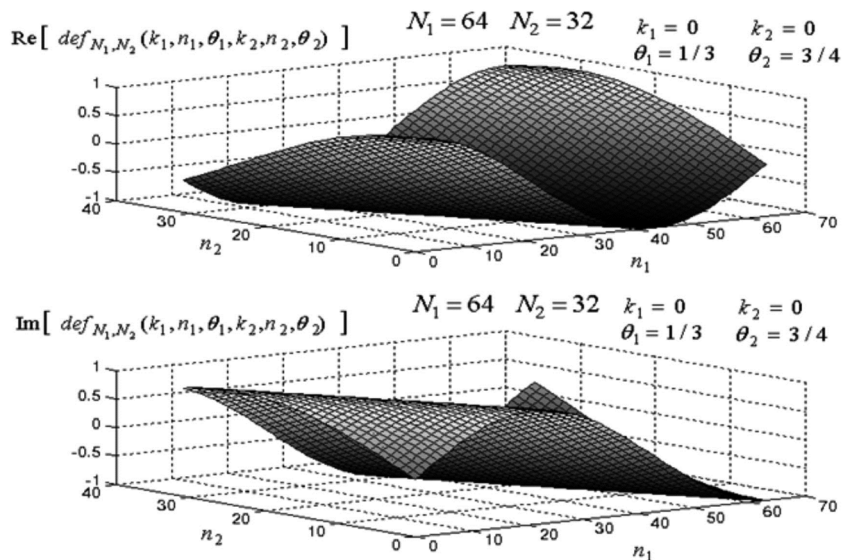


Рис. 10. 2-D ДЭФ-П при $k_1 = 0, \theta_1 = 1/3, k_2 = 0, \theta_2 = 3/4$

Основные свойства базисной системы 2-D параметрических экспоненциальных функций

Базисная система 2-D ДЭФ-П является обобщением базисной системы 2-D ДЭФ и равна ей при нулевых значениях параметров θ_1 и θ_2 .

Базисная система 2-D ДЭФ-П по переменным k_1, k_2 периодична с периодами N_1 и N_2 соответственно:

$$2-D \text{ def}_p(k_1 \pm p_1 N_1, n_1, \theta_1, k_2 \pm p_2 N_2, n_2, \theta_2) = 2-D \text{ def}_p(k_1, n_1, \theta_1, k_2, n_2, \theta_2).$$

Базисная система 2-D ДЭФ-П по переменным n_1, n_2 параметрически периодична с периодами N_1 и N_2 соответственно:

$$2-D \text{ def}_p(k_1, n_1 \pm p_1 N_1, \theta_1, k_2, n_2 \pm p_2 N_2, \theta_2) = 2-D \text{ def}_p(k_1, n_1, \theta_1, k_2, n_2, \theta_2) \cdot W_{N_1}^{\pm \theta_1 N_1 p_1} \cdot W_{N_2}^{\pm N_2 p_2}.$$

Базисная система 2-D ДЭФ-П является 2-D ортогональной системой.

Базисная система 2-D ДЭФ-П является 2-D полной ортогональной системой.

Разложение двумерного сигнала по системе базисных функций 2-D ДЭФ-П определим как **прямое двумерное параметрическое дискретное преобразование Фурье** (2-D ДПФ-П). Преобразование 2-D ДПФ-П является обобщением преобразования 2-D ДПФ и равно ему при нулевых значениях параметров θ_1 и θ_2 .

Преобразование 2-D ДПФ-П аналогично преобразованию 2-D ДПФ может быть представлено как алгебраической форме, так и в матричной форме.

Алгебраическая форма прямого 2-D ДПФ-П:

$$S_{N_1, N_2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) \cdot W_{N_1}^{(k_1+\theta_1) \cdot n_1} \cdot W_{N_2}^{(k_2+\theta_2) \cdot n_2}; \quad (23)$$

где $k_1 = \overline{0, (N_1 - 1)}$, $k_2 = \overline{0, (N_2 - 1)}$ – пространственные частоты; θ_1, θ_2 – параметры преобразования 2-D ДПФ-П: $0 \leq \theta_1, \theta_2 < 1$; $x(n_1, n_2)$ – двумерный сигнал, $n_1 = \overline{0, N_1 - 1}$,

$n_2 = \overline{0, N_2 - 1}$, $S_{N_1, N_2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2)$ – коэффициенты 2-D ДПФ-П (двумерный параметрический векторный пространственно-частотный спектр сигнала $x(n_1, n_2)$).

Алгебраическая форма прямого 2-D ДПФ-П, учитывая свойство разделимости ядра 2-D ДПФ-П, может быть представлена в виде:

$$S_{N_1, N_2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} W_{N_1}^{(k_1+\theta_1) \cdot n_1} \left[\frac{1}{N_2} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) W_{N_2}^{(k_2+\theta_2) \cdot n_2} \right]; \quad (23 \text{ а})$$

или в виде:

$$S_{N_1, N_2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} W_{N_1}^{(k_2+\theta_2) \cdot n_2} \left[\frac{1}{N_1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x(n_1, n_2) W_{N_2}^{(k_1+\theta_1) \cdot n_1} \right]. \quad (23 \text{ б})$$

Формулами (23 а и 23 б) задается поэтапное определение прямого 2-D ДПФ-П методом двух 1-D ДПФ-П, выполняемых последовательно: формулой (23 а) – по строкам, а затем по столбцам; формулой (23 б) – по столбцам, а затем по строкам. 1-D ДПФ-П могут вычисляться методами параметрического быстрого преобразования Фурье (БПФ-П).

Используя свойство сепарабельности ядра 2-D ДПФ-П и соотношения (19) и (21), введем **матричную форму прямого 2-D ДПФ-П:**

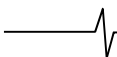
$$S_{N_1 \times N_2, \theta_1, \theta_2} = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} F_{N_1 \times N_1, \theta_1}^{(2)} \cdot X_{N_1 \times N_2} \cdot F_{N_2 \times N_2, \theta_2}^{(1)}; \quad (24)$$

Аналогично выражениям (23а) и (23б) возможны две последовательности выполнения соответствующих матричных умножений:

$$S_{N_1 \times N_2, \theta_1, \theta_2} = \frac{1}{N_1} F_{N_1 \times N_1, \theta_1}^{(2)} \cdot \frac{1}{N_2} \left[X_{N_1 \times N_2} \cdot F_{N_2 \times N_2, \theta_2}^{(1)} \right]; \quad (24 \text{ а})$$

$$S_{N_1 \times N_2, \theta_1, \theta_2} = \left[\frac{1}{N_1} F_{N_1 \times N_1, \theta_1}^{(2)} \cdot X_{N_1 \times N_2} \right] \cdot \frac{1}{N_2} F_{N_2 \times N_2, \theta_2}^{(1)}. \quad (24 \text{ б})$$

Существуют алгебраическая форма и матричная форма **обратного 2-D ДПФ-П (2-D ОДПФ-П)**, которые задаются соответственно следующими соотношениями:



Алгебраическая форма обратного 2-D ОДПФ-П:

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} S_{N_1, N_2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2) W_{N_1}^{-(k_1+\theta_1) \cdot n_1} \cdot W_{N_2}^{-(k_2+\theta_2) \cdot n_2}; \quad (25)$$

Матричная форма 2-D ОДПФ-П:

$$X_{N_1 \times N_2} = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} F_{N_1 \times N_1, \theta_1}^{*(2)} \cdot S_{N_1 \times N_2, \theta_1, \theta_2} F_{N_2 \times N_2, \theta_2}^{*(1)}; \quad (26)$$

где * – знак комплексного сопряжения.

Разложение дискретного 2-D сигнала $x(n_1, n_2)$ в базисе 2-D ДЭФ-П согласно соотношению (23) или соотношению (24), при каждом сочетании параметров θ_1 и θ_2 задает свой конкретный базис. Таким образом, исследователю, варьируя параметрами θ_1 и θ_2 , получает возможность вычислять поэтапно спектр 2-D сигнала $x(n_1, n_2)$, дополненного нулевыми отсчетами либо только по переменной n_1 , либо только по переменной n_2 , либо одновременно по переменным n_1 и n_2 .

Заключение

В работе предложены основы теории двумерной цифровой обработки сигналов, заданных на конечной опорной плоскости, в базисах Фурье с варьируемыми параметрами. Разрабатываемая теория является обобщением классической теории дискретной двумерной спектральной обработки сигналов, заданных на конечной опорной плоскости, в базисах Фурье.

Теоретические основы предлагаемой теории позволяют разрабатывать новые и совершенствовать существующие методы и алгоритмы двумерной Фурье – обработки сигналов, а также исключить или существенно снизить влияние негативных эффектов, сопровождающих применение стандартного 2-D ДПФ.

Предложенное двумерное ДПФ-П существенно расширяет математический аппарат методов информационных технологий цифровой спектральной обработки сигналов и изображений в пространственной и пространственно-частотной областях.

Исследования аналитических свойств 2-D ДЭФ-П, являющихся базисом 2-D ДПФ-П, позволяют сделать вывод о перспективности проведения исследований вероятностных свойств 2-D ДПФ-П двумерных сигналов – свойств, которые вытекают из двумерной версии теоремы Винера-Хинчина.

Литература

1. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Виброакустическое диагностирование коробок передач станков цифровыми методами // Станки и инструмент. – 1983. – № 9. – С. 18-21.
2. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Временные окна при оценке энергетических спектров методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Автоматика. – 1983. – № 4. – С. 39-45.
3. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Модификация дискретного преобразования Фурье для решения задач

интерполяции и свертки функций // Радиотехника и электроника. – 1984. – Т. 29. – № 8. – С. 1561-1570.

4. Пономарева О.В. Развитие теории спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в базисе параметрических экспоненциальных функций // Цифровая обработка сигналов. – 2010. – № 2. – С. 7-11.

5. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Теория и применение параметрического дискретного преобразования Фурье // Цифровая обработка сигналов. 2011. № 1. С. 2-6.

6. Пономарева О.В. Неинвариантность скользящего энергетического параметрического Фурье-спектра действительных тональных сигналов // Цифровая обработка сигналов. – 2014. – № 2. – С. 7-14.

7. Пономарева О.В. Основы теории дискретных косвенных измерений параметров сигналов – Ижевск: Издательство ИжГТУ, – 2016. 172 с.

8. Пономарев А.В. Двумерная обработка сигналов в дискретных базисах Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. – Т. 17. № 1. С. 71-77.

9. Пономарева О.В., Пономарев А.В. Интерполяция в пространственной области двумерных дискретных сигналов с помощью быстрых преобразований Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. – Т. 17. № 1. С. 88-94.

10. Ponomareva O., Ponomarev A., Ponomarev V. Evolution of Forward and Inverse Discrete Fourier Transform // В сборнике: Proceedings of IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS 2018). 2018. С. 313-318.

11. Ponomareva O., Ponomarev A., Ponomareva N. Window - presume Parametric Discrete Fourier Transform // В сборнике: Proceedings of IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS 2018). 2018. С. 364-368.

12. Пономарев В.А., Пономарева О.В., Пономарев А.В. Измерение временных спектров дискретных сигналов на конечных интервалах // Вестник ИжГТУ им. Калашникова М.Т. 2016. – Т. 19. – № 2. – С. 80-83.

13. Пономарева О.В., Алексеев В.А., Пономарев А.В. Быстрый алгоритм измерения спектра действительных сигналов методом аперидического дискретного преобразования Фурье // Вестник ИжГТУ им. Калашникова М.Т. 2014. № 2. С. 106-109.

14. Пономарева О.В. Измерение спектров комплексных сигналов на конечных интервалах методом аперидического дискретного преобразования Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. 2014. № 1(23). С.100-107.

15. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Инвариантность текущего энергетического Фурье-спектра комплексных дискретных сигналов на конечных интервалах // Известия высших учебных заведений России. Радиотехника. 2014. № 2. С. 8-16.

16. Rabiner L., Gold B. Theory and Application of digital signal processing. New Jersey, Prentice-hall, 1975, 772 p.

17. Gonzalez R.C., Woods R.E. Digital Image Processing, 4th Ed. Published by Pearson. –1168 (2018).

18. Pratt William K. Digital image processing. 4th edl, A Wiley-Interscience publication 2007, 807 p.