

# ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

Научно-технический журнал  
№ 1/2019

Издается с 1999 года  
Выходит четыре раза в год

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

д.т.н., чл. кор. РАН Ю.Б. ЗУБАРЕВ

## ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА:

д.т.н., проф. В.В. ВИТЯЗЕВ,  
д.т.н., проф. В.П. ДВОРКОВИЧ

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

д.т.н., проф. Ар.С. Аджемов, д.т.н., проф. Б.А. Алпатов,  
д.т.н., проф. В.Г. Бартенов, д.т.н. Ю.И. Борисов,  
д.т.н., проф. Ю.А. Брюханов, д.т.н., член-корр. РАН  
А.В. Дворкович, д.т.н., профессор В.И. Джиган,  
д.т.н., проф. В.В. Еремеев, д.т.н. Г.В. Зайцев,  
Р.В. Зубарев, А.П. Кирпичников,  
д.т.н., акад. РАН Н.А. Кузнецов,  
В.Г. Мистюков, д.т.н., проф. С.Л. Мишенков,  
д.т.н., проф. А.А. Петровский, д.т.н., проф. Ю.Н. Прохоров,  
д.т.н. А.Л. Приоров, д.т.н., проф. В.Г. Санников,  
к.т.н., проф. В.С. Сперанский, д.т.н., проф. Ю.С. Шинаков

## Адрес редакции:

г. Москва, ул. Авиамоторная, д. 8  
Научный центр МТУСИ  
Тел.: (+7) 903-201-53-33  
E-mail: rntores@mail.ru  
vityazev.v.v@rsreu.ru  
http://www.dspsa.ru

## Издатель:

Российское научно-техническое общество  
радиотехники, электроники и связи им. А.С. Попова  
Компьютерная верстка: И.А. Благодарова  
Дизайн: М.В. Аверин

Подписной индекс по каталогу  
ОАО «Роспечать» – 82185

Подписано в печать 27.05.19 г.  
Формат 60x90/8.

Гарнитура «Arial». Печать офсетная.  
Бумага офсетная. Печ.л. 6,5. Тираж 500 экз.

Заказ № 2857. Отпечатано в  
ООО НПЦ «Информационные технологии»  
Рязань, ул. Островского, д. 21/1  
тел.: (4912) 98-69-84

Издание зарегистрировано в Министерстве  
Российской Федерации по делам печати,  
телерадиовещания и средств  
массовых коммуникаций.

Свидетельство о регистрации ПИ № 77-1488  
от 14.01.2000 г.

Журнал «Цифровая обработка сигналов» включен  
в Перечень ведущих рецензируемых научных изданий,  
в которых по рекомендации Минобрнауки РФ, должны  
быть опубликованы основные научные результаты диссер-  
таций на соискание ученой степени доктора  
и кандидата наук.

## УЧРЕДИТЕЛИ:

АО «Инструментальные системы»  
ФГУП «НИИ радио»

## В НОМЕРЕ:

### Быховский М.А.

Метод кодирования источников сообщений ..... 3

### Быховский М.А.

Метод формирования многочастотных широкополосных  
сигналов и возможности их применения в системах связи ..... 10

### Гладких А.А., Овинников А.А., Тамразян Г.М.

Математическая модель когнитивного  
перестановочного декодера ..... 14

### Завадский А.Л., Казак П.А., Каданцев С.М.

Идентификация вида модуляции фазоманипулированных  
сигналов на основе анализа структуры спектра  
четных степеней ..... 20

### Давыдочкин В.М., Давыдочкина С.В., Езерский В.В.

Снижение погрешности измерения уровня жидкости  
волноводным уровнемером с частотной модуляцией,  
вызванной нарастанием осадков на стенках волновода ..... 26

### Попов Д.И.

Синтез обнаружителей групповых  
многочастотных сигналов ..... 32

### Иванников К.С., Купряшкин И.Ф., Рязанцев Л.Б.

Алгоритм формирования профиля рельефа местности  
с использованием малогабаритной РЛС  
с синтезированной апертурой антенны  
высокого разрешения ..... 37

### Поршнева С.В., Кусайкин Д.В.

О точности тригонометрической интерполяции ..... 43

### Кириллов С.Н., Покровский П.С., Сконников П.Н., Бауков А.А.

Сравнение алгоритмов улучшения  
низкоконтрастных изображений и оценок качества  
комплексирования разнесспектральных изображений  
для цифровых систем видеонаблюдения ..... 52

Подписной индекс по каталогу  
ОАО «Роспечать» – 82185

# Digital Signal Processing

Science & Technical Magazine  
Issue 1, 2019 year

Is published quarterly since 1999

## THE EDITOR-IN-CHIEF:

Dr.Sci. (Tech.), Professor, Corresponding Member  
of Russian Academy of Sciences U.N. Zubarev

## DEPUTY EDITORS-IN-CHIEF:

Dr.Sci.(Tech.), Professor V.V. Vityazev, Dr.Sci.(Tech.),  
Professor V.P. Dvorkovich

## EDITORIAL BOARD:

Adzhemov A.S., Dr.Sci.(Tech.), Professor

Alpatov B.A., Dr.Sci.(Tech.), Professor

Bartenev V.G., Dr.Sci.(Tech.), Professor

Borisov Y.I., Dr.Sci.(Tech.)

Bruchanov Y.A., Dr.Sci.(Tech.), Professor

Dvorkovich A.V. Dr. Sci (Tech), Professor

Corresponding Member of RAS

Djigan V.I., Dr. Sci (Tech), Professor

Eremeyev V.V., Dr.Sci.(Tech.), Professor

Zaitsev G.V., Dr.Sci.(Tech.)

Zubarev R.V.,

Kirpichnikov A.P.,

Kuznetsov N.A., Dr.Sci.(Tech.), Academician

Mistyukov V.G.,

Mishenkov S.L., Dr.Sci.(Tech.), Professor

Petrovsky A.A., Dr.Sci.(Tech.), Professor

Priorov A.L., Dr. Sci (Tech)

Prokhorov Y.N., Dr.Sci.(Tech.), Professor

Sannikov V.G., Dr.Sci.(Tech.), Professor

Speranskii V.S., Dr.Sci.(Tech.), Professor

Shinakov Y.S., Dr.Sci.(Tech.), Professor

## Editorial office address:

Aviamotornaya, 8, Moscow, Russia

Research Center of MTUCI

Phone: (+7) 903-201-53-33

E-mail: rntores@mail.ru,

vityazev.v.v@rsreu.ru

Web: <http://www.dspsa.ru>

## Publisher:

Russian A.S. Popov Society for Radioengineering,  
Electronics & Communications

## Computer makeup:

I.A. Blagodarova

## FOUNDERS:

InSys

Radio Research and Development Institute

## CONTENTS:

### **Bykhovskiy M.A.**

*Method of coding of message sources.....3*

### **Bykhovskiy M.A.**

*Method of formation of the multifrequency broadband signals  
and possibilities of their application in communication systems.....10*

### **Gladkikh A.A., Ovinnikov A.A., Tamrazyan G.M.**

*Mathematical model of cognitive permutation decoder .....14*

### **Zavadskiy A.L., Kazak P.A., Kadantcev S.M.**

*Automatic modulation classification  
of phase shift keyed signals using spectrum analysis structures  
of the range of even degrees.....20*

### **Davydochkin V.M., Davydochkina S.V., Ezerskiy V.V.**

*Decrease in an error of measurement of level of liquid  
the waveguide level gage with frequency modulation,  
caused by increase of rainfall on wave guide walls .....26*

### **Popov D.I.**

*Synthesis of group multi-frequency signals detectors .....32*

### **Ivannikov K. S., Kupryashkin I.F., Ryazantsev L.B.**

*An algorithm for generating the terrain contour with the use  
of small-sized high resolution synthetic aperture rada.....37*

### **Porshnev S.V., Kusaykin D.V.**

*On accuracy of trigonometric interpolation.....43*

### **Kirillov S.N., Pokrovskiy P.S.,**

### **Skonnikov P.N., Baukov A.A.**

*The comparison of multispectral image fusion quality metrics  
and fuzzy image quality improvement algorithms  
for video surveillance systems.....52*

Subscription index: 82185 ("Rospechat")  
ISSN: 1684-2634 9 771684 263005

УДК 621.372.075

## МЕТОД КОДИРОВАНИЯ ИСТОЧНИКОВ СООБЩЕНИЙ

*Быховский М.А., д.т.н., профессор Московского технического университета связи и информатики,  
e-mail: bykhmark@gmail.com.*

### METHOD OF CODING OF MESSAGE SOURCES

*Bykhovskiy M.A.*

*The author describes a new method of message sources' coding. This method allows to eliminate from the messages excessiveness/redundancy resulting from the fact that the symbols constituting these messages are appearing on the source coder (SC) with probabilities which are substantially different from each other. This method is based on the fact that in the SC, the code combinations are formed and they determine the exact spot where the separate symbols appear in the long sequence of symbols which are to be transmitted through the communication channel. It is shown that the proposed coding method of message sources is optimal (by Shannon) and remains optimal with any changes of statistical characteristics of a message source. There are no technical complications involved in creating of the SC and decoder that use this method. The described method of numbering the sequences with a length of  $N$ , in which in  $k$  positions are 1s, can be applied for formation of an  $N$ -dimensional single ensemble with the permutable modulation (PM) proposed by the American scientist D. Stepien. In a communication system with PM, messages are transmitted by the selection of  $k$  orthogonal signals out of  $N$  possible signals.*

**Key words:** OFDM Signals, multifrequency broadband signals, reduction of the peak-factor of signals, beam separation in multi-path channels, diversity reception, multipath link channel, permutation modulation.

**Ключевые слова:** Метод кодирования источников сообщений, энтропия источников сообщений, метод кодирования Хаффмана, арифметическое кодирование, перестановочная модуляция.

#### Введение

Одним из важнейших направлений развития теории информации [1], является создание методов кодирования дискретных или непрерывных источников сообщений путем уменьшения их избыточности. В зависимости от передаваемых символов обычно сообщения представляют собой последовательности электрических сигналов разного уровня и полярности. На рис. 1 показана схема системы связи, в которой осуществляется кодирование источника передаваемых сообщений (ИС).

От источника ИС на вход системы связи сигналы поступают в виде отсчетов, взятых через интервал Котельникова, по времени не превышающий  $1/2 F$  (здесь  $F$  – полоса частот, занимаемая информационным сигналом). Этот сигнал обычно является случайным процессом с отсчетами, обладающими определенным распределением вероятностей и корреляционными связями. Подлежащее передаче сообщение может быть пред-

*Рассматривается новый метод кодирования цифровых источников сообщений, позволяющий удалить из них избыточность, обусловленную появлением символов на входе кодера источника (КИ) с существенно отличающимися друг от друга вероятностями. При этом в КИ формируются кодовые комбинации, определяющие места появления отдельных символов в длинной их последовательности, которые должны быть переданы по каналу связи. Показано, что такой метод кодирования источников сообщений является оптимальным по Шеннону и сохраняет оптимальность при любом изменении статистических характеристик источника сообщений. При создании кодера и декодера, реализующих описанный метод, технических сложностей не возникает. Описанный метод нумерации последовательностей длины  $N$ , в которой на  $k$  позициях находятся «1», может быть применен для формирования  $N$ -мерного ансамбля сигналов с перестановочной модуляцией (ПМ) [9]. В данном случае система связи с ПМ сообщения передаются путем выбора  $k$  ортогональных сигналов из  $N$  возможных.*

ставлено в виде блока из  $N = \text{int}(2FT)$  отсчетов длительностью  $T$  (здесь и далее  $\text{int}(x)$  – целая часть числа  $x$ ), создаваемых ИС на входе блока 1 обработки (БО-1).

Наличие корреляции означает, что значения отсчетов, входящих в группу из  $N$  вновь поступивших, может быть предсказано на основе знания некоторого числа из  $m$  отсчетов, им предшествующих. Истинные значения

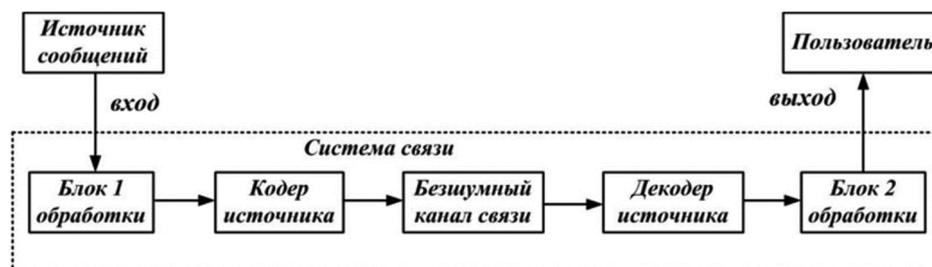
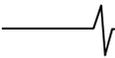


Рис. 1. Схема системы связи с кодированием источника



каждого отсчета, принадлежащего к группе вновь поступивших, равно предсказанному значению, являющемуся, как правило, линейной функцией значений этих  $m$  отсчетов [2], плюс значение ошибки предсказания. Отметим, что диапазон изменения уровня ошибок предсказания невелик и их значения в цифровой форме могут быть представлены небольшим числом бит, в то время, как для представления точных значений каждого отсчета требуется достаточно большое количество бит.

После завершения процедуры устранения избыточности из последовательности отсчетов путем формирования их предсказанных значений и ошибок предсказания создается новая последовательность независимых отсчетов. Каждый из возможных уровней этих отсчетов ( $a_i$ , где  $i = 1 \dots L$ ) встречается в данной последовательности с определенной вероятностью ( $p_i$ ). Минимальное количество бит, необходимых для передачи каждого отсчета данной последовательности в соответствии с [1] пропорционально  $\log_2(1/p_i)$ . При этом среднее количество бит, приходящееся на один отсчет, равно энтропии последовательности отсчетов  $H = \sum_{i=1}^L p_i \log_2(1/p_i)$ .

В данном исследовании рассмотрен метод построения кодера источника (КИ), на вход которого поступают  $N$  независимых отсчетов, каждый из которых может принимать один из  $L$  возможных уровней  $a_i$ . В КИ последовательность  $N$  символов  $a_i$  должна быть преобразована в двоичную последовательность, имеющую минимально возможную длину, равную, примерно  $N_{ки} \approx (N \cdot H)$ . Передаваемые символы поступают на вход КИ с определенной вероятностью  $p_i$  ( $i = 1 \dots L$ ;  $\sum_{i=1}^L p_i = 1$ ). (Эти вероятности могут существенно отличаться друг от друга.

Если поступающую на вход КИ последовательность длины  $N$ , состоящую из  $L$  передаваемых символов  $a_i$ , преобразовать в код, не учитывая вероятности их появления на входе КИ, т.е. преобразовать ее в последовательность двоичных символов, каждый из которых имеет длину  $\log_2(L)$ , то на выходе КИ она будет представлена последовательностью двоичных символов, длина которой равна  $B_0 = N \cdot \log_2(L)$  бит. Учет существенного отличия вероятностей появления разных символов на входе КИ обеспечивает сокращение избыточности сообщения [1], подлежащего передаче по каналу связи. Это позволяет значительно уменьшить количество бит в последовательности, сформированной на выходе КИ и передаваемой по каналу связи. Отметим, что кодирование источника сообщения должно быть выполнено таким образом, чтобы на приемном конце линии связи было возможно полное восстановление сигнала, поступившего в канал связи с выхода КИ.

Применение эффективных методов кодирования источников сообщений при создании систем связи имеет важное значение, так как это позволяет эффективно использовать канал связи с ограниченной полосой час-

тот, обеспечивая максимально возможную скорость передачи сообщений.

В теории кодирования источников информации [1] предполагается, что канал связи является бесшумным, т.е. последовательность символов, сформированная на выходе КИ, в канале связи не искажается. Эта последовательность, как показано на рис. 1, на приемном конце линии связи поступает на вход декодера источника (ДИ), в котором она должна быть обработана, и на выходе должен быть сформирован сигнал, являющийся копией последовательности символов  $a_i$ , поступивших на вход КИ. Сигнал с выхода ДИ подается на вход блока обработки БО-2, выполняющего операции, обратные тем, которые производились над сигналом, поступившим на вход БО-1. На выходе БО-2 формируется последовательность коррелированных отсчетов, являющейся копией отсчетов, поступивших на вход БО-1.

Метод Хаффмана [3, 4] построения неравномерных кодов послужил основой многих алгоритмов для сжатия текстовой и графической информации, он прост и эффективен, однако он строго оптимален только в тех случаях, когда вероятности появления символов алфавита пропорциональны числам  $2^{-n}$ . Кроме того, если в процессе передачи вероятности  $p_i$  появления «букв» в передаваемом сообщении изменяются, то при использовании этого метода усложняется техническая реализация блоков КИ и ДИ в системе связи. Другим методом кодирования символов, вероятность появления которых в передаваемой последовательности существенно отличается друг от друга, является арифметическое кодирование [5, 6]. Этот метод присваивает код не каждому передаваемому символу, а сразу достаточно длинной последовательности передаваемых символов.

Широкое применение для кодирования источников находят словарные методы, предложенные учеными Я. Зивом и А. Лэмплем [6]. Достоинством словарных методов является то, что они позволяют адаптировать кодер источника к изменению вероятностных характеристик сообщений, поступающих на его вход. Однако при этом существенно усложняется алгоритм работы КИ и ДИ и их техническая реализация.

В данной работе предложен новый метод устранения избыточности из последовательности передаваемых символов  $a_i$  ( $i = 1 \dots L$ ). В отличие от известных методов кодирования источников сообщений, в данном методе кодируются не сами передаваемые символы  $a_i$ , а номера позиций, на которых они находятся в подлежащей передаче по каналу связи последовательности символов длиной  $N \gg 1$ . При этом учитывается, что количество позиций в передаваемой последовательности символов, занимаемых определенным символом  $a_i$ , пропорционально  $p_i$  – вероятности его появления в этой последовательности. Данный метод позволяет создавать оптимальные КИ, которые легко адаптируются к изменению вероятностных характеристик входных сообщений.

## 1. Метод кодирования источников сообщения

Исследуемый метод основан на доказанной в [1] теореме, согласно которой при большой длине  $N$  последо-

вательности передаваемых с вероятностью появления  $p_i$  символов  $a_i$  ( $i = 1 \dots L$ ), разделенных на два класса:

1) в первый класс входят последовательности, содержащие  $(Np_i - \delta_i) \leq k_i \leq (Np_i + \delta_i)$  символов  $a_i$ , где при  $N \rightarrow \infty$  отношение  $(\delta_i/Np_i) \rightarrow 0$ , при этом  $\sum_{i=1}^L k_i = N$ ;

2) во второй класс входят все остальные последовательности, для которых число символов в передаваемой последовательности удовлетворяют условиям  $k_i < (Np_i - \delta_i)$  или  $k_i > (Np_i + \delta_i)$ .

При этом вероятность принадлежности любой передаваемой последовательности символов к первому классу при  $N \rightarrow \infty$  стремиться к «1», а ко второму – к «0». Кроме того, вероятность появления длинных последовательностей символов, попадающих в первый класс, практически одинакова и равна  $P_0 = 1/M$ , где  $M$  – количество разных последовательностей, относящихся к 1-му классу, где  $M$  равно

$$M = N! / \prod_{i=1}^L (k_i)! = \prod_{i=1}^L M_i. \quad (1)$$

В (1)  $M_i = C_N^{k_i}$ ,  $N_i = (N - \sum_{i=1}^{i-1} k_i)$ ,  $k_i = \text{int}(Np_i)$  и

$\sum_{i=1}^L k_i = N$  (здесь и далее  $C_n^m = n! / m!(n-m)!$  – число сочетаний из  $n$  по  $m$ ). Если учесть формулу Стирлинга  $K! \approx \sqrt{2\pi K} (K/e)^K$ , справедливую при  $K \gg 1$ , то из (1) следует

$$M \approx \left\{ (\sqrt{2\pi N})^{-(L-1)} \left[ \prod_{i=1}^L p_i^{-0.5} \right] \right\} \left[ \prod_{i=1}^L p_i^{-p_i} \right]^N. \quad (2)$$

Отметим, что значение  $M_1$  в (1) определяет количество разных последовательностей  $\Pi_{m_1}^1$ , имеющих длину  $N$ , в которых символы  $a_1$ , передаваемые по каналу связи, занимают в  $\Pi_{m_1}^1$  определенные  $k_1$  позиции. На незанятых символами  $a_1$  позициях, количество которых равно  $(N - k_1)$ , могут быть размещены другие символы  $a_i$  ( $i = 2 \dots L$ ). Значения  $M_i$  при  $i > 1$  определяет количество возможных последовательностей ( $\Pi_{m_i}^i$ ) из символов  $a_i$ , которые могут располагаться на выделенных для них  $k_i$  позициях в последовательности, имеющей длину  $N_i = (N - \sum_{l=1}^{i-1} k_l)$ , оставшиеся свободными после того, как были определены позиции, на которых в сообщении должны находиться символы  $a_l$  при  $l \leq (i-1)$ .

Каждой последовательности  $\Pi_{m_i}^i$  должен быть присвоен номер  $m_i$ . Этот номер определяется позициями, на которых в последовательности символов длиной  $N_i$  находятся символы  $a_i$ . Номер  $m_i$  может быть представлен в виде двоичной последовательности символов, имеющей длину, равную  $B_i = \log_2(M_i)$ . Алгоритм присвоения номера  $m_i$  конкретной последовательности  $\Pi_{m_i}^i$

из символов «0» и «1» длиной  $N_i$  анализируется в разделе 2. Таким образом, на выходе КИ формируются  $L$  двоичных последовательностей, имеющих длину  $B_i$  ( $i=1 \dots L$ ), определяющих номера  $m_i$  позиций, на которых расположены передаваемые символы  $a_i$  в последовательности с длиной  $N$ .

В системах передачи с временным разделением каналов эти  $L$  последовательности могут быть переданы одна за другой, а в системах с частотным разделением каналов они могут быть переданы на  $L$  отдельных поднесущих.

В исследуемой системе кодирования источника сообщений вместо передачи последовательности специальных кодов для разных символов  $a_i$  осуществляется передача  $L$  двоичных последовательностей, общая длина которой составляет

$$B_s = \sum_{i=1}^L B_i = \sum_{i=1}^L \log_2(M_i) = \log_2(M). \quad (3)$$

Учитывая (2), нетрудно определить, что на один передаваемый символ в рассматриваемой системе при  $N \gg 1$  требуется примерно  $H$  двоичных знаков

$$H = \frac{\log_2(M)}{N} \approx \sum_{i=1}^L p_i \log_2(1/p_i) = H_0. \quad (4)$$

В (4)  $H_0$  – энтропия источника сообщений. В соответствии с теорией кодирования источников сообщений [1], из формулы (4) следует, что при  $N \gg 1$  рассматриваемая система кодирования источника сообщений является оптимальной.

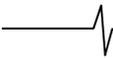
Как видно из (2), для передачи сообщений по линии связи в блоке КИ осуществляется следующая процедура обработки последовательности, имеющей  $N$  позиций, в которой на определенных  $k_i = \text{int}(Np_i)$  позициях расположены информационные символы  $a_i$ :

1) Осуществляется упорядочение передаваемых символов  $a_i$  в соответствии с их вероятностями – в начале списка располагаются символы, имеющие наибольшие значения  $p_i$ -вероятности их передачи (можно использовать и другой метод упорядочения, располагая в начале списка символы с наименьшими значениями  $p_i$ ).

2) Из  $N$  позиций в передаваемой последовательности символов выбираются  $k_1 = \text{int}(Np_1)$  позиций, на которых должны располагаться символы  $a_1$ . Количество различных вариантов выбора этих позиций, как видно из (2), равно  $M_1 = C_N^{k_1}$ . При этом для размещения остальных символов  $a_i$  ( $i = 2 \dots L$ ) остается  $(N - k_1)$  позиций.

3) Позиции, на которых размещаются символы  $a_2, a_3, \dots, a_{L-1}$ , определяются последовательно так, как это описано в п. 2: выбирается  $k_i = \text{int}(Np_i)$  позиций, на которых должны располагаться символы  $a_i$ , далее находится количество различных вариантов выбора этих позиций, которое, как видно из (2), равно  $M_i = C_{N_i}^{k_i}$ , где

$$N_i = (N - \sum_{i=1}^{L-i} k_i).$$



4) Формируются  $L$  двоичных последовательностей, каждая из которых имеет длину  $B_i$  и определяет номер  $m_i$  передаваемой по каналу связи последовательности  $\Pi_{m_i}^i$  длиной  $N_i$ . Номер  $m_i$  определяет, в свою очередь, номера определенных  $m_i$  позиций в последовательности  $\Pi_{m_i}^i$ , на которых размещены информационные символы  $a_i$ .

5) Эти последовательности объединяются в общую двоичную последовательность, имеющую, как следует из (3), длину  $B_s$ , которая передается по каналу связи и поступает на вход ДИ.

Отметим, что рассматриваемая система КИ конструируется так, что состав передаваемых информационных символов  $a_i$ , частота их появления в передаваемых сообщениях ( $k_i$ ), а также  $N$  – длина кодируемой последовательности информационных символов, были известны как на передающем, так и на приемных концах линии связи. Значения  $N$  и  $k_i$  однозначно определяют основные параметры системы  $M_i$ ,  $B_i$  и  $N_i$ , которые были введены выше.

По каналу связи фактически осуществляется передача номеров  $m_i$  позиций, на которых в кодируемой последовательности длиной  $N$  размещены символы  $a_i$ . После обработки в ДИ и определения всех значений  $m_i$  происходит восстановление переданной информационной последовательности символов  $a_i$ , поступившей на вход КИ.

## 2. Алгоритм нумерации вариантов размещения $k$ символов единиц в последовательности, имеющей $N$ позиций

Основой исследуемого метода кодирования источников сообщений является алгоритм нумерации вариантов размещения  $k$  единиц в последовательности символов 0 и 1, имеющей  $N$  позиций.

В разделе 2.1 приведена процедура выполнения такой нумерации, в результате которой формируется номер варианта построения, исходя из конкретного размещения символов «1» в последовательности, длина которой равна  $N$ . Эта процедура представляет собой алгоритм кодирования источника сообщений. Применение этой процедуры к кодированию источников сообщений подразумевает, что на позициях, на которых размещены единицы в последовательности длиной  $N_i$ , передаются информационные символы  $a_i$ .

В разделе 2.2 анализируется процедура декодирования источника, которая является обратной процедуре нумерации и позволяет по поступившему на вход ДИ номеру варианта размещения символов «1» в последовательности длины  $N$ , определить номера позиций в последовательности, где должны находиться символы  $a_i$ . Тем самым на приемном конце линии связи восстанавливается информация о размещении всех переданных символов  $a_i$  на разных позициях в последовательности длины  $N$ .

### 2.1 Нумерация вариантов размещения $k$ символов единиц в последовательности, имеющей $N$ позиций

Каждую последовательность, состоящую из  $k$  единиц и  $(N-k)$  нулей, расположенных в определенном порядке, обозначим  $\Pi_{m0}$  и присвоим ей определенный номер  $m$ . При этом рассмотрим задачу формирования на передающем конце линии связи числа  $m$  – номера последовательности  $\Pi_{m0}$  с определенным вариантом размещения в ней  $k$  единиц. Каждому варианту такого размещения соответствуют определенные номера позиций  $l_i$ , на которых в  $\Pi_{m0}$  расположены «1». Отметим, что общее количество  $\Pi_{m0}$  равно  $C_N^k$  – числу сочетаний из  $N$  по  $k$ .

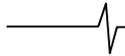
Положим, что возможные значения номеров  $l_i$  позиций, на которых в  $\Pi_m$  размещены «1», определяются так, что  $1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_{(k-1)} < l_k \leq N$  и  $l_i \geq i$ . Каждому варианту размещения единиц в последовательности из  $N$  символов должен быть присвоен номер  $m$ , зависящий от  $k$  значений  $l_i (m = F(l_1, \dots, l_k))$ . Определение номера  $m$  по существу представляет собой кодирование информации о расположении информационных символов в тексте передаваемого сообщения. Длина двоичной последовательности, определяющей этот номер, может быть существенно меньше длины в битах последовательности  $N$  символов, поступившей на вход кодера источника (КИ) сообщения.

В передаваемом сообщении ( $\Pi_{m0}$ ) полезная информация заключается в значениях параметров  $l_i^0 (i = 1 \dots k)$ . Эта последовательность поступает на вход КИ, в котором для  $\Pi_{m0}$  формируется ее номер  $m_0 = F(l_1^0, \dots, l_k^0)$ . Значение этого номера передается по каналу связи.

Рассмотрим алгоритм нумерации разных  $\Pi_{m0}$ . Из соотношений  $C_N^k = C_{N-1}^k + C_{N-1}^{k-1}$ ,  $C_{N-1}^k = C_{N-2}^k + C_{N-2}^{k-1}, \dots$ ,  $C_k^k = C_{k+1}^k + C_{k+1}^{k-1}$  [7], справедливых при условии, что  $k < N$ , следует формула:

$$C_N^k = C_k^k + \sum_{i=0}^{N-(k+1)} C_{k+i}^{k-1}. \quad (5)$$

Отметим, что  $C_N^N = 1$  при  $k = N$ . Формула (5) показывает, что при  $k < N$  множество  $\Pi_m$  всех последовательностей  $\Pi_{m0}$ , состоящее из  $C_N^k$  элементов, может быть разделено на  $a_i (N - k + 1)$  групп. Первая группа, как следует из (5), имеет один единственный элемент (так как  $C_k^k = 1$ ), а  $(i+2)$ -я группа имеет  $C_{k+i}^{k-1}$  элементов. К первой группе принадлежат те элементы  $\Pi_{m0}$  множества  $\Pi_m$ , в которых символы 1 расположены на первых  $k$  позициях, а на остальных  $(N - k)$  позициях расположены 0. В элементах  $\Pi_{m0}$ , принадлежащих  $(i + 2)$ -й группе, на позициях  $(k + i + 1), (k + i + 2), \dots, N$  расположены одни нули, а на позициях, номера которых меньше  $(k + i + 1)$ , расположены  $(k - 1)$  единиц и  $i$  нулей. Так как значения  $l_k$  в передаваемом сообщении могут принимать любые значения, лежащие в интервале  $k \leq l_k \leq N$ , то из (5) следует, что количество групп в множестве  $\Pi_m$ , соот-



ветствующих всем возможным значениям  $l_k$ , равно  $(N - k)$ .

Номер группы, к которой принадлежит  $\Pi_{m_0}$ , определяется значением  $l_k^0$ . Знание номера этой группы позволяет определить интервал чисел, в котором лежит номер  $\Pi_{m_0}$ , если  $l_k = l_k^0$ . Так как согласно указанным выше условиям  $k \leq l_k$ , то при  $l_k^0 = k$  обязательно выполняется условие  $l_i^0 = i$  для всех значений  $i \leq k$  и в таком случае в элементе  $\Pi_{m_0}$  множества  $\Pi_m$  единицы расположены на первых  $k$  позициях. Такому элементу  $\Pi_{m_0}$  должен быть присвоен номер  $m_0 = 1$ .

Если же  $l_k^0 > k$ , то нижняя граница этого интервала равна количеству элементов  $\Pi_m (W_n^1)$ , принадлежащих к группам, соответствующих значениям  $l_k \leq (l_k^0 - 1)$ . Во всех этих группах на позициях с номерами, превышающими  $l_k^0 - 1$ , расположены одни нули. Из (5) следует

$$W_n^1 = C_k^k + \sum_{i=0}^{l_k^0 - (k+1)} C_{k+i}^{k-1}.$$

Учитывая, что  $C_{k+m+1}^k = \sum_{i=0}^{k+m} C_{k+i}^{k-1}$  [6], найдем:

$$W_n^1 = C_k^k + C_{l_k^0 - 1}^k, \quad C_k^k = 1. \tag{6}$$

Поскольку  $\Pi_{m_0}$  принадлежит к группе, имеющей  $C_{l_k^0}^{k-1}$  элементов, то верхняя граница интервала  $(W_B^1)$ , в котором лежит значение  $m_0$ , равно  $W_n^1 = W_n^1 + C_{l_k^0}^{k-1}$ , т.е.

$$W_n^1 \leq m_0 \leq W_n^1 + C_{l_k^0}^{k-1}.$$

Границы  $W_n^1$  и  $W_B^1$  могут быть уточнены, если учесть, что группа, к которой принадлежит  $\Pi_{m_0}$ , имеет  $C_{l_k^0}^{k-1}$  элементов. Используя (5), можно записать следующее соотношение:

$$C_{l_k^0}^{k-1} = C_{l_k^0 - 1}^{k-1} + \sum_{i=0}^{l_k^0 - 1 - (k+1)} C_{l_k^0 - 1 + i}^{k-2}. \tag{7}$$

Соотношение (7) показывает, что эта группа, в которой на позиции  $m_0$ ,  $l_k^0$  в  $\Pi_{m_0}$  стоит единица, также может быть разбита на подгруппы, соответствующие значению  $l_{k-1}^0$  – номеру позиции, на которой стоит 1 во входящей в эту подгруппу  $\Pi_{m_0}$ . Так как  $l_{k-1} = l_{k-1}^0$  для  $\Pi_{m_0}$ , то в том случае, если  $l_{k-1}^0 \geq k$ , в подгруппах, у которых  $(k-1) \leq l_{k-1} \leq (l_{k-1}^0 - 1)$ , имеется  $V_1 = C_{k-1}^{k-1} + \sum_{i=0}^{l_{k-1}^0 - 1 - (k+1)} C_{k-1+i}^{k-2} = C_{k-1}^{k-1} + C_{l_{k-1}^0 - 1}^{k-1}$  элементов, предшествующих  $\Pi_{m_0}$ . Отметим, что в подгруппе, к которой принадлежит  $\Pi_{m_0}$ , между позициями, номера которых в  $\Pi_{m_0}$  равны  $l_{k-1}^0$  и  $l_k^0$ , стоят  $(l_k^0 - l_{k-1}^0)$  нуля.

Таким образом, в этом случае уточненная граница снизу для  $m_0$  – номера  $\Pi_{m_0}$ , равна следующему выражению  $W_n^2 = W_n^1 + V_1$ . Так как группе, к которой принадлежит  $\Pi_{m_0}$  имеется  $C_{l_k^0}^{k-1}$  элементов, то верхняя граница интервала  $(W_B^2)$ , в котором лежит значение  $m_0$ , равно

$$W_B^2 = W_n^2 + C_{l_k^0}^{k-1}, \quad \text{т.е.} \quad W_n^2 \leq m_0 \leq W_B^2. \quad \text{Если же } l_{k-1}^0 = (k-1), \text{ то } V_1 = C_{k-1}^{k-1} = 1 \text{ и номер } m_0 = W_n^2 + 1.$$

В том случае, если выполняются условия  $l_i^0 > i$  ( $i = 1 \dots k$ ), аналогично тому, как это сделано выше, определяем для каждого значения  $l_{k-d}^0$  значения поправки  $V_d = C_{k-d}^{k-d} + C_{l_{k-d}^0 - 1}^{k-d}$ ,  $C_{k-d}^{k-d} = 1$ . В результате для определения номера элемента  $\Pi_{m_0}$  получаем следующую формулу:

$$m_0 = W_n^1 + \sum_{d=1}^k V_d. \tag{8}$$

Если же при некотором значении  $d_0$  имеем  $l_{k-d}^0 = i$  при  $i \leq k - d_0$ , а при  $i > (k - d_0 + 1)$  выполняется условие  $l_i^0 > i$ , то значение  $m_0$  в этом случае можно найти по формуле:

$$m_0 = W_n^1 + \sum_{d=1}^{d_0-1} V_d + 1. \tag{9}$$

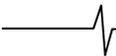
## 2.2. Определение по номеру $m_0$ позиций $l_i^0$ , на которых в последовательности символов, формируемой выходе ДИ и имеющей длину $N$ , находятся единицы

Как уже отмечалось, по принятому номеру  $m_0$  в ДИ должны быть определены значения позиций  $l_i^0$ , на которых в формируемой на его выходе последовательности  $\Pi_{m_0}$  находятся единицы. Это осуществляется путем сравнения значения номера  $m_0$  с числами  $W_n^j$  и  $W_B^j$ , которые полностью определяются значениями  $N$  и  $k$ , известными как на передающем, так и на приемном концах линии связи. Сравнивая значение  $m_0$  с числами  $W_n^1$  и  $W_B^1$ , определяют значение параметра  $l_k^0$ , затем, сравнивая значение  $m_0$  с числами  $W_n^2$  и  $W_B^2$ , зависящими не только от  $N$  и  $k$ , но и от значения параметра  $l_k^0$ , определяют величину  $l_{k-1}^0$ , затем находят, как было показано выше, числа  $W_n^3$  и  $W_B^3$ , зависящие от  $N$ ,  $k$ ,  $l_k^0$  и  $l_{k-1}^0$ . Сравнение числа  $m_0$  с числами  $W_n^3$  и  $W_B^3$  позволяет определить значение  $l_{k-2}^0$ .

При таком алгоритме работы ДИ в нем определяются значения всех параметров  $l_i^0$  ( $i = 1 \dots k$ ) и формируется последовательность  $\Pi_{m_0}$ , идентичная той информационной последовательности  $\Pi_{m_0}$ , которая поступила на вход КИ на передающем конце линии связи.

## 3. Пример нумерации последовательностей $\Pi_{m_0}$ для случая, когда $k = 3$ и $N = 6$

На рис. 2 для наглядности приведены изображения разных последовательностей  $\Pi_{m_0}$  из 1 до 0, для которых  $N = 6$  и  $k = 3$  длиной. Общее количество таких последовательностей равно  $C_6^3 = 20$ . Черными точками отмечены места, на которых в них размещены 0, а вертикальными линиями места, на которых размещены 1. На рис. 2 указаны также номера  $m$  разных  $\Pi_{m_0}$ .



Поясним принятый в § 2.1 порядок нумерации элементов множества  $\Pi_m$  в данном конкретном случае. Номер  $m=1$  присвоен тому  $\Pi_{m0}$ , в котором первые три позиции занимают, как показано на рис. 2, символы 1. Этот  $\Pi_{m0}$  является элементом первой группы в множестве всех  $\Pi_m$ , которая содержит  $C_3^3 = 1$  элементов, т.е. этой группе принадлежит только единственный элемент. Для этой  $\Pi_{m0}$  ( $\Pi_1$ ) значения  $l_i$  равны  $l_1 = 1$ ,  $l_2 = 2$ , и  $l_3 = 3$ . В рассматриваемом примере из  $\Pi_1$  можно, как поясняется ниже, получить все остальные  $\Pi_{m0}$ .

На рис. 2 показана также вторая группа  $\Pi_{m0}$ , в которой  $l_3 = 4$ , а  $1 \leq l_1 < l_2 \leq 3$ . Первый элемент этой группы ( $\Pi_2$ ) имеет две рядом стоящие единицы на позициях 1 и 2, за которыми следует один нуль. Он получается за счет перемещения последней 1 в  $\Pi_1$  на одну позицию влево. В этой группе на трех позициях 1...3 расположены в разном порядке две 1. Эта группа имеет  $C_3^2 = 3$  элемента ( $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  и  $\Pi_4$ ).

В третьей группе, в которой  $l_3 = 5$ , а  $1 \leq l_1 < l_2 \leq 4$ , на 4-х позициях две единицы могут быть размещены  $C_4^2 = 6$  способами, т.е. эта группа имеет шесть разных элементов:  $\Pi_5 \dots \Pi_{10}$ .

В четвертую группу входят те  $\Pi_{m0}$ , у которых  $l_3 = 6$ , а  $1 \leq l_1 < l_2 \leq 5$ . В них на 5-ти позициях две единицы могут быть размещены  $C_5^2 = 10$  способами, т.е. эта группа имеет 10 разных элементов ( $\Pi_{11} \dots \Pi_{20}$ ). При формировании номеров  $\Pi_{m0}$ , показанных на рис. 2, мы придерживались следующих правил: 1) меньшие номера получают те  $\Pi_{m0}$ , у которых имеется большее количество 1 на первых позициях в последовательности длиной 6; 2) при формировании элементов  $\Pi_{m0}$  из элементов  $\Pi_{(m-1)0}$ , входящих в предшествующую группу, в каждой группе осуществляется перемещение 1, расположенной в левой части  $\Pi_{(m-1)0}$  на одну позицию вправо.

Следует отметить, что номер группы, к которой принадлежит конкретная последовательность  $\Pi_{m0}$ , определяется значением  $l_3$ : если  $l_3 = 3$ , то ВР принадлежит к первой группе, если  $l_3 = 4$  – ко второй, если  $l_3 = 5$  – к третьей, а если  $l_3 = 6$  – к четвертой. При этом, если элемент  $\Pi_{m0}$  принадлежит ко второй группе, то его номер находится в интервале  $C_3^3 + 1 = 2 \leq m \leq C_3^3 + C_3^2 = 4$ , если к третьей, то его номер находится в интервале  $C_3^3 + C_3^2 + 1 = 5 \leq m \leq C_3^3 + C_3^2 + C_4^2 = 10$ , а если к четвертой, то номер  $\Pi_{m0}$  находится в интервале  $C_3^3 + C_3^2 + C_4^2 + 1 = 11 \leq m \leq C_3^3 + C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 = 20$ . Уточнение номера  $\Pi_{m0}$  определяется значением  $(l_3 - l_2)$ .

Как видно из рис. 2, например во второй группе два имеется всего два  $\Pi_{m0}$ , для которых  $(l_3 - l_2) = 1$ , в третьей группе таких  $\Pi_{m0}$  три, а в четвертой – четыре. Поэтому, если  $\Pi_{m0}$  принадлежит ко второй группе, то в рассматриваемом случае их номера лежат в интервале  $3 \leq m \leq 4$ , если к третьей, то  $8 \leq m \leq 10$ , а если к четвертой, то  $17 \leq m \leq 20$ . Точное значение номера  $m$  зависит от значения  $(l_2 - l_1)$ . Если, например,  $\Pi_{m0}$  принадлежит к четвертой группе и  $(l_2 - l_1) = 2$ , то, как видно из рис. 2  $m = 19$ , если же  $(l_2 - l_1) = 4$ , то  $m = 17$ .

Номера  $\Pi_{m0}$  в рассматриваемом случае могут быть определены с помощью формул (8) и (9). Как пояснено в разделе 2.2 этой работы, в результате обработки в ДИ принятых номеров  $m$  на их выходе могут быть восстановлены информационные последовательности  $\Pi_{m0}$ , которые поступили на вход КИ на передающем конце линии связи.

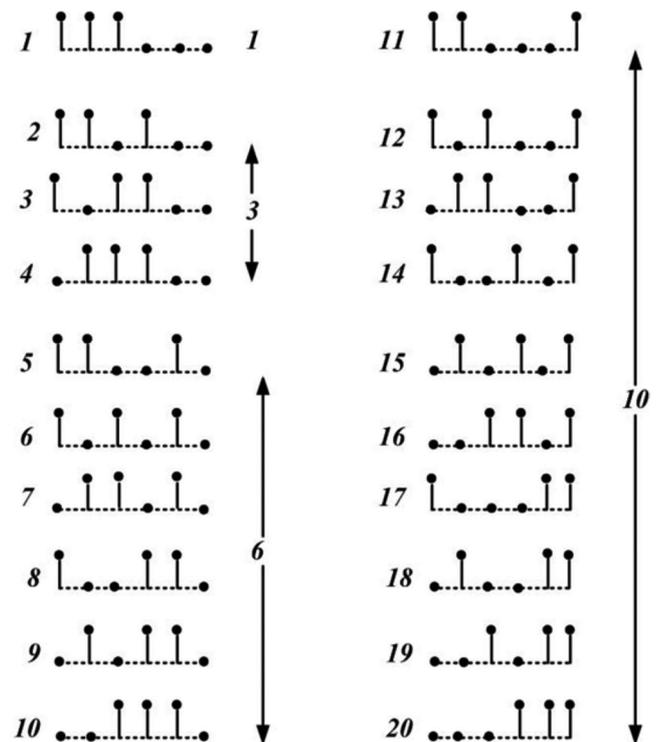


Рис. 2. Изображения разных  $\Pi_{m0}$  для случая, когда  $N = 6$  и  $k = 3$

### Заключение

В данной статье описан новый метод кодирования цифровых источников сообщений, который позволяет удалить из них избыточность, обусловленную тем, что состоящие из этих сообщений символы, появляются на входе ИК с существенно отличающимися друг от друга вероятностями. Этот метод основан на том, что в КИ формируются кодовые комбинации, определяющие места появления отдельных символов в длинной последо-

вательности символов, которые должны быть переданы по каналу связи.

Показано, что предлагаемый метод кодирования источников сообщений является оптимальным по Шеннону, т.е. количество передаваемых по каналу связи символов, приходящихся на один символ передаваемого сообщения, равен энтропии источника сообщений. Этот метод кодирования адаптивен к статистике появления отдельных символов в передаваемой последовательности и сохраняет оптимальность при любом изменении статистических характеристик источника сообщений. При создании кодера источника и декодера, реализующих этот метод, технических сложностей не возникает.

Следует указать на возможность применения данного метода нумерации последовательностей, имеющих длину  $N$ , в которой на  $k$  позициях находятся «1», для формирования  $N$ -мерного ансамбля сигналов с перестановочной модуляцией (ПМ) [8]. В системе связи с ПМ сообщения передаются путем выбора  $k$  ортогональных сигналов из  $N$  возможных.

*Автор выражает свою признательность проф. А.В. Дворковичу и проф. В.П. Дворковичу за обсуждение данной работы и полезные замечания.*

## Литература

1. Shannon C. A mathematical theory of communication. BSTJ, v. 27, № 3, 1948 (Перевод на русский язык статьи «Математическая теория связи», опубликована в книге Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: Из-во иностранной литературы. // Под ред. Р.Л. Добрушина и О.Б. Лупанова, 1963).
2. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978. – 848 с.
3. Галлагер Р. Теория информации и надежная связь. / Под ред. М.С. Пинскера и Б.С. Цыбакова / М.: Советское радио, 1974.
4. Витерби А.Д., Омура Дж.К. Принципы цифровой связи и кодирования. / Под ред. К.Ш. Зигангирова. / М.: Радио и связь, 1982.
5. Вернер М. Основы кодирования. М.: Техносфера, 2004.
6. Соломон Д. Сжатие данных, изображений и звука. М.: Техносфера, 2004.
7. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. М.: Наука, Главная редакция физ.-мат. литературы, 1979.
8. Slepian D. Permutation modulation. Proc. IEEE, vol. 53, mar. 1965.

## Секция 1: Теория сигналов и систем

Одним из основных объектов исследования теории сигналов традиционно являются методы анализа-синтеза, модуляции-демодуляции, кодирования-декодирования сигналов с целью обеспечения высокой помехоустойчивости и скорости передачи информации в условиях воздействия интенсивных помех и межсимвольной интерференции. Возможности современных цифровых технологий позволяют решать эти задачи особенно эффективно, прибегая к оптимальным методам синтеза, преобразования и кодирования сигналов.

На секции обсуждались следующие актуальные научные проблемы:



- передача и прием двухфазных сигналов одной несущей частоты;
- многокритериальный синтез сигналов с прямым расширением спектра для адаптации когнитивных радиосистем передачи информации к полосовым помехам;
- радиосигналы с управляемой связью между синфазный и квадратурной составляющими, устойчивые к распознаванию вида модуляции;
- синтез спектрально-эффективных сигналов при наличии ограничения в виде спектральной маски;
- быстрые методы горизонтального скользящего пространственно-частотного анализа дискретных сигналов;
- математическая модель связности многоуровневой радиально-узловой сети с рокадными и перекрестными связями;
- расчет вероятностно-временных характеристик доведения информации в канале случайного доступа (на основе дискретных марковских цепей с переменной длительностью шагов переходов);
- алгоритм декодирования не двоичных эквидистантных циклических кодов в системах связи с QAM модуляцией;
- методы математического моделирования негауссовских случайных величин и процессов;
- каскадирование самоортогональных кодов для каналов со стираниями.

## МЕТОД ФОРМИРОВАНИЯ МНОГОЧАСТОТНЫХ ШИРОКОПОЛОСНЫХ СИГНАЛОВ И ВОЗМОЖНОСТИ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В СИСТЕМАХ СВЯЗИ

*Быховский М.А., д.т.н., профессор Московского технического университета связи и информатики, e-mail: bykhmark@gmail.com.*

## METHOD OF FORMATION OF THE MULTIFREQUENCY BROADBAND SIGNALS AND POSSIBILITIES OF THEIR APPLICATION IN COMMUNICATION SYSTEMS

*Bykhovskiy M.A.*

*The author describes the method of formation of broadband multifrequency orthogonal signals (BMOS). It is shown that in comparison with the systems using OFDM signals, application of BMOS has the following important advantages:*

- such signals have extremely low peak-factor and rather low level of out of band radiation;*
- such signals can be used for message transmission in satellite systems with time division of channels;*
- by using such signals in a telecommunication system, it is possible to separate the incoming beams at the receiving point into their optimal coherent addition. When using BMOS, diversity reception of the received messages is used and is exhibiting a substantial energy gain as compared to communication systems not using diversity reception.*

**Key words:** OFDM Signals, multifrequency broadband signals, reduction of the peak-factor of signals, beam separation in multi-path channels, diversity reception, multipath link channel.

**Ключевые слова:** сигналы с OFDM, много-частотные широкополосные сигналы, уменьшение пик-фактора сигналов, многолучевой канал связи, разделение лучей, разнесенный прием.

### Введение

Многочастотные ортогональные сигналы (OFDM) применяются для передачи сообщений в наземных системах звукового и телевизионного вещания (стандар T-DAB, DVB-T и DVB-C), в системах беспроводного доступа Wi-Fi и WiMax (стандарт IEEE 802.11), системах подвижной связи технологии LTE и др. [1-3].

В этих системах для передачи сообщений используются  $K$  ортогональных поднесущих, имеющих длительность  $T$ . Частотный разнос между соседними поднесущими равен  $\Delta\omega = 2\pi / T$ . Сообщения передаются с помощью квадратурно-амплитудной модуляции (QAM) поднесущих. Сигнал, передаваемый в таких системах по каналу связи, имеет вид [4]:

$$S(t) = \operatorname{Re} \left\{ e^{j\omega_0 t} \sum_{k=1}^K (x_{ck} - jx_{sk}) e^{jk\Delta\omega t} \right\} = \sum_{k=1}^K [x_{ck} \cos(\omega_0 t + k\Delta\omega t) + x_{sk} \sin(\omega_0 t + k\Delta\omega t)]. \quad (1)$$

В (1)  $\operatorname{Re}(z)$  – действительная часть числа  $z$ ;  $\omega_0$  – несущая частота сигнала;  $x_{ck}$  и  $x_{sk}$  – информационные символы сообщения, передаваемого на  $k$ -й поднесущей. Важным свойством систем с OFDM является ортогональность составляющих применяемых сигналов при любых значениях  $k$  и  $l$  ( $k \neq l$ ):

$$\int_0^T \sin(k\Delta\omega t) \cos(l\Delta\omega t) dt = \int_0^T \sin(k\Delta\omega t) \sin(l\Delta\omega t) dt =$$

*Изложен метод формирования широкополосных многочастотных ортогональных сигналов (ШПС). Показано, что по сравнению с системами, использующими сигналы с OFDM, применение многочастотных ШПС имеет следующие важные преимущества:*

- такие сигналы имеют предельно низкий пик-фактор и для них характерен весьма низкий уровень внеполосных излучений;*
- они могут применяться для передачи сообщений в спутниковых системах связи с временным разделением каналов;*
- применяя эти сигналы в системе связи, возможно разделение приходящих в место приема лучей и их оптимальное когерентное сложение; при этом реализуется разнесенный прием принятых сообщений, дающий значительный энергетический выигрыш по отношению к системам связи не использующим разнесенный прием.*

$$= \int_0^T \cos(k\Delta\omega t) \cos(l\Delta\omega t) dt = 0.$$

Одним из существенных недостатков систем связи с OFDM является значительный пик-фактор передаваемого сигнала. Создание усилителей такого сигнала с высоким коэффициентом полезного действия (КПД), наталкивается на серьезные технические сложности.

Сигналы QAM на  $k$ -й поднесущей

$$S_k(t) = x_{sk} \sin(k\Delta\omega t) + x_{ck} \cos(k\Delta\omega t), \quad (2)$$

где  $x_{ck}$  и  $x_{sk}$  в  $M$ -позиционном сигнале [4] могут с равной вероятностью ( $p_{x_{sk}} = p_{x_{ck}} = 1/\sqrt{M}$ ) принимать любые значения, равные  $(d_E/2)(2m-1-\sqrt{M})$ , при  $m=1 \dots \sqrt{M}$ ,  $d_E$  – расстояние между ближайшими сигнальными точками (СТ<sub>с</sub>) ансамбля сигналов (АС).

Для таких АС средняя мощность сигналов на каждой поднесущей  $P_{s0}$  связана с его позиционностью  $M$  и рас-

стоянием  $d_E$  между соседними СТ<sub>s</sub> соотношением [5]

$$d_E = \sqrt{6P_{s0} / (M-1)}. \quad (3)$$

Общая средняя мощность OFDM сигнала ( $P_S$ ), очевидно, равна сумме мощностей составляющих:  $P_S = KP_{s0}$ .

Пик-фактор сигнала  $S(t)$  определяется отношением его максимально возможной пиковой мощности к среднему значению –  $\gamma$ . Предположим, на каждой из поднесущих передаются одни и те же информационные символы, имеющие максимально возможный уровень  $\sqrt{2}U$ . При этом амплитуда каждой поднесущей равна  $\sqrt{2}U = d_E(\sqrt{M}-1) / \sqrt{2}$ .

Из (1) следует, что в определенный момент времени уровни всех поднесущих суммируются и максимальный уровень суммарного сигнала может принять значение  $\sqrt{2}KU$ , а коэффициент  $\gamma$ , пропорциональный числу используемых поднесущих в сигнале  $S(t)$ , оказывается равным

$$\gamma = \frac{(\sqrt{2}KU)^2}{P_S} = 3K \left( \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}+1} \right). \quad (4)$$

Создание усилителей, имеющих при значительном пик-факторе OFDM сигнала высокий коэффициент полезного действия (КПД), наталкивается на серьезные технические сложности. В настоящее время разработан ряд методов, позволяющих в определенной степени уменьшить пик-фактор сигналов OFDM [6]. Однако эти методы сложно применить, например, в спутниковых системах связи, где особенно важно обеспечивать в спутниковых ретрансляторах усиление сигналов с высоким КПД.

Следует отметить, что при использовании OFDM для передачи сообщений в многолучевых каналах связи возникает ряд трудностей. Это обусловлено следующими причинами.

1) Из-за запаздывания разных лучей в месте приема нарушается ортогональность поднесущих [7], что затрудняет их разделение на приеме, так как возникают переходные помехи между поднесущими. Для того, чтобы в многолучевом канале на интервале  $T$  ортогональность поднесущих сохранялась, в системах с OFDM вводят защитный интервал  $T_g$ , выбирая его таким, чтобы выполнялись условия  $T \gg T_g \geq \tau_{max}$ , где  $\tau_{max}$  – максимально возможное запаздывание между лучами в канале связи [7]. При этом длительность поднесущих увеличивается до  $(T + T_g)$ , однако на интервале времени  $T$  их ортогональность сохраняется. Поэтому сообщения, передаваемые на отдельных поднесущих, при приеме сигналов OFDM и правильной работе системы синхронизации могут быть разделены.

2) В системах связи с OFDM часто требуется обеспечить надежную связь, когда приемник пользователя перемещается относительно передающей станции с большой скоростью (такая ситуация может возникнуть как в системах вещания, так и в системах подвижной связи при расположении приемника в движущемся ав-

томобиле). При этом сигналы, приходящие разными путями на вход приемника, имеют различные сдвиги по частоте из-за эффекта Доплера. В результате нарушается ортогональность поднесущих, на которых передаются разные сообщения, вследствие чего возникают переходные помехи между каналами приема этих сообщений. Это приводит к ухудшению помехоустойчивости приема сигналов.

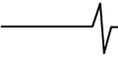
3) При работе систем связи в многолучевом канале из-за интерференции лучей в месте приема возникают частотно-селективные замирания, при которых АЧХ канала связи в при приеме существенно искажается. Некоторые поднесущие при этом «замирают», их уровень с определенной вероятностью становится весьма малым и вероятность ошибок переданных на них информационных символов может оказаться значительной. Для устранения влияния замираний на помехоустойчивость приема часто используют двукратный разнесенный прием, при котором одни и те же сигналы передаются на разных поднесущих, частотный разнос между которыми превышает интервал частотной корреляции замираний. В стандарте DVB-T2 для этого применяется поворот сигнального созвездия для [7]. Для исправления появляющихся ошибок принятых символов применяются помехоустойчивые коды, обладающие значительной избыточностью и снижающие кодовую скорость передачи информации.

В данной статье рассмотрен иной метод передачи полезных сообщений в системах связи, в которых используется много поднесущих, расположенных в широкой полосе частот  $F$ . Этот метод состоит в применении  $2K$  ортогональных поднесущих для формирования  $2K$  широкополосных сигналов (ШПС) с большой базой. Длительность этих сигналов равна длительности поднесущих, а их форма подобна форме «скругленных» непрерывающихся во времени коротких импульсов, длительность которых примерно равна  $1/F$ , где  $F$  – ширина полосы частот, занимаемая всеми поднесущими. Достоинством таких систем является то, что в них формируется передаваемый сигнал, имеющий небольшой пик-фактор.

Кроме того, в многолучевых каналах связи при использовании многочастотных ШПС возможно разделение приходящих в место приема лучей и устранение их интерференции. В свою очередь, при разделении лучей для каждого луча возможно измерение доплеровского сдвига частоты сигнала. В результате становится возможным компенсировать доплеровский сдвиг частоты каждого луча и когерентно сложить сигналы, приходящие по разным лучам. Это позволяет обеспечить высокую кратность разнесенного приема, равную числу лучей, на входе приемника. В результате, применение таких ШПС упрощает создание кодеров и декодеров, с помощью которых обеспечивается высокая надежность приема сообщений в системе связи.

### 1. Метод формирования широкополосных сигналов, состоящих из $K$ ортогональных поднесущих

Используя  $K$  ортогональных поднесущих, можно сформировать  $2K$  ортогональных широкополосных сиг-



налов  $\tau_{max} S_{Wci}(t)$  и  $\tau_{max} S_{Wsi}(t)$ , изменяющихся на интервале  $[0, T]$  так:

$$S_{Wci}(t) = \operatorname{Re} \left\{ e^{j\omega_0 t} \left( \sum_{k=1}^K e^{jk\Delta\omega(t-\Delta_i)} \right) / K \right\} = \left\{ \frac{\sin(0,5K\Delta\psi_i)}{K \sin(0,5\Delta\psi_i)} \right\} \operatorname{Re} \left\{ e^{j\omega_0 t + j0,5(K+1)\Delta\psi_i} \right\},$$

и

$$S_{Wsi}(t) = \operatorname{Im} \left\{ e^{j\omega_0 t} \left( \sum_{k=1}^K e^{jk\Delta\omega(t-\Delta_i)} \right) / K \right\} = \left\{ \frac{\sin(0,5K\Delta\psi_i)}{K \sin(0,5\Delta\psi_i)} \right\} \operatorname{Im} \left\{ e^{j\omega_0 t + j0,5(K+1)\Delta\psi_i} \right\}, \quad (5)$$

где  $\Delta\psi_i = \Delta\omega(t - \Delta_i)$ .

Из (5) следует, что  $|S_{W_i}(t_i)| = 1$  только при  $\Delta\psi_i = 0$ , если же  $\Delta\psi_i \neq 0$ , то  $|S_{W_i}(t)| \cong 0$  при  $K \gg 1$ . Следовательно, если на интервале времени  $[0, T]$  выбрать  $\Delta_i = T\Delta(i/K)$  ( $i = 0, \dots, K-1$ ), то можно сформировать  $2K$  сигналов, у которых  $S_{W_i}(t_i) = 1$  только при  $t_i = \Delta_i$ .

Важным свойством ШПС  $S_{W_i}(t)$  является их импульсный характер:  $S_{W_i}(t) \cong 1$  в окрестности времени  $t_i \cong \Delta_i$ , а в остальное время  $t \in [0, T]$  они при  $K \gg 1$  близки к нулю. При этом импульсы, соответствующие разным сигналам  $S_{W_i}(t)$  и  $S_{W_m}(t)$ , во времени не перекрываются и максимальный уровень каждого из этих сигналов на интервале времени  $[0, T]$  не превышает 1.

Модуль коэффициента взаимной корреляции сигналов  $S_{W_i}(t_i)$  и  $S_{W_m}(t_m)$  определяется так

$$R_{im} = \left| \frac{\int_0^T S_{W_i}(t_i) S_{W_m}^*(t_m) dt}{\int_0^T S_{W_i}(t_i) S_{W_i}^*(t_i) dt} \right| = \left| \frac{\sin(0,5K\Delta\omega(\Delta_i - \Delta_m))}{K \sin(0,5\Delta\omega(\Delta_i - \Delta_m))} \right|, \quad (6)$$

где  $S_{W_m}^*(t)$  сигнал, комплексно-сопряженный с сигналом  $S_{W_m}(t)$ . Из (6) следует, что  $R_{im} = 0$ , если  $\Delta_i \neq \Delta_m$ , т.е. все сигналы  $S_{W_i}(t)$  и  $S_{W_m}(t)$  при  $i \neq m$  являются ортогональными на интервале времени  $[0, T]$ . Каждый из этих сигналов может быть использован для передачи с помощью QAM информационных символов  $x_{ci}$  и  $x_{si}$ . Передаваемый по каналу связи сигнал имеет вид

$$S_W(t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{i=1}^K (x_{ci} - jx_{si}) S_{W_i}(t) \right\}. \quad (7)$$

Учитывая (3), найдем, что средняя мощность сигнала  $S_W(t)$ , также как и сигнала  $S(t)$ , равна  $P_{S_W} = KP_{s_0}$ , где  $P_{s_0}$  – средняя мощность сигнала  $(x_{ci} - jx_{si}) S_{W_i}(t)$ .

Из отмеченных выше свойств сигналов  $S_{W_i}(t)$  следует, что пик-фактор сигнала  $S_W(t)$  не превышает величины

$$\gamma_W = 3 \left( \frac{\sqrt{M} - 1}{\sqrt{M} + 1} \right). \quad (8)$$

Следовательно, пик-фактор передаваемого сигнала

с применением ШПС, в отличие от системы связи с OFDM, не зависит от значения  $K$  – количества поднесущих в OFDM сигнале, а только от позиционности QAM, применяемой для передачи сигналов. Этот пик-фактор при любых значениях  $M$  не превышает  $10 \cdot \lg \gamma_W =$

$$= 10 \cdot \lg \left[ 3 \left( \frac{\sqrt{M} - 1}{\sqrt{M} + 1} \right) \right] \leq 5 \text{ дБ.}$$

Отметим, в частности, что  $\gamma_W = 1$  при  $M = 4$ , т.е. в такой системе пик-фактор равен нулю, как и в системах спутниковой связи с временным разделением каналов, в которых для передачи сообщений применяются сигналы 4-ФМ с квадратурной модуляцией.

Применяя данные ШПС можно создавать системы связи с амплитудно-фазовой модуляцией, применяемые в настоящее время во многих системах спутниковой связи. Одним из важных свойств систем с OFDM, которыми обладают также и системы с многочастотными ШПС, является весьма низкий уровень внеполосных излучений. Это связано с тем, что длительность таких сигналов, равная длительности входящих в них поднесущих, весьма значительна. Этот уровень оказывается существенно ниже уровня внеполосных излучений у обычных систем связи с временным уплотнением, в которых для передачи сообщений в разные моменты времени используются короткие импульсы а для уменьшения внеполосных излучений в таких системах применяется «сглаживание» формы этих импульсов.

## 2. Свойства широкополосных сигналов, состоящих из $K$ ортогональных поднесущих

На рис. 1а) и 1б) представлены зависимости  $|S_{W_i}(t)|$  при  $K = 16$  и 64. В этих случаях на интервале  $[0, T]$  используется 16 или 64 ортогональных ШПС. Сигналы  $S_{W_i}(t - t_i)$  локализованы во времени: на интервале  $|t - t_i| = \Delta t = T/K$ , достигают 1 при  $t = t_i$ , а за пределами этого интервала их значения колеблются и весьма близки к нулю.

Из рис. 2 видно, что с увеличением  $K$  длительность основных лепестков ШПС уменьшается обратно пропорционально  $K$ .

Важным свойством широкополосных сигналов, состоящих из  $K$  ортогональных поднесущих, является то, что с одной стороны, они по своей форме подобны импульсным сигналам малой длительности, равной  $\Delta t = T/K$ , а, с другой стороны то, что их длительность равна  $T$ , так как они определяются суммой  $K$  гармонических сигналов, каждый из которых имеет длительность  $T$ . Пиковые значения сигналов  $S_{W_i}(t - t_i)$  и  $S_{W_{i+1}}(t - t_{i+1})$  смещены друг относительно друга по времени на интервал  $(\Delta t / 2)$ . Поэтому такие сигналы могут использоваться для передачи сообщений в системах связи с временным уплотнением каналов.

В многолучевых каналах связи, в которых для повышения помехоустойчивости приема применяется разделение лучей, важно, чтобы функция неопределенности имела бы «кнопочный» характер и принимала неболь-

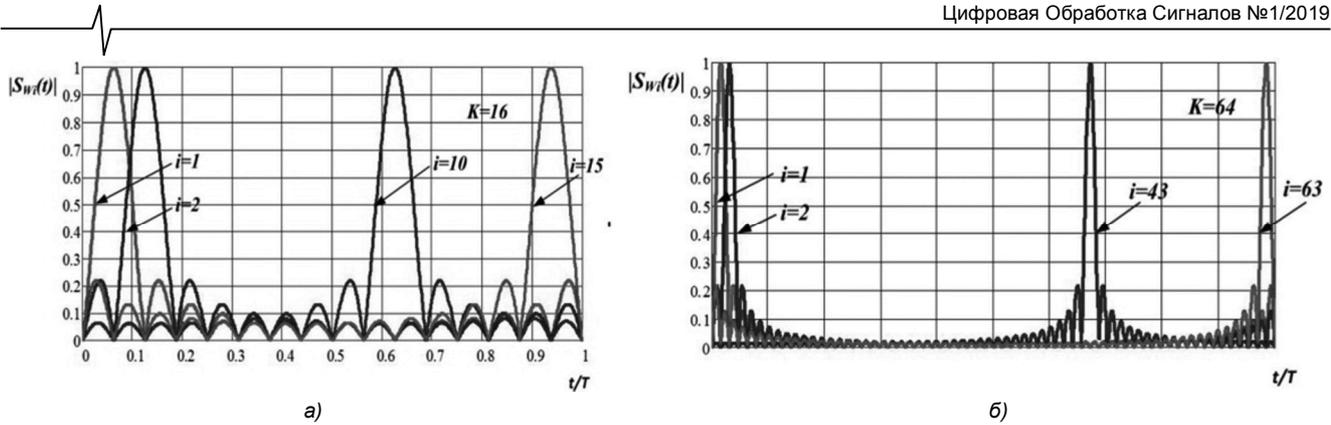


Рис. 1. Зависимости  $|S_{wi}(t - t_i)|$  от количества  $K$  поднесущих в ШПС

шие значения при запаздываниях сигналов, примерно равных минимальной длительности запаздывания соседних по времени прихода лучей и доплеровских сдвигах, меньших минимального частотного разнеса между поднесущими частотами, входящими в состав ШПС. Такие ШПС позволяют эффективно разделять сигналы с разным запаздыванием и с разным доплеровским сдвигом частоты. Их функция неопределенности определяется следующим образом [8]

$$\chi(\tau, f_d) = \int_0^T S_{wi}(t) S_{wi}^*(t - \tau) e^{-j(2\pi f_d)t} \frac{dt}{T} \quad (9)$$

Здесь  $S_{wi}^*(t)$  сигнал, комплексно-сопряженный с сигналом  $S_{wi}(t)$ ,  $\tau$  – запаздывание между сигналами, а  $f_d$  – доплеровский сдвиг между их частотами сигналов. Функция  $\chi(\tau, f)$  характеризует степень различия откликов согласованного фильтра на сигналы  $S_{wi}(t)$  и  $S_{wi}(t - \tau) e^{-j(2\pi f_d)t}$  с различной временной задержкой и доплеровским сдвигом частоты. Из (9) следует, что в рассматриваемом случае

$$|\chi(\tau, f_d)| = \left| \frac{\sin[0,5K(\Delta\omega + 2\pi f_d)\tau]}{K \sin[0,5(\Delta\omega + 2\pi f_d)\tau]} \right|. \quad (10)$$

Из (10) следует, что  $|\chi(\tau, f_d)| \cong 0$ , если  $K \gg 1$  и  $(\Delta\omega + 2\pi f_d)\tau \geq 1$ . Таким образом, рассматриваемые многочастотные ШПС позволяют при передаче сообщений осуществлять разделение лучей в многолучевом канале.

При этом, в системе связи, в которой применяются такие сигналы, возможно, используя структуру приемника, реализованную в системе «Rake» [9], осуществить разделение лучей, приходящих в место приема с разной задержкой ( $\tau_i$ ), и их когерентное сложение. В такой системе кратность разнесенного приема равна количеству лучей, по которым сигналы приходят в место приема. За счет их когерентного сложения может быть получен существенный энергетический выигрыш по отношению в простым системам связи, в которых замирания сигналов не устраняются, или устраняются в недостаточной степени, как при двукратном разнесенном приеме.

### Заключение

В данной работе представлен метод формирования широкополосных многочастотных ортогональных сигна-

лов (ШПС). По сравнению с системами, использующих сигналы с OFDM, применение многочастотных ШПС имеет следующие важные преимущества:

- такие сигналы имеют предельно низкий пик-фактор и для них характерен весьма малый уровень внеполосных излучений;

- они могут применяться для передачи сообщений в спутниковых системах связи с временным разделением каналов;

- применяя такие сигналы в системе связи, работающей в многолучевом канале, возможно разделение приходящих в место приема лучей и их оптимальное когерентное сложение; при этом реализуется разнесенный прием принятых сообщений, дающий значительный энергетический выигрыш по отношению к системам связи, в которых разнесенный прием не используется.

Автор выражает свою признательность проф. А.В. Дворковичу и проф. В.П. Дворковичу за обсуждение данной работы и полезные замечания.

### Литература

1. Вишневецкий В., Портной С., Шахнович И. Энциклопедия WiMax. Путь к 4G. М.: Техносфера, 2009.
2. Шахнович И. Современные технологии беспроводной связи. М.: Техносфера, 2006.
3. Рыжков А.Е., Воробьев В.О., Слышков А.С., Сиверс М.А., Гусаров А.С., Шуньков Р.В. Системы и сети радиодоступа 4G: LTE, WiMax. Санкт-Петербург: ЛИНК, 2012.
4. Балашов В.А., Воробийченко П.П., Ляховецкий Л.М. Системы передачи ортогональными гармоническими сигналами. М.: ЭКОТRENДЗ, 2012.
5. Прокис Дж. Цифровая связь // Перевод с английского под ред. Д.Д. Кловского. М.: Радио и связь, 2000.
6. Simon Litsyn. Peak Power Control in Multicarrier Communications. Cambridge University Press, 2007.
7. Основы частотного планирования сетей телевизионного вещания. // Под ред. Быховского М.А. Горячая линия-Телеком, 2015.
8. Быховский М.А. Развитие телекоммуникаций. На пути к информационному обществу. Развитие радиотехники и знаний о распространении радиоволн в XX столетии. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013.
9. Price R., Green P.E. Communication Technique for Multipath Channels. Proc. IRE, March, 1958.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОГНИТИВНОГО ПЕРЕСТАНОВОЧНОГО ДЕКОДЕРА

*Гладких А.А., д.т.н., профессор, профессор кафедры Телекоммуникации Ульяновского государственного технического университета, e-mail: a\_gladkikh@mail.ru;*

*Овинников А.А., к.т.н., с.н.с. кафедры Телекоммуникаций и основ радиотехники Рязанского государственного радиотехнического университета, e-mail: ovinnikov.a.a@tor.rsreu.ru;*

*Тамразян Г.М., к.т.н., инженер Федерального научно-производственного центра акционерного общества «Научно-производственное объединение «Марс», город Ульяновск, e-mail: tamrazz@bk.ru.*

## MATHEMATICAL MODEL OF COGNITIVE PERMUTATION DECODER

*Gladkikh A.A., Ovinnikov A.A., Tamrazyan G.M.*

*This paper deals with the problem of data protection of control commands in the systems of interaction of the control object with the controlled object (s). Such a task becomes relevant in the conditions of intensive introduction of various robotic systems, monitoring systems of unmanned mobile devices, systems of biometric identification of subjects in real time. In such systems, the use of long error-correcting codes is counterproductive, and the use of short codes requires the use of algorithms that maximize the redundancy introduced into the code. Under these conditions, it is proposed to use a modified method of permutation decoding. In its implementation, it is proposed to use ready-made solutions for generating matrices of equivalent codes for the whole set of admissible permutations of symbols of code combinations. During training of the decoder the decision shall be included in the cognitive map decoder and retrieved from it, depending on the structure of the permutation. The feasibility of the algorithm in the conditions of modern processors is proved.*

**Key words:** error-correction coding, permutation decoding (PD), cognitive adaptation, cognitive map, a cyclic permutation, lexicographical classification, fast matrix conversion, the soft decision symbols, the energy gain from coding (EGC).

**Ключевые слова:** помехоустойчивое кодирование, перестановочное декодирование (ПД), когнитивная адаптация, когнитивная карта, циклические перестановки, лексикографическая классификация, быстрые матричные.

### Введение

Объективной основой интеллектуализации многих перспективных информационных и технологических процессов является совершенствование процедуры управления при их реализации в реальном масштабе времени. Последнее обстоятельство требует поиска путей сокращения цикла управления, внедрения принципов когнитивной адаптации и искусственного интеллекта. Широкое применение в таких системах радиоканалов для связи управляющего объекта с объектом (объектами) управления требует безусловного использования для нее средств помехоустойчивого кодирования с целью защиты команд управления от воздействия различного рода деструктивных факторов. Становится очевидным, что жесткие требования к длительности цикла управления не позволяют использовать в полной мере для достижения указанной цели ряд положений теории помехоустойчивого кодирования, например, в виде систем турбокодирования и итеративных преобразований данных. На этом фоне возникает проблема эффективного применения коротких помехоустойчивых кодов с максимальным использованием введенной в такой код избыточности и

*Рассматривается проблема защиты данных команд управления в системах взаимодействия управляющего объекта с управляемым объектом (объектами). Подобная задача становится актуальной в условиях интенсивного внедрения различных робототехнических систем, систем мониторинга беспилотных мобильных устройств, систем биометрической идентификации субъектов в реальном масштабе времени. В подобных системах использование длинных помехоустойчивых кодов является контрпродуктивным, а использование коротких кодов требует применения таких алгоритмов, которые максимально реализуют введенную в код избыточность. В указанных условиях предлагается использовать модифицированный метод перестановочного декодирования. При его реализации предлагается для всего множества допустимых перестановок символов кодовых комбинаций применять готовые решения для порождающих матриц эквивалентных кодов. В ходе обучения декодера решения заносятся в когнитивную карту декодера и извлекаются из нее в зависимости от структуры перестановки. Доказывается реализуемость алгоритма в условиях применения современных процессоров.*

быстрой идентификацией команд управления. Решение подобной задачи носит актуальный характер при обработке данных в системе высокоскоростных когерентных сетей при их согласовании с возможностями процессоров конечных устройств. Анализ показал, что в наибольшей степени решению указанных задач соответствует метод ПД систематических кодов при модификации его математической модели с использованием концепции когнитивной обработки данных.

## Алгоритм перестановочного декодирования и его асимптотические свойства

Классический метод ПД систематических избыточных кодов описан в работе [1]. Более поздние интерпретации математической модели этого метода даны в работах [2, 3]. Алгоритмическое представление указанной модели заключается в том, что передатчик использует систематический избыточный  $(n, k)$  – код, где  $n$  – общая длина кодовой комбинации, а  $k$  – число информационных разрядов в ней. Порождающая матрица кода  $\mathbf{G}$  с единичной матрицей слева. В ходе передачи произвольного вектора такого кода  $V_{n,k}$  по каналу с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ), на него накладывается вектор помех  $e_n$ . Приемник принимает вектор вида  $V_{re} = V_{n,k} \oplus e_n$ , где символ  $\oplus$  означает операцию сложение по модулю два. Задачей приемника является идентификация вектора  $e_n$  и выделение из вектора  $V_{re}$  команды управления с вероятностью ее правильного восстановления  $P_r$ . В системе ПД для решения подобной задачи необходимы три этапа обработки принятых данных.

Во-первых, на длине вектора  $V_{re}$  в системе мягкого декодирования среди  $n$  символов необходимо выделить, по крайней мере,  $k$  надежных символов. Для этого используются целочисленные мягкие решения символов (МРС)  $\lambda_i$ , где  $i = \overline{1, n}$  – нумераторы символов вектора  $V_{re}$ , а  $\lambda = \overline{0, 7}$  – МРС по Витерби [4]. Далее массив символов длины  $n$  сортируется в порядке убывания значений  $\lambda_i$ , используя, например, метод пузырька с наименьшим значением  $\lambda_i$  справа, а между исходной, случайной последовательностью нумераторов МРС и их упорядоченной последовательностью фиксируется биекция в виде перестановочной матрицы  $\mathbf{P}$ . Далее по наиболее надежным  $k'$  (левым) символам упорядоченного массива формируется новый информационный вектор  $V_{k'}$  [5]. Сложность реализации данного этапа декодирования обычно оценивается как  $O(n^2)$ .

Во-вторых, на основе матрицы  $\mathbf{P}$  осуществляется перестановка столбцов порождающей матрицы  $\mathbf{G}$  исходного (основного) кода с образованием переставленной матрицы  $\mathbf{G}'$ . В матрице  $\mathbf{G}'$  выделяются первые  $k$  столбцов, совокупность которых образует квадратную матрицу  $\mathbf{Q}$ , для которой последовательно отыскиваются определитель  $\Delta$ , матрица миноров, транспонированная матрица миноров и обратная матрица  $\mathbf{Q}^{-1}$ . Умножая  $\mathbf{Q}^{-1} \times \mathbf{G}' = \mathbf{G}'_{sis}$ , получают порождающую матрицу эквивалентного кода в систематической форме. Сложность реализации второго этапа декодирования из-за наличия матричных вычислений представляется как  $O(n^3)$ .

На третьем, заключительном этапе, осуществляется кодирование вектора  $V_{k'}$  путем умножения его на матрицу  $\mathbf{G}'_{sis}$  с образованием вектора эквивалентного кода

$V_{eq}$ . После этого нумераторы вектора  $V_{eq}$ , а вместе с ними и символы, путем умножения на матрицу  $\mathbf{P}^T$ , приводятся к канонической последовательности  $\overline{V}_{eq}$  и, выполняя  $V_{re} \oplus \overline{V}_{eq} = e_n$ , находят вектор ошибок, искаживший переданный вектор  $V_{n,k}$ .

Становится очевидным, что последовательное выполнение описанных шагов алгоритма в реальной системе обработки данных для каждого принятого вектора становится серьезной вычислительной нагрузкой для процессора приемника, поэтому классический вариант рассматриваемого метода практического применения не нашел. Однако асимптотические характеристики ПД оказываются достаточно привлекательными. В работе [5] показано, что по критерию ЭВК метод ПД для двоичных кодов является лучшим, а для недвоичных избыточных кодов позволяет полностью использовать введенную в код избыточность.

Действительно, при жестком декодировании в канале с гауссовским шумом для выявления асимптотических границ показателя ЭВК предполагается, что отношение сигнал-шум  $E_b / N_0 \rightarrow \infty$ , в котором  $E_b$  – энергия сигнала на бит,  $N_0$  – спектральная плотность гауссовского шума. В случае жестких решений и реализации алгоритма исправления  $t = \lfloor (d_{min} - 1/2) \rfloor$  ошибок ЭВК оценивается выражением

$$D_t = 10 \lg(R(t+1)) = 10 \lg(R(d_{min} + 1)/2) \text{ дБ}, \quad (1)$$

здесь  $d_{min}$  – метрика Хэмминга,  $R = k/n$  – относительная скорость кода.

При использовании алгоритмов исправления стираний ЭВК оценивается выражением

$$D_s = 10 \lg(Rd_{min}) \text{ дБ}. \quad (2)$$

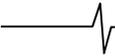
Сравнения выражений (1) и (2) показывает, что в условиях  $E_b / N_0 \rightarrow \infty$  ЭВК при исправлении стираний оказывается в два раза выше, чем при исправлении ошибок [4].

Метод ПД реализует максимальное использование введенной в код избыточности и обеспечивает более высокий показатель ЭВК. Это происходит потому, что алгоритм ПД реализует исправление  $(n-k)$  стираний. В этом случае асимптотической оценкой ЭВК служит выражение

$$D_{pd} = 10 \lg(k(1-R+1/n)) \text{ дБ}. \quad (3)$$

Таким образом,  $D_t < D_s < D_{pd}$ , и выражения (1) – (3) для реальных групповых кодов по ЭВК достигают своих максимальных значений в условиях когда  $R \approx 0,5$ . Даже с прагматической точки зрения реализация алгоритма ПД при  $k = 0,5n$  становится оправданной.

С целью снижения сложности решающего устройства приемника для выработки МРС для двоичных видов модуляции предлагается использовать свойства стирающего канала связи, когда интервал стирания  $0 < \varphi < 1$  выбирается близким к верхней границе. В этом случае допустима выработка целочисленных МРС в соответ-



ствии с аналитическим выражением:

$$\lambda_i(z) = \left\| \frac{\lambda_{\max}}{\varphi \sqrt{E_b}} \times z_i \right\|, \quad (4)$$

где  $\lambda_{\max}$  – максимальное значение МРС принятое в системе,  $\sqrt{E_b}$  – математическое ожидание принимаемых сигналов,  $z_i$  – текущее значение реализации сигнала [5, 6]. Целочисленные МРС значительно быстрее обрабатываются декодером и проигрывают нецелочисленным значениям оценок по ЭВК всего 0,2 дБ [4].

Приведенный анализ показывает, что целевая функция  $F\{\bullet\}$  алгоритма ПД содержит несколько стохастических параметров и единственную детерминированную компоненту. Образ целевой функции можно представить, как

$$F\{\bullet\} = \begin{cases} \{V_k\} \oplus e(h); \\ \{P_n\}, \end{cases} \quad (5)$$

где  $\{V_k\}$  – множество случайных векторов составляющих суть команды управления, а  $e(h)$  – вероятность появления векторов помех длины  $n$  как функция отношения сигнал-шум при  $h = E_b/N_0$ , действующих на элементы множества  $\{V_k\}$ . К детерминированной составляющей целесообразно отнести множество перестановок  $\{P_n\}$ , формирующихся на втором этапе реализации ПД. Принципиально такие перестановки могут быть вычислены заранее (в процессе обучения декодера), и результаты вычисления матриц вида  $G'_{\text{sis}}$  могут быть зафиксированы в памяти декодера, по сути в его когнитивной карте. В этом случае сложный в реализационном отношении второй этап алгоритма ПД однозначно теряет свое негативное значение в реализации процедуры ПД.

### Модель перестановочного декодера с когнитивной метафорой

Принципиальной разницы между алгоритмами ПД двоичных и недвоичных кодов нет. Исключение составляет процедура оценки определителя  $\Delta$  матрицы  $Q$  в ходе реализации второго шага алгоритма. Поскольку двоичные коды не являются максимально декодируемыми, то для ряда перестановок столбцов порождающей матрицы  $G$  может оказаться, что  $\Delta = 0$  [2, 3]. Следовательно, для такой перестановки создать эквивалентный код не представляется возможным и необходима перекорректировка значений МРС по первому этапу. Исследования показали, что подобная ситуация для двоичных кодов характерна в 20 % перестановок от их общего числа [6, 7]. Для недвоичных кодов, например, кодов Риды-Соломона (РС) в выполнении подобной проверки нет необходимости (такие коды максимально декодируемы). Отмеченная общность алгоритмов двоичных и недвоичных групповых систематических кодов указывает на возможность их применения в системах с каскадным кодированием. При этом выражение (4) сохраняет свою актуальность для оценки МРС

недвоичных символов кодов внешней ступени декодирования [7]

По этой причине основное внимание в работе уделено обработке недвоичных кодов, поскольку именно такие коды в наибольшей степени приспособлены к современным сложным видам модуляции. Пусть в системе обмена данными используется недвоичный код РС с параметрами (7,3,5). Матрица  $G$  этого кода в систематической форме имеет вид

$$G = \begin{vmatrix} \alpha^0 & 0 & 0 & \alpha^4 & \alpha^0 & \alpha^4 & \alpha^5 \\ 0 & \alpha^0 & 0 & \alpha^2 & \alpha^0 & \alpha^6 & \alpha^6 \\ 0 & 0 & \alpha^0 & \alpha^3 & \alpha^0 & \alpha^1 & \alpha^3 \end{vmatrix}, \quad (6)$$

а столбцы матрицы нумеруются обычным образом слева направо. Здесь и далее  $\alpha$  – примитивный элемент поля  $GF(2^3)$ . Предположим, что надежными символами в некотором принятом кодовом векторе кода РС будут символы с номерами (2 4 5), а менее надежные символы в порядке убывания значений располагаются в последовательности вида (6 7 1 3). Тогда из выражения (6) следует

$$G' = \begin{vmatrix} 0 & \alpha^4 & \alpha^0 & \alpha^4 & \alpha^5 & \alpha^0 & 0 \\ \alpha^0 & \alpha^2 & \alpha^0 & \alpha^6 & \alpha^6 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^3 & \alpha^0 & \alpha^1 & \alpha^3 & 0 & \alpha^0 \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Рассмотрим традиционную классическую модель ПД. Для реализации преобразования вида  $G' \Rightarrow G'_{\text{sis}}$  в выражении (7) выделяют образ ключевой матрицы  $Q$  размерности  $k \times k$ , которая включает в себя первые  $k$  столбцов. Тогда обратная матрица  $Q^{-1}$  является ключевой, поскольку она однозначно указывает на действия, которые необходимо произвести над строками матрицы  $G'$  для перевода ее в систематическую форму, поскольку  $Q \times Q^{-1} = E$ . Для рассматриваемого примера

$$Q_{3 \times 3} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha^4 & \alpha^0 \\ \alpha^0 & \alpha^2 & \alpha^0 \\ 0 & \alpha^3 & \alpha^0 \end{vmatrix}, \text{ а определитель этой матрицы } \det$$

$Q = \alpha^6$ , и обратная матрица принимает вид

$$Q_{3 \times 3}^{-1} = \begin{vmatrix} \alpha^6 & \alpha^0 & \alpha^2 \\ \alpha^1 & 0 & \alpha^1 \\ \alpha^4 & 0 & \alpha^5 \end{vmatrix}. \text{ Проверка вида } Q \times Q^{-1} = E \text{ под-}$$

тверждает получение единичной матрицы, следовательно, структура матрицы  $Q_{3 \times 3}^{-1}$  является корректной для преобразования вида  $G' \Rightarrow G'_{\text{sis}}$ . Умножая матрицу  $Q_{3 \times 3}^{-1}$  на матрицу  $G'$ , получают порождающую матрицу эквивалентного кода  $G'_{\text{sis}}$ .

$$G'_{\text{sis}} = \begin{vmatrix} \alpha^0 & 0 & 0 & \alpha^6 & \alpha^2 & \alpha^6 & \alpha^2 \\ 0 & \alpha^0 & 0 & \alpha^3 & \alpha^3 & \alpha^1 & \alpha^1 \\ 0 & 0 & \alpha^0 & \alpha^5 & \alpha^4 & \alpha^4 & \alpha^5 \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Заметим, что для вычисления матрицы (8) пришлось выполнить 336 арифметических операций в поле  $GF(2^3)$ .

В ходе оперативной обработки данных сочетание надежных символов кодовой комбинации вида (2 4 5) даже в одном сеансе связи с высокой долей вероятности может повторяться. Поэтому в целях экономии вычислительного ресурса декодера целесообразно сохранить этот результат в памяти процессора и использовать эти данные при возможных повторениях перестановок с номерами (2 4 5). Проверочная часть матрицы, полученная из выражения (8) и представленная на рис. 1, со строго возрастающей последовательностью номеров строк называется канонической, и сама матрица является эталонной.

$$\begin{matrix}
 \alpha^6 & \alpha^2 & \alpha^6 & \alpha^2 & 2 \\
 \alpha^3 & \alpha^3 & \alpha^1 & \alpha^1 & 4 \\
 \alpha^5 & \alpha^4 & \alpha^4 & \alpha^5 & 5 \\
 6 & 7 & 1 & 3 & 
 \end{matrix}$$

Рис. 1. Структура эталонной матрицы в каноническом виде по системе надежных символов

В ходе исследований установлено, что при сохранении номеров позиций в перестановках  $k$  надежных и  $(n-k)$  ненадежных символов следует на первом шаге переставлять строки эталонной матрицы, а на втором шаге – столбцы этой новой матрицы. Следуя принципам когнитивной обработки данных, декодер, получив, например, кортеж значений надежных символов в виде (5 2 4) для первых  $k$  надежных символов принятой комбинации и оставшихся  $(n-k)$  менее надежных символов в виде (3 7 1 6), формирует матрицу  $G'$ , исходя из структуры эталонной матрицы, как показано ниже

$$G'_{\text{sis}} = \begin{pmatrix} \alpha^0 & 0 & 0 & \alpha^5 & \alpha^4 & \alpha^4 & \alpha^5 \\ 0 & \alpha^0 & 0 & \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha^6 & \alpha^6 \\ 0 & 0 & \alpha^0 & \alpha^1 & \alpha^3 & \alpha^1 & \alpha^3 \end{pmatrix}$$

Для этого выполняются три действия с перестановкой строк, например, вторая строка из эталонной матрицы с первой позиции устанавливается на вторую позицию в соответствии с перестановкой (5 2 4) и т.п. И затем выполняются четыре перестановки столбцов вновь образованной матрицы с соответствующей кон-

фигурацией ненадежных символов (3 7 1 6). Всего 7 действий копирования и переноса данных вместо 336 арифметических операций. Проверка полученного результата (и многих других) с применением классической методики показала справедливость предложенной модели ПД.

Предлагается использовать лексикографически упорядоченную когнитивную карту, в которой циклические сдвиги номеров надежных символов лексикографически упорядочены, и к ним привязываются образцы элементов проверочных матриц, которые описывались выше. Учет циклических зависимостей для множества перестановок позволяет резко сократить число эталонных матриц, хранимых в памяти когнитивной карты. Для рассматриваемого кода могут быть сформированы всего 5 образцов эталонных матриц  $G^1_{\text{sis}}, G^2_{\text{sis}}, \dots, G^5_{\text{sis}}$ , а в общем случае таких матриц может быть  $N = C_n^k/n$ . В рассматриваемом примере полное множество матриц составляет  $N = C_n^k \times k! \times (n-k)! = n!$  или, для рассматриваемого кода,  $7! = 5040$  образцов. Учет циклических сдвигов сокращает этот объем данных практически на три порядка. Предлагаемая структура когнитивной карты представлена табл. 1. В ходе исследований установлено, что последовательность перестановок ненадежных символов никак не влияет структуру ячеек когнитивной карты. Поэтому верхний ряд данных каждой ячейки табл. 1 представляет каноническую форму номеров надежных оценок и соответствующий ей номер эталонной матрицы  $G^i_{\text{sis}}$ , образ которой необходимо извлечь из памяти когнитивной карты. Нижний ряд каждой ячейки содержит номера строк надежных символов и номера столбцов ненадежных символов, которые необходимо присвоить извлеченной из памяти эталонной матрицы с номером  $i$ .

Пусть сортировка надежных символов привела к последовательности (6 2 7) и некоторой последовательности ненадежных символов вида (3 5 1 4). Канонический вид первой последовательности дает (2 6 7). Из табл. 1 становится ясно, что следует обрабатывать эталонную матрицу 2 с нумерацией строк (6 7 2) и нумерацией столбцов (3 4 5 1) с последующей их перестановкой, как показано ниже.

Таблица 1. Лексикографическая структура когнитивной карты декодера

<b>123 – 1</b> 123 – 4567	<b>124 – 2</b> 124 – 5673	<b>125 – 3</b> 125 – 6734	<b>126 – 4</b> 126 – 7345	<b>127 – 1</b> 712 – 3456
<b>134 – 1</b> 341 – 2567	<b>135 – 5</b> 135 – 6724	<b>136 – 5</b> 613 – 4572	<b>137 – 2</b> 713 – 4562	<b>145 – 3</b> 451 – 2367
<b>146 – 5</b> 461 – 2357	<b>147 – 3</b> 714 – 5623	<b>156 – 2</b> 561 – 2347	<b>157 – 4</b> 715 – 6234	<b>167 – 1</b> 671 – 2345
<b>234 – 1</b> 234 – 5671	<b>235 – 2</b> 235 – 6714	<b>236 – 3</b> 236 – 7145	<b>237 – 4</b> 237 – 1456	<b>245 – 4</b> 452 – 3671
<b>246 – 5</b> 246 – 7135	<b>247 – 5</b> 724 – 5613	<b>256 – 3</b> 562 – 3471	<b>257 – 5</b> 572 – 3461	<b>267 – 2</b> 672 – 3451
<b>345 – 1</b> 345 – 6712	<b>346 – 2</b> 346 – 7125	<b>347 – 3</b> 347 – 1256	<b>356 – 4</b> 563 – 4712	<b>357 – 5</b> 357 – 1246
<b>367 – 3</b> 673 – 4512	<b>456 – 1</b> 456 – 7123	<b>457 – 2</b> 457 – 1236	<b>467 – 4</b> 674 – 5123	<b>567 – 1</b> 567 – 1234

$$G_{sis}^2 = \begin{matrix} \alpha^1 & \alpha^3 & \alpha^1 & \alpha^0 & 6 \\ \alpha^6 & \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha^0 & 7 \\ \alpha^4 & \alpha^4 & \alpha^5 & \alpha^0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \alpha^1 & \alpha^3 & \alpha^1 & \alpha^0 & 6 \\ \alpha^4 & \alpha^4 & \alpha^5 & \alpha^0 & 2 \\ \alpha^6 & \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha^0 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \alpha^1 & \alpha^1 & \alpha^0 & \alpha^3 & 6 \\ \alpha^4 & \alpha^5 & \alpha^0 & \alpha^4 & 2 \\ \alpha^6 & \alpha^2 & \alpha^0 & \alpha^2 & 7 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & \end{matrix}$$

Становится очевидным, что для поиска эталонной матрицы декодер не выполняет арифметических операций в полях Галуа, а реализует тривиальную процедуру копирования и адресного переноса данных. В последнем случае число таких операций всегда будет равно длине кодового вектора  $n$ . В табл. 2 приводится оценка получаемого при этом выигрыша.

В табл. 3 приведены сравнительные данные по временным интервалам, необходимым для получения по-

рождающих матриц эквивалентных кодов применительно к возможностям ПЛИС типа «ALTERA» с тактовой частотой  $5 \cdot 10^7$  Гц, длительностью такта  $2 \cdot 10^{-8}$  с и объемом внутренней памяти 2 Мбайта.

Преимущества предлагаемого метода очевидны особенно для кодов с различной корректирующей способностью при фиксированной длине кодового вектора.

#### Организация памяти когнитивной карты декодера

Предлагаемый метод обработки данных в системе ПД, обеспечивая хорошие показатели по скорости вычисления порождающей матрицы эквивалентного кода, требует оценки объема памяти когнитивной карты декодера  $V_{kk}$ . Принимая за основу объем оперативной памяти ПЛИС.

«ALTERA», получены данные по возможности использования этой памяти для хранения на ее основе когнитивной карты. Конечно можно использовать систему внешней памяти, но это может отрицательно сказаться на длительности процесса поиска необходимого результата. Оценка производилась для всех рассмотренных методов хранения данных в когнитивной карте и результаты показаны в табл. 4.

Таблица 2. Оценка выигрыша по числу операций в условиях применения когнитивной карты

Число арифметических операций при реализации классического подхода			
Код PC (7,3,5)	Код PC (15,5,11)	Код PC (15,9,7)	Код PC (15,13,3)
336	2410	2912994	68584334026
Число операций при реализации предлагаемого метода			
7	15	15	15
Выигрыш в 48 раз	Выигрыш в $1,6 \cdot 10^2$ раза	Выигрыш в $1,9 \cdot 10^6$ раза	Выигрыш в $4,6 \cdot 10^9$ раза

Таблица 3. Временные интервалы получения конечного результата

Классический подход			
Код PC (7,3,5)	Код PC (15,5,11)	Код PC (15,9,7)	Код PC (15,13,3)
$\approx 6,7 \cdot 10^{-6}$ с	$\approx 4,8 \cdot 10^{-5}$ с	$\approx 5,8 \cdot 10^{-2}$ с	$\approx 1,7 \cdot 10^3$ с
Предлагаемый метод			
$\approx 1,4 \cdot 10^{-8}$ с	$\approx 3,0 \cdot 10^{-7}$ с	$\approx 3,0 \cdot 10^{-7}$ с	$\approx 3,0 \cdot 10^{-7}$ с

Таблица 4. Возможность реализации когнитивной карты декодера на базе оперативной памяти ПЛИС «ALTERA»

Коды	1 система. полным множеством матриц	2 система. Система эталонных матриц	3 система. С использованием циклических свойств эталонных матриц
PC (7,3,5)	$V_{kk} \ll 1\%$ $9 \cdot 10^{-4}$ Мбайт	$V_{kk} \ll 1\%$ $1,5 \cdot 10^{-4}$ Мбайта	$V_{kk} \ll 1\%$ $2,1 \cdot 10^{-4}$ Мбайта
PC (15,11,5)	Более 100 %	Более 100 %	0,1 %
PC (15,7,9)	Более 100 %	Более 100 %	0,5 %
Укороченный код PC (40,36,5) над GF(2 <sup>8</sup> )	Более 100 %	Более 100 %	15 %

## Заключение

Впервые разработана модель декодера избыточного кода, использующая методы когнитивной обработки данных при реализации процедуры перестановочного декодирования для эффективной защиты команд дистанционного управления от влияния деструктивных факторов на процесс управления.

Математически обоснован аппарат быстрых матричных преобразований эталонных матриц и доказаны циклические свойства таких матриц, позволившие за счет некоторого увеличения вычислительной нагрузки на процессор декодера снизить объем его когнитивной карты до приемлемых размеров. Современная элементная база позволяет реализовать алгоритмы ПД.

Повышение скорости получения конечного результата позволяет говорить о целесообразности использования алгоритмов ПД для систем реального времени.

## Литература

1. MacWilliams F. J. Permutation Decoding of Systematic Codes, Bell System Tech. J., 43, 485 – 505 (1964).

2. Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки. Пер. с англ. – ред. Добрушина Р.Л., Самойленко С.И. М.: Мир. – 1976. – 594 с.

3. Морелос-Сарагоса Р. Искусство помехоустойчивого кодирования. Методы, алгоритмы, применение. Пер. с англ. ред. Афанасьева В.Б. – М.: Техносфера. – 2005. – 320 с.

4. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. – М.: Вильямс. – 2003. – 1104 с.

5. Гладких А.А. Основы теории мягкого декодирования избыточных кодов в стирающем канале связи. – Ульяновск: УлГТУ, 2010. – 379 с.

6. Гладких А.А. Перестановочное декодирование как инструмент повышения энергетической эффективности систем обмена данными / Электросвязь. – № 8. – 2017, С. 52–56.

7. Гладких А.А., Ал Тамими Т.Ф.Х. Концепция когнитивной обработки данных в системе перестановочного декодирования не двоичного избыточного кода / Электросвязь. – № 9. – 2018, С. 69–74.

## Секция 2: Теория и методы цифровой обработки сигналов

В работах, проводимых по данному базовому направлению теоретических исследований, закладываются фундаментальные основы построения систем ЦОС. Поэтому работа секции вызывает повышенный интерес всех участников конференции. Как показывает анализ представленных докладов, исследование российских ученых ведется по всем основным направлениям развития мировой науки в области информационных технологий реального времени, а именно: цифровой фильтрации, многоскоростной обработки и вейвлет-преобразования, частотно-временной обработки и спектрального анализа, теории быстрых алгоритмов ЦОС, оптимальной и адаптивной обработки сигналов и нелинейной фильтрации.

На секции обсуждались следующие актуальные научные проблемы:



– проблематика дискретной двумерной обработки сигналов в базах Фурье;

– интерполяция двумерных дискретных сигналов в пространственной области на основе быстрых преобразований Фурье;

– кардиоангиография: представление и анализ ЭКГ в базах собственных векторов;

– теорема отсчетов в частотной области для финитного спектра;

– реализация адаптивного алгоритма MVDR в частотной области для двухэлементной микрофонной решетки;

– разработка алгоритма оценки спектральной корреляционной функции на основе двумерного быстрого преобразования Фурье;

– рекуррентный цифровой алгоритм гармонического анализа непре-

рывных сигналов на основе бинарного аналого-стохастического квантования по уровню;

– метод переноса частот в речевом сигнале для коррекции слуховых патологий;

– исследование эффективности конструирования фильтров для анализа ЭЭГ методом адаптивного вейвлет-преобразования;

– генетические алгоритмы на основе канонических корреляций в детекции паттернов биомедицинских сигналов;

– эффекты квантования сигналов с угловой модуляцией;

– классификация одноканального ЭМГ-сигнала для человеко-компьютерного взаимодействия;

– первый опыт реализации онлайн-курса «основы цифровой обработки сигналов» на национальной платформе открытого образования;

– применение цифровых фильтров для определения статистических характеристик флуктуаций полного электронного содержания ионосферы;

– исследование устойчивости алгоритмов класса RLS к аддитивным шумам и сигналам встречного направления;

– сравнение эффективности технологий OFDM и SUB-OFDM при различных мешающих воздействиях в канале связи.

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ ВИДА МОДУЛЯЦИИ ФАЗОМАНИПУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА СТРУКТУРЫ СПЕКТРА ЧЕТНЫХ СТЕПЕНЕЙ

*Завадский А.Л., старший оператор научной роты Межвидового центра подготовки и боевого применения войск РЭБ (учебного и испытательного);*

*Казак П.А., начальник отделения отдела Межвидового центра подготовки и боевого применения войск РЭБ (учебного и испытательного), e-mail: kazak-pavel.89@yandex.ru;*

*Каданцев С.М., начальник цикла Межвидового центра подготовки и боевого применения войск РЭБ (учебного и испытательного).*

## AUTOMATIC MODULATION CLASSIFICATION OF PHASE SHIFT KEYED SIGNALS USING SPECTRUM ANALYSIS STRUCTURES OF THE RANGE OF EVEN DEGREES

*Zavadskiy A.L., Kazak P.A., Kadantcev S.M.*

*In this paper, we propose a shift-keyed signals modulation type recognition algorithm under conditions of lacking priori data on signal parameters. Algorithm is based on power conversion of signals and extracted specters given the presence of expressed harmonics.*

**Key words:** modulation, recognition, shift-keyed signals, conversion of signals, extracted specter.

**Ключевые слова:** фазоманипулированный сигнал, PSK, быстрое преобразование Фурье, степенные преобразования, дисперсия,  $\delta$ -функция, гармоники.

### Введение

Основным способом передачи информации в современных системах связи является цифровой обмен. Решение задачи поиска и обнаружения сигналов с цифровыми видами модуляции сводится, как правило, к получению так называемых «внешних» параметров сигнала: несущая частота, ширина спектра, уровень и пеленг источника радиоизлучения (ИРИ).

Определение «внутренних» технических характеристик сигнала (вид модуляции, скорость передачи и др.) является не менее важной задачей при техническом анализе исследуемого сигнала, так как позволяет классифицировать тип передающего устройства, способ организации связи и определить систему связи в целом.

Существующие стандарты и системы связи широко используют PSK модуляцию. В табл. 1 по результатам анализа [10, 11, 15, 16, 20] приведены основные виды современных сигналов с фазовой модуляцией.

Несмотря на разницу в способе модуляции, различие цифровых сигналов на основе их временного и спектрального представления достаточно затруднено и,

*Предложен алгоритм определения типа модуляции фазоманипулированных сигналов в условиях отсутствия априорных данных о параметрах сигнала. Алгоритм основан на степенных преобразованиях сигналов и анализе полученных спектров с учётом наличия выраженных гармоник.*

как следствие, затруднена идентификация вида модуляции. На рис. 1 представлены спектры различных видов PSK модуляции. Без дополнительной обработки невозможно однозначно определить вид модуляции сигнала.

Достаточно широкий обзор современных методов распознавания модуляции представлен в статье [13]. Особое внимание уделено рассмотрению алгоритмов, основанных на вейвлет-преобразовании и свойствах кумулянтов различных порядков. В частности, в работе [7] приведен алгоритм идентификации сигналов с модуляциями QPSK и GMSK с использованием вейвлет-преобразований. Метод позволяет распознавать сигналы с вероятностью 97,8 % при SNR (signal-to-noise ratio) 5дБ. В работе [2] продемонстрированы схожие результаты для видов модуляции 2ASK, 2FSK, 2PSK, 4ASK, 4FSK, 4PSK, 16QAM. Задача определения вида модуляции в работах [1, 3, 14] решена на основе сравнения статистических коэффициентов, учитывающих амплитуд-

Таблица 1. Область применения сигналов с PSK модуляцией

Вид модуляции	Область применения
BPSK	СРНС ГЛОНАСС, СРНС GPS
QPSK	Спутниковая система связи Inmarsat Fleet FSS, система связи PHS
DQPSK	Система транкинговой связи TETRA, система связи DAMPS
OQPSK	Система связи стандарта CDMA, технология беспроводных сетей ZigBee
8PSK	Системы связи стандарта W-CDMA/NA, TDMA/CDMA
D8PSK	Стандарт IMT-DS, стандарт микросотовой системы DECT EP

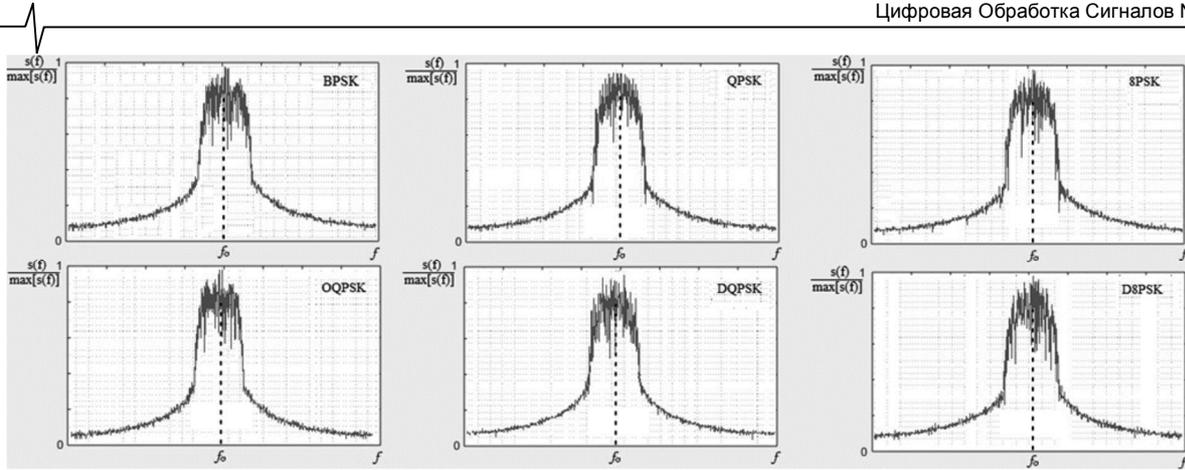


Рис. 1. Нормированные спектры сигналов с фазовой модуляцией

литудные, фазовые и частотные характеристики, а также дисперсию амплитуды нормированных спектров сигнала. Для SNR 10 дБ вероятность правильного обнаружения сигналов с модуляциями ASK, FSK, PSK 2 и 4 порядков не хуже 98,3 %. В статье [3] введен и испытан дополнительный параметр для различения M-PSK и M-FSK модуляции. В работе [4] представлена древовидная методика определения цифровой модуляции, а также Байесовский метод. В статье [5] рассмотрена модель классификации M-позиционной QAM модуляции с применением кумулянтов, которая определяет число точек сигнального созвездия в условиях низкого SNR (0 дБ) с вероятностью 100 %. Кроме того, методы кумулянтного анализа предложены в работах [6, 8, 21]. Авторами описаны алгоритмы, позволяющие с вероятностью до 100 % идентифицировать BPSK, QPSK и 8PSK модуляции при SNR 8 дБ.

Раздел «Коррелятивные и другие перспективные методы» рекомендаций [19], содержит традиционные способы определения вида модуляции PSK сигналов. В одном из способов предложено использовать инструменты спектрального корреляционного анализа. Такой метод является предпочтительным с точки зрения энергетической зависимости SNR, но требует существенного набора априорных сведений о принимаемом сигнале. В работе [12] был изложен алгоритм идентификации фазоманипулированного сигнала с порядком модуляции 2, 4 и 8 в условиях априорно неизвестных параметров сигнала. В качестве критерия было использовано отношение дисперсий, нормированных на единицу модулей спектров сигналов, полученных с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Перечисленные алгоритмы не учитывают особенностей различения дифференциальных видов фазоманипулированных сигналов. Предлагаемый ниже алгоритм позволяет автоматически классифицировать вид модуляции сигнала с неизвестными параметрами (амплитуда, ширина спектра, начальная фаза, частотный сдвиг, скорость и т.д.), при условии определения наличия сигнала с фазовой модуляцией на входе цифрового устройства.

**Математическая модель идентификации вида модуляции**

ФМ сигнал в комплексной форме имеет вид:

$$s(t) = A \cdot e^{j(\omega_0 t + \Phi(t) + \varphi_0)}, \tag{1}$$

где  $A$  – амплитуда,  $\omega_0 = 2\pi f_0$  – частота сигнала,  $\varphi_0$  – начальная фаза,  $\Phi(t)$  – закон изменения фазы.

Так как алгоритм предполагает идентификацию вида модуляции при условии отсутствия априорных сведений о начальной фазе сигнала, значением  $\varphi_0$  можно пренебречь.

$$s(t) = A \cdot e^{j(\omega_0 t + \Phi(t))} \text{ либо} \tag{2}$$

$$s(t) = A \cdot e^{j\omega_0 t} \cdot e^{j\Phi(t)} \tag{3}$$

Закон изменения фазы для ФМ сигнала можно записать как:

$$\Phi(t) = \frac{2\pi k(t)}{m}, \tag{4}$$

где  $m$  – число, определяющее количество точек в сигнальном созвездии,  $k(t)$  может принимать значения  $[0, 1, \dots, m-1]$  – целые числа, определяющие условие кодирования информации. Смена значений  $k(t)$  происходит с периодом  $T_s = 1/f_s$ , где  $f_s$  – символьная скорость.

Для BPSK модуляции ( $m = 2$ ) закон изменения фазы принимает следующий вид:

$$\Phi(t) = \frac{2\pi k(t)}{2}, \quad k = [0, 1] \tag{5}$$

$$\Phi = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ \pi, & k = 1. \end{cases} \tag{6}$$

Возведем комплексную огибающую BPSK сигнала в квадрат. Получим:

$$s^2(t) = A^2 \cdot e^{2j\omega_0 t} \cdot e^{2j\Phi(t)}, \tag{7}$$

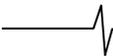
$$2\Phi = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ 2\pi, & k = 1. \end{cases} \tag{8}$$

Фазы  $2\pi$  и 0 идентичны, следовательно,  $e^{2j\Phi(t)} = 1$ .

Таким образом, BPSK сигнал, возведённый в квадрат, можно записать как:

$$s^2(t) = A^2 \cdot e^{2j\omega_0 t} \cdot e^0 = A^2 \cdot e^{2j\omega_0 t} \tag{9}$$

Следовательно, спектральная плотность идеального BPSK сигнала при возведении во 2-ю степень имеет вид  $\delta$ -функции с центром на оси частот в точке  $2\omega_0$  [9]. На практике спектр также содержит гармоники по обе стороны от центральной частоты, отстоящие от неё на величину  $f_s$ . Также в реальных спектрах за счёт конечной ширины спектральных составляющих вместо  $\delta$ -функций, представляющих собой математическую абстракцию, наблюдаются гармоники конечной амплитуды.



Несложно доказать, что для QPSK ( $m = 4$ ) и 8PSK ( $m = 8$ ) модуляции комплексная огибающая и спектральные характеристики сигналов будут иметь схожий вид при их возведении в 4-ю и 8-ю степень соответственно.

Рассмотрим закон изменения фазы для DQPSK сигнала. Основным отличием от линейной QPSK модуляции является использование двух сигнальных QPSK созвездий, сдвинутых друг относительно друга по фазе на  $\pi/4$ :

$$\Phi_1 = \frac{\pi}{2}i, \quad i = [0, 3]; \quad \Phi_2 = \frac{\pi}{2}i + \frac{\pi}{4}, \quad i = [0, 3] \quad (10)$$

При этом если один символ содержит фазу из первого созвездия, то следующий за ним символ – в обязательном порядке из второго, а следующий снова из первого. Таким образом, задействованные созвездия с каждым символом чередуются.

Возведем сигнал, записанный в комплексной экспоненциальной форме (КЭФ) в 4-ю степень, тогда, очевидно, все точки первого созвездия собираются в одну точку, а второго созвездия – в другую:

$$4\Phi_1 = 0; \quad 4\Phi_2 = \pi \quad (11)$$

Комплексная огибающая такого сигнала совершает периодические колебания между двумя этими точками. Длительность перехода из одной точки в другую соответствует длительности одного символа  $1/f_s$ , поэтому частота этих колебаний равна  $2f_s$ . Следовательно, комплексная огибающая возведенного в 4-ю степень DQPSK сигнала имеет вид:

$$A^4 \cos\left(\frac{\omega_s t}{2}\right) = A^4 \cdot \frac{e^{-j\frac{\omega_s t}{2}} + e^{j\frac{\omega_s t}{2}}}{2}, \quad (12)$$

где  $\omega_s = 2\pi f_s$ . Это означает, что спектр такого сигнала представляет собой две несущие с одинаковой амплитудой, смещённые в обе стороны от центральной частоты на  $f_s/2$ , т.е. две несущие одинаковой величины, расстояние между которыми равно  $f_s$ . При возведении в восьмую степень спектр DQPSK сигнала будет содержать основную несущую на центральной частоте и гармоники по обеим сторонам, отстоящие от неё на частоту  $f_s$ , что легко видеть в том числе и из формулы (12).

Аналогичным способом доказывается наличие двух гармоник, также отстоящих друг от друга на частоту  $f_s$ , в спектральной плотности D8PSK сигнала, возведенного в 8-ю степень.

Рассмотрим сигнал с квадратурной фазовой манипуляцией со сдвигом (OQPSK). Его созвездие также состоит из 4 точек:

$$\Phi = \frac{2\pi\left(i + \frac{1}{2}\right)}{4}, \quad i = [0, 3]. \quad (13)$$

Отличием сигнала от классического QPSK является наличие сдвига по времени между изменением синфазной и квадратурной составляющих. Величина этого сдвига составляет половину символического интервала. Таким образом, сигнал OQPSK внешне представляет собой сигнал QPSK с вдвое большей символической скоростью, у которого разрешены переходы только между соседними точками фазового созвездия, а переходы между противо-

лежащими точками, предполагающие в какой-то момент уменьшение амплитуды до нуля, запрещены.

При возведении сигнала во 2-ю степень противоположные точки созвездия объединяются. В QPSK сигнале каждый переход через ноль при этом превращается в уменьшение комплексной огибающей до нуля с последующим возвратом в исходную точку. Для OQPSK сигнала такие переходы отсутствуют, переходы возможны только из одной точки в другую, поэтому его спектр при любой сглаживающей функции содержит две гармоники, отстоящие в обе стороны от центральной частоты на половину символической скорости эквивалентного QPSK сигнала, т.е. на символическую скорость  $f_s$  исходного сигнала OQPSK. Расстояние между данными несущими в спектре составляет величину  $2f_s$ .

Однако, при возведении в 4-ю степень спектр сигнала аналогичен QPSK. Следовательно, основным отличием в спектральном представлении OQPSK от QPSK модуляции является наличие 2-х выраженных гармоник при возведении во 2-ю степень.

#### Алгоритм определения вида модуляции

В предыдущем разделе были изложены характерные зависимости поведения спектральной плотности различных видов PSK сигналов от степенных преобразований сигналов. На основе анализа результатов был разработан алгоритм идентификации PSK сигналов с учетом наличия выраженных гармоник в спектрах высших степеней. Определение наличия гармоник при обработке реальных сигналов удобно производить с использованием нормированных частотных характеристик. В таком случае спектральный уровень гармоники:

$$\max(s(f)) = 1, \quad (14)$$

где  $\max(s(f))$  – максимальное значение спектральной плотности сигнала.

С другой стороны, операция возведения сигнала в степень приводит к резкому увеличению шума, вследствие чего возникает необходимость поиска критерия, который учитывает как факт наличия несущей, так и минимальный уровень шума. В данном алгоритме предложено использовать критерий максимума дисперсии нормированного спектра сигнала. Значение дисперсии  $d$  вычисляется по формуле:

$$d = [\max(s(f)) - \overline{s(f)}]^2, \quad (15)$$

где  $\overline{s(f)}$  – усредненное значение спектральной плотности.

Отдельно стоит рассмотреть процесс различения нелинейных видов PSK. В результате воздействия шума в каналах передачи информации уровень нормированных гармоник после степенных преобразований сигнала с дифференциальными видами модуляции будет различаться, но, как правило, удовлетворяет условию:

$$\max_2(s(f)) < 0,8 \max_1(s(f)), \quad (16)$$

где  $\max_1(s(f))$ ,  $\max_2(s(f))$  – первый и второй максимумы нормированной спектральной плотности сигнала соответственно.

В этом случае расчёт дисперсии второго максимума не производится, а оценивается только его уровень.

Алгоритм идентификации PSK сигналов представлен на рис. 2.

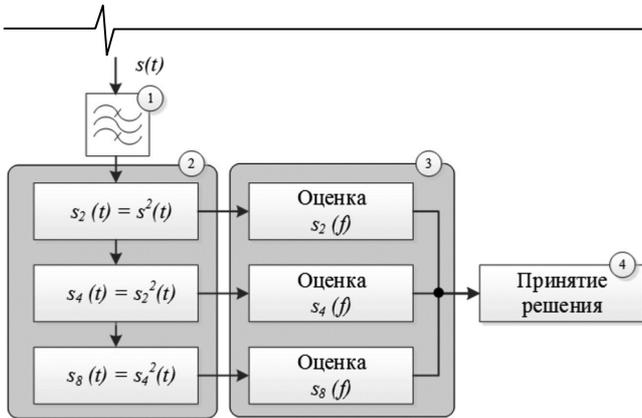


Рис. 2. Алгоритм идентификации ФМ сигналов

1. Частотная фильтрация.

Данные о центральной частоте и ширине спектра сигнала являются априорно неизвестными параметрами. Кроме того, наличие посторонних воздействий в принятой смеси существенно затрудняет процесс определения вида модуляции. Поэтому, на начальном этапе необходимо проведение частотной селекции с учетом предварительной оценки «внешних» характеристик сигнала.

2. Степенные преобразования.

PSK сигнал  $s(t)$  поочередно возводится в степень  $m = 2, 4, 8$ .

$$s_m(t) = s^m(t). \tag{17}$$

3. Оценка спектральных характеристик.

Для каждого  $s_m(t)$  вычисляется нормированный модуль Фурье-спектра сигнала  $s_m(f)$ , рассчитывается дисперсия  $d_m$  и оценивается количество и уровень гармоник с учетом условия (16).

4. Принятие решения.

На основании результатов, полученных на шаге 3, определяется вид модуляции PSK сигнала.

Обобщенные значения критериев принятия решений для каждого вида модуляции приведены в табл. 2.

Таблица 2. Количество гармоник и значения  $d_m$  для различных степеней спектра PSK сигналов

Вид модуляции	Количество гармоник, значение $d_m$		
	$s^2(t)$	$s^4(t)$	$s^8(t)$
BPSK	1   $d_2=max$	1	1
QPSK	-	1   $d_4=max$	1
DQPSK	-	2   $d_4=max$	1
OQPSK	2	1   $d_4=max$	1
8PSK	-	-	1   $d_8=max$
D8PSK	-	-	2   $d_8=max$

Анализ применения алгоритма

Для реализации алгоритма был разработан программный модуль в среде математического моделирования MATLAB [17, 18]. Задача частотной селекции при выполнении алгоритма была решена с помощью анализатора спектра Tektronix RSA5115B. Применение программного модуля адаптировано как для идентификации реальных PSK сигналов, так и для работы в тестовом режиме. Данный режим предполагает формирование цифрового сигнала с заданным видом модуляции, моделирование канала связи с аддитивным белым гауссовским шумом с выбранными параметрами и оценку вида модуляции принятой смеси.

На рис. 3 приведены полученные спектральные плотности сигналов BPSK, QPSK, DQPSK, OQPSK, 8PSK, D8PSK, при SNR 15 дБ.

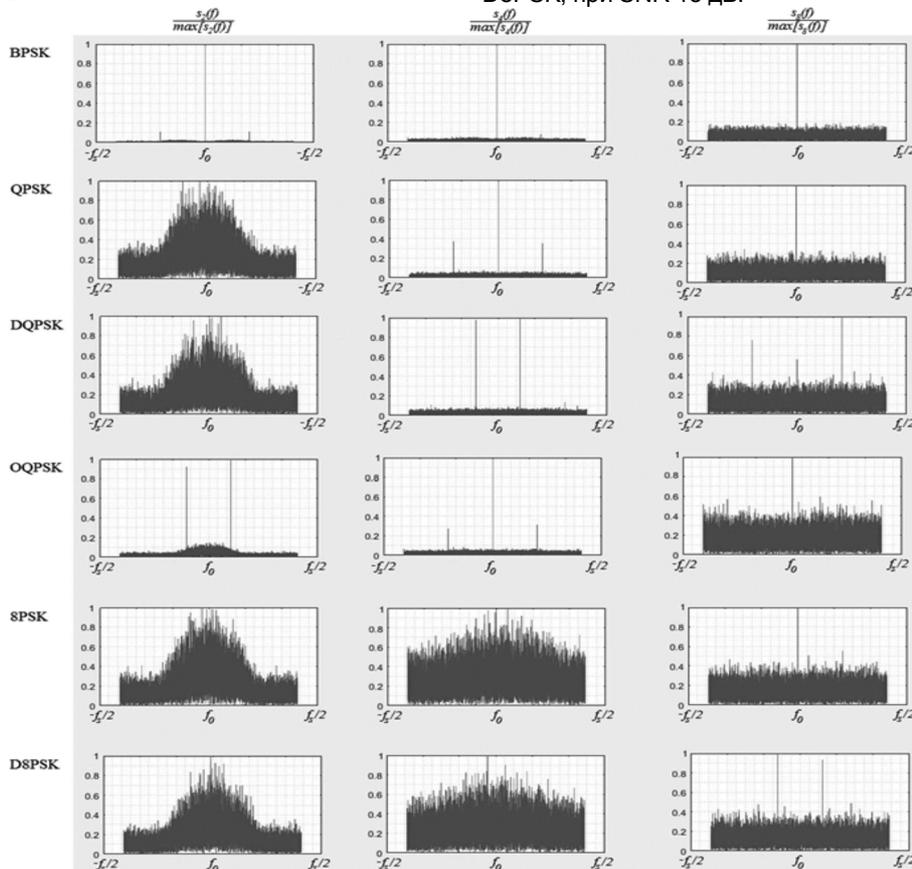


Рис. 3. Спектры сигналов BPSK, QPSK, DQPSK, OQPSK, 8PSK, D8PSK, при SNR = 15 дБ

Для каждого вида PSK сигнала был произведен расчет дисперсии нормированного модуля фурье-спектра при возведении его в степень 2, 4, 8. Полученные значения приведены в табл. 3.

Таблица 3. Рассчитанные значения  $d_m$  для различных видов PSK модуляции при SNR = 15 дБ

Вид модуляции	Значение $d_m$		
	$s^2(t)$	$s^4(t)$	$s^8(t)$
BPSK	0,98	0,97	0,88
QPSK	0,54	0,96	0,80
DQPSK	0,52	0,95	0,78
OQPSK	0,83	0,96	0,69
8PSK	0,52	0,55	0,71
D8PSK	0,54	0,58	0,72

Для оценки качества функционирования алгоритма идентификации в условиях сильного воздействия шумов,

SNR изменялось в интервале от 0 до 20 дБ. Ошибка второго рода, характеризующаяся вероятностью неопределения  $P_{nr}$  (non-recognition) PSK сигналов с квадратурными видами модуляции имеет существенные значения при SNR 5 дБ ( $P_{nr} = 50\%$ ) и менее. Виды модуляции 8PSK, D8PSK могут быть однозначно распознаны при SNR >16 дБ. Вероятность идентификации BPSK сигналов на всем интервале измерений – 100%. На рис. 4 предложены графические результаты исследования помехоустойчивости алгоритма.

Рассмотрены случаи возникновения ошибок первого рода (ложного определения). Вероятность ложного распознавания модуляции  $P_{fr}$  (false recognition) при высоких SNR  $P_{fr} = 0$ , а при SNR <16 дБ не превышает 8%. Результаты появления ошибок идентификации вида PSK модуляции приведены в табл. 4.

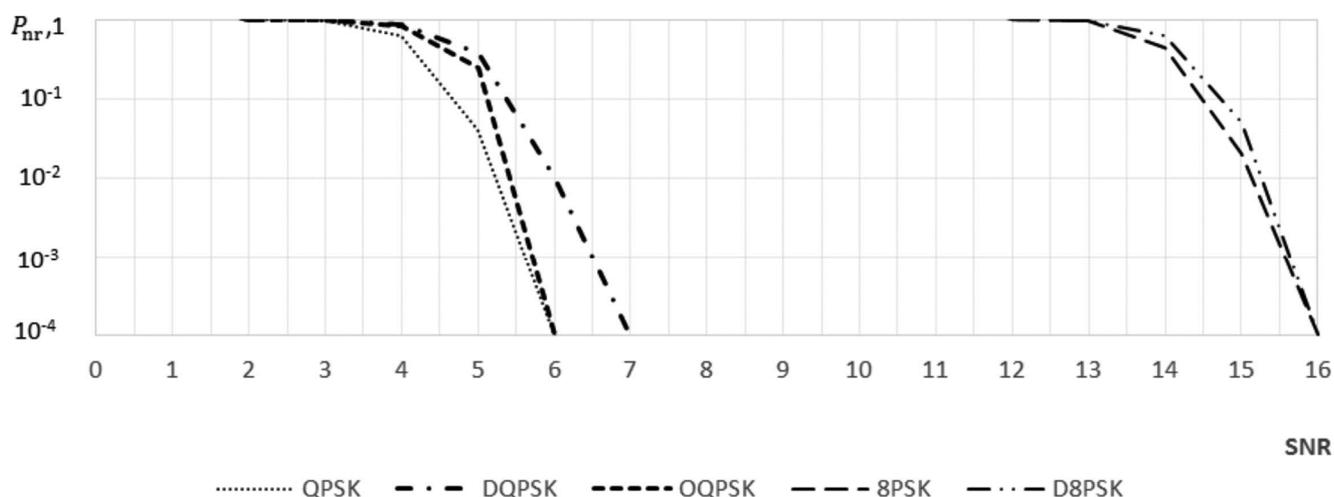


Рис. 4. Зависимость вероятности неопределения вида модуляции от SNR для сигналов QPSK, DQPSK, OQPSK, 8PSK, D8PSK

Таблица 4. Вероятность ложного определения вида модуляции

SNR, дБ	$P_{fr}, \%$					
	BPSK	QPSK	DQPSK	OQPSK	8PSK	D8PSK
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0,03	0,1	0	0	0
3	0	2,5	0,9	0,4	0	0
4	0	7,4	5,6	4,3	0	0
5	0	3,1	8,0	7,9	0	0
6	0	0,3	4,2	3,3	0	0
7	0	0	0,9	0,2	0	0
8	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0,7	0,3
13	0	0	0	0	2,4	1,4
14	0	0	0	0	6,5	7,9
15	0	0	0	0	2,8	7,8
16	0	0	0	0	0	0,8
17	0	0	0	0	0	0

## Заключение

В работе предложен алгоритм автоматической идентификации вида модуляции PSK сигналов в условиях априорно неизвестных параметров сигнала. Данный алгоритм позволяет идентифицировать следующие виды фазовой модуляции: BPSK, QPSK, DQPSK, OQPSK, 8PSK, D8PSK. Алгоритм основан на анализе структуры спектра четных степеней.

Проведено практическое исследование помехоустойчивости предложенного алгоритма для высокого, среднего и низкого SNR. Вероятность правильной идентификации ( $P > 0,99$ ) достигается при SNR более 6 дБ для QPSK, более 7 дБ для DQPSK и OQPSK, более 16 дБ для 8PSK и D8PSK сигналов. Сигналы с видом модуляции BPSK верно классифицировались на всем интервале измерений SNR от 0 дБ.

## Литература

1. Azzouz E.E. and Nandi A.K. Automatic Modulation Recognition of Communication Signals, Kluwer Academic Publishers, 1996, p. 233.
2. Chunlei Zhang, Hui Wu, Huanyu Ning. A Novel Digital Signal Modulation Mode Recognition Algorithm. School of Electronic and Information Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou, China. // Sensors & Transducers, Vol. 178, Issue 9, September 2014, pp. 194 – 198.
3. D. Le Guen, A. Mansour. Automatic Recognition Algorithm for Digital Modulated Signals / Proceedings of the IASTED International Conference SIGNAL PROCESSING, PATTERN RECOGNITION & APPLICATIONS June 25-28, 2002, Crete, Greece, pp. 32-37.
4. Erem Erdem. Digital Modulation Recognition / A Thesis Submitted to the Graduate School of Natural and Applied Sciences of Middle East Technical University, Desember 2009. – 161 p.
5. Ivan A. Hashim, Jafar W. Abdul Sadah, Thamir R. Saeed & Jawad K. Ali. Recognition of QAM Signaks with Low SNR Using a Combined Threshold Algorithm. // IETE Journal of Research – January 2015. P. 9.
6. Pedzisz M., Mansour A. Automatic modulation recognition of MPSK signals using constellation rotation and its 4th order cumulant // Digital Signal Processing 15 (2005), pp. 295-304.
7. Prakasam P., Madheswaran. Modulation Identification Algorithm for Adaptive Demodulator in Software Defined Radios Using Wavelet Transform. // International Journal of Information and Communication Engineering 5:1, 2009, pp. 74-81.
8. Young A.F. Classification of Digital Modulation Types in Multipath Environments, Master's Thesis, NAVAL POSGRADUATE SCHOOL, June 2008. P. 83.
9. Баскаков С.И., Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. Для вузов по спец. «Радиотехника». / С.И. Баскаков. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 2003, 462 с.:ил.
10. Глобальная спутниковая радионавигационная система ГЛОНАСС / Под Г-52 ред. В.Н. Харисова, А.И. Перова, В.А. Болдина. – М.: ИПРЖР 1998, 400 с. ил.
11. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов: Второе издание. Пер. с англ. – М.: ООО «Бином-Пресс», 2006 г. – 656 с.: ил.
12. Логинов А.А., Морозов О.А., Хмелёв С.Л. Определение типа модуляции фазоманипулированных сигналов на основе степенных преобразований и анализа спектра. // Известия вузов. Радиофизика. Том LV, № 10-11, 2012
13. Макаров К.С. Методы распознавания модуляции // Цифровая обработка сигналов №1, 2014. С. 29-35.
14. Нагорнюк О.А., Павлюк В.В. Алгоритм автоматического виявлення та класифікації сигналів з цифровими видами модуляції. // ВІСНИК ЖДТУ №4 (59). С. 1-10.
15. Невдяев Л.М. Мобильная связь 3-го поколения. Серия изданий «Связь и бизнес», М. МЦТНИ – Международный центр научной и технической информации, ООО «Мобильные коммуникации», 2000 – 208 с.
16. Овчинников А.М., Воробьев С.В., Сергеев С.И. Открытые стандарты цифровой транкинговой радиосвязи, М., МЦТНИ, 2000
17. Основы цифровой обработки сигналов: Курс лекций / Авторы: А.И. Солонина, Д.А. Улахович, С.М. Арбузов, Е.Б. Соловьева / Изд. 2-е испр. и перераб. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 768с.: ил.
18. Павлейко М. А., Ромаданов В. М. Спектральные преобразования в MATLAB. // Спб.: Научно-образовательный центр «Электрофизика», 2007, 160 с.
19. Рекомендации МСЭ-R SM.1600-1 (09/2012) Техническая идентификация цифровой сигналов. 30 с.
20. Скляр Б.. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение, 2-е издание.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.: ил. – Парал. тит. англ.
21. Стогов А.А., Терешонок М.В., Чиров Д.С., Кузьмин Г.В. Распознавание видов модуляции радиосигналов с использованием моментов высокого порядка // Т-Comm: Телекоммуникации и Транспорт, № 1, 2012. С. 56-59.

## СНИЖЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ УРОВНЯ ЖИДКОСТИ ВОЛНОВОДНЫМ УРОВНЕМЕРОМ С ЧАСТОТНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ, ВЫЗВАННОЙ НАРАСТАНИЕМ ОСАДКОВ НА СТЕНКАХ ВОЛНОВОДА

*Давыдошкин В.М., к.т.н., начальник отдела СВЧ устройств и антенн ООО предприятие «КОНТАКТ-1», e-mail: skb@kontakt-1.ru;*

*Давыдошкина С.В., к.т.н., доцент института академии ФСИН России по кафедре математики и информационных технологий управления, e-mail: dav-sw@yandex.ru;*

*Езерский В.В., д.т.н., профессор кафедры радиоуправления и связи Рязанского государственного радиотехнического университета, e-mail: ezerski@yandex.ru.*

## DECREASE IN AN ERROR OF MEASUREMENT OF LEVEL OF LIQUID THE WAVEGUIDE LEVEL GAGE WITH FREQUENCY MODULATION, CAUSED BY INCREASE OF RAINFALL ON WAVE GUIDE WALLS

*Davydochkin V.M., Davydochkina S.V., Ezerskiy V.V.*

*The error of measurement of distance the level gage with frequency modulation caused by influence of dispersion of speed of distribution of a signal in a wave guide and uncontrollable increase of rainfall on wave guide walls is considered. Quantitative assessment of size of a possible error is executed. The method of adaptive fine tuning of the level gage to the specified change is offered. Quantitative assessment of achievable effect and influence of noise on error size is executed.*

**Key words:** the frequency waveguide level gage, measurement error, dispersion of speed, draft on wave guide walls.

**Ключевые слова:** частотный волноводный уровнемер, погрешность измерения, дисперсия скорости, осадки на стенках волновода.

### Введение

Во многих отраслях промышленности, при организации контроля и управления технологическими процессами, актуальной является задача измерения уровня жидкости в различных резервуарах. Решение этой задачи с использованием радиодальномеров с частотной модуляцией (ЧМ) сигнала привлекает всё большее внимание из-за потенциально высокой точности измерений. С учётом известной высоты установки радиодальномера уровень жидкости определяется по измеренному расстоянию до неё, однозначно связанного с разностной частотой  $\Omega$  на выходе смесителя.

В сложной помеховой обстановке, измерения выполняют внутри вертикально установленного полого волновода, в который свободно поступает жидкий контролируемый продукт через перфорационные отверстия до уровня, равного уровню жидкости в резервуаре. Традиционно такие уровнемеры классифицируются, как волноводные [1]. Для уровнемеров с частотной модуляцией важнейшим требованием является точность измерения разностной частоты  $\Omega$  сигнала на выходе смесителя, однозначно связанной с расстоянием в волноводе  $L_{\text{в}}$  до поверхности жидкости. Однако на погрешность измерения негативно влияет зависимость скорости распространения электромагнитных волн в волноводе от частоты – частотная дисперсия, а также изменение скорости распространения электромагнитных волн из-за постепенного отложения на стенках волновода малопо-

*Рассматривается погрешность измерения расстояния уровнемером с частотной модуляцией, вызванная влиянием дисперсии скорости распространения сигнала в волноводе и неконтролируемым нарастанием осадков на стенках волновода. Выполнена количественная оценка величины возможной погрешности. Предложен метод адаптивной подстройки уровнемера к указанному изменению. Выполнена количественная оценка достижимого эффекта и влияния шума на величину погрешности.*

движных фракций контролируемого вещества, приводящего к изменению диэлектрической проницаемости среды в волноводе.

**Цель работы.** Уменьшение погрешности измерения уровня волноводным уровнемером, вызванной вариацией скорости распространения электромагнитных волн вследствие изменения диэлектрической проницаемости среды в антенно-волноводном тракте (АВТ).

### Влияние дисперсии и диэлектрической проницаемости среды заполняющей волновод на сигнал разностной частоты

Для волноводных уровнемеров с постоянным сечением волновода по всей длине  $L_{\text{в}}$ , заполненного однородной средой с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ , математическую модель сигнала разностной частоты (СРЧ) можно представить в виде [2]

$$u(t) = U(t) \cos[2\omega(t)L_{\text{в}}\sqrt{\varepsilon - \omega_{\text{кр}}^2}/\omega^2(t)/c - \varphi], \quad (1)$$

где  $\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega t/T$  – текущая частота зондирующего сигнала;  $T$  – интервал времени с линейным нарастанием частоты;  $\Delta\omega$  – диапазон частотной модуляции;  $\omega_{\text{кр}}$  – критическая частота волновода;  $c$  – скорость рас-

пространения волн в свободном пространстве;  $L_B$  – геометрическая длина волновода от уровнемера до поверхности жидкости,  $\varphi$  – фаза коэффициента отражения от жидкости, заполняющей волновод, которую в дальнейшем будем считать равной нулю;  $U(t)$  – функция, характеризующая паразитную амплитудную модуляцию (ПАМ) СРЧ, включающая ПАМ генерируемого сигнала, амплитудно-частотную характеристику отражающего объекта и частотно-зависимое затухание электромагнитных волн в волноводе.

Для анализа влияния отложений и изменения диэлектрической проницаемости газа  $\varepsilon_{\text{газ}}$  над поверхностью контролируемого материала считаем, что на внутренней поверхности волновода радиуса  $R_B$  равномерно распределён слой диэлектрика, толщиной  $\Delta R_B$ , с известным значением относительной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$ , настолько тонкий, что не вызывает изменения типа волн в волноводе. На основе известных результатов [3] такое предположение позволяет определить относительную эквивалентную диэлектрическую проницаемость диэлектрика  $\varepsilon_{\text{экв}}$ , при полном заполнении волновода которым, постоянная распространения в заполненном волноводе будет равна постоянной распространения в волноводе с тонким слоем диэлектрика  $\varepsilon_{\text{экв}} = \varepsilon_{\text{газ}} \varepsilon / [\varepsilon - \Delta R_B / R_B (\varepsilon - \varepsilon_{\text{газ}})]$ , (2) где  $\varepsilon_{\text{экв}}$  – эквивалентная диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей волновод над жидкостью, учитывающая диэлектрическая проницаемость газа  $\varepsilon_{\text{газ}}$ .

В дальнейшем целесообразно использовать нормированную частоту  $x_L$ , совпадающую с нормированным расстоянием [2], связанную с разностной частотой СРЧ  $F_p$  и расстоянием  $L_B$   $x_L = F_p T = 0,5 \Omega_p T / \pi = \Delta \omega \tau_L / 2\pi = \Delta \omega L_B / c\pi$ , (3) где  $\Omega_p = 2\pi F_p$ ;  $\tau_L$  – время распространения электромагнитных волн в волноводе.

Тогда нормированная текущая частота и нормированное текущее расстояние  $x = FT = 0,5 \Omega T / \pi = \Delta \omega \tau / 2\pi = \Delta \omega L / c\pi$ . (4)

При использовании (1)-(3) мгновенную и среднюю нормированные разностные частоты волноводного уровнемера [2] можно представить в виде:

$$x(t_H) = x_L \varepsilon_{\text{экв}} (1 + a \cdot t_H) / \sqrt{\varepsilon_{\text{экв}} (1 + a \cdot t_H)^2 - b^2}, \quad (5)$$

$$x_{\text{ср}} = \frac{x_L}{a} \left[ \sqrt{\varepsilon_{\text{экв}} (1 + a)^2 - b^2} - \sqrt{\varepsilon_{\text{экв}} - b^2} \right], \quad (6)$$

где  $a = \Delta \omega / \omega_{\text{мин}}$  – нормированный диапазон перестройки частоты;  $\omega_{\text{мин}}$  – минимальная частота диапазона;  $b = \omega_{\text{кр}} / \omega_{\text{мин}}$  – нормированная критическая частота волновода;  $t_H = t/T$  – нормированное время.

Обычно в частотном дальнометре производится измерение средней разностной частоты и вычисление по ней измеряемого расстояния [1]. Из (6) видно, что неконтролируемое изменение  $\varepsilon_{\text{экв}}$  существенно изменяет сред-

нюю разностную частоту, и, следовательно, приводит к большой погрешности измерения расстояния. Наглядное представление о величине возникающей погрешности даёт рис. 1, где приведены результаты моделирования процесса измерения расстояния с помощью известного двухэтапного алгоритма на основе модифицированного преобразования Фурье [2], учитывающего влияние волновода, но не учитывающего изменение эквивалентной диэлектрической проницаемости.

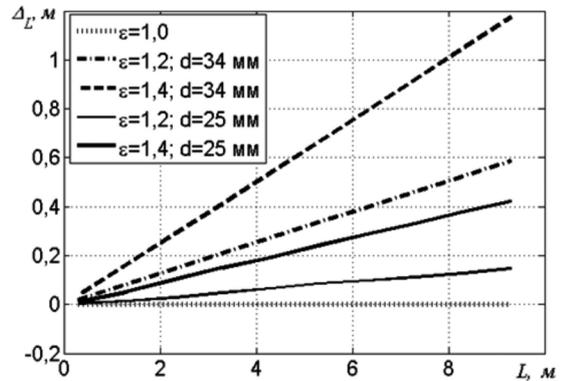


Рис. 1. Зависимость погрешности измерения расстояния в волноводе при двух значениях диэлектрической проницаемости и двух диаметрах волновода

Моделирование производилось для несущей частоты  $f_0 = 8,5$  ГГц, диапазона перестройки частоты  $\Delta f = 3$  ГГц, трёх значений эквивалентной диэлектрической проницаемости и двух значений диаметра волновода 25 мм и 34 мм. При моделировании вычисление преобразования Фурье выполнялось с использованием весовой функции [4]

$$w(t_H) = 1 - \frac{\sin[M_0(b_1 + 1)] \sin[M_0(b_1 - 1)]}{\cos(M_0) [\sin(M_0 b_1)]^2} \times \cos \left[ 2\pi \frac{\sqrt{\varepsilon(1 + at_H)^2 - b^2} - \sqrt{\varepsilon - b^2}}{\sqrt{\varepsilon(1 + a)^2 - b^2} - \sqrt{\varepsilon - b^2}} \right], \quad (7)$$

где  $b_1$  – параметр формы весовой функции, который был равен 200;  $M_0 = \pi/M$ ;  $\varepsilon = 1$ .

Видно, что отсутствие изменения эквивалентной диэлектрической проницаемости ( $\varepsilon_{\text{экв}} = 1,0$ ) не вызывает изменения погрешности (точечная горизонтальная линия).

Изменение эквивалентной диэлектрической проницаемости приводит к существенной погрешности измерения расстояния, которая увеличивается с увеличением расстояния и увеличением значения  $\varepsilon_{\text{экв}}$ . Если величина  $\varepsilon_{\text{экв}}$  отличается от единицы, но не изменяется, то можно эту погрешность устранить с помощью калибровки уровнемера на технологическом стенде. Однако на практике происходит неконтролируемое изменение  $\varepsilon_{\text{экв}}$ , обусловленное налипанием осадка контролируемого материала на стенки волновода при его периодическом заполнении и опустошении. Поэтому при выполнении таких измерений необходимо каким-либо образом выполнять оценку  $\varepsilon_{\text{экв}}$  и учитывать полученный результат при измерении разностной частоты.

## Метод оценки изменения эквивалентной диэлектрической проницаемости

На рис. 2 приведены зависимости нормированных мгновенных разностных частот СРЧ  $x(t_n)/x_L$ , от нормированного времени, полученных по формуле (5) с использованием волноводов диаметром 25 мм (кривые 1 и 2) и 34 мм (кривые 3 и 4) для эквивалентных относительных диэлектрических проницаемостей заполнения волновода над контролируемой жидкостью  $\varepsilon_{\text{ЭКВ}} = 1$  (кривые 1 и 3) и  $\varepsilon_{\text{ЭКВ}} = 1,3$  (кривые 2 и 4). Диапазон ЧМ – 3 ГГц.

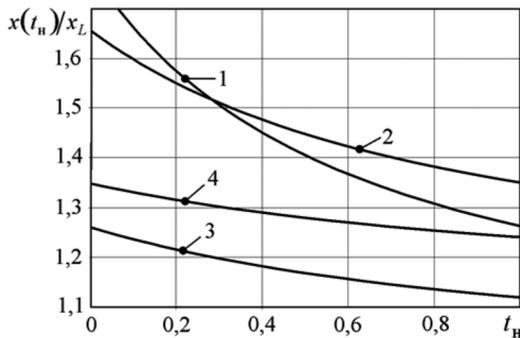


Рис. 2. Зависимости нормированных мгновенных разностных частот СРЧ

Из выражения (5) и приведённого рисунка видна однозначная связь зависимости мгновенной разностной частоты с эквивалентной диэлектрической проницаемостью заполнения волновода над контролируемой жидкостью, параметрами ЧМ и поперечным сечением волновода. Такие зависимости можно использовать для оценки текущей эквивалентной проницаемости заполнения волновода. Для этого необходимо по измеренному СРЧ оценить зависимость  $x_{\text{ИЗМ}}(t_n)$  мгновенной разностной частоты сигнала от времени в интервале  $T$ , нормированной к средней разностной частоте  $x_{\text{СРИЗМ}}$ :

$x_{\text{ИЗМ,Н}}(t_n) = x_{\text{ИЗМ}}(t_n)/x_{\text{СРИЗМ}}$ . Эту зависимость необходимо сравнивать с нормированной эталонной зависимостью от времени частоты разностного сигнала  $x_{\text{ЭТ}}(t)$ , отнесённой к эталонной средней разностной частоте, определённой на основе (5), (6) выражением

$$x_{\text{ЭТН}}(t_n) = \frac{x_{\text{ЭТ}}(t_n)}{x_{\text{ЭТСР}}} = \frac{\varepsilon_{\text{ЭТ}} a(1 + a \cdot t_n)}{\sqrt{\varepsilon_{\text{ЭТ}}(1 + a \cdot t_n)^2 - b^2} \cdot \left[ \sqrt{\varepsilon_{\text{ЭТ}}(1 + a)^2 - b^2} - \sqrt{\varepsilon_{\text{ЭТ}} - b^2} \right]} \quad (8)$$

При сравнении этих графиков необходимо в выражении (8) варьировать  $\varepsilon_{\text{ЭТ}}$  добиваясь совпадения указанных зависимостей. Для устранения влияния случайных погрешностей измерения, искажающих экспериментально полученную зависимость  $x_{\text{ИЗМ,Н}}(t)$ , целесообразно вычислять разность этих графиков  $\Delta x(t) = x_{\text{ИЗМ,Н}}(t) - x_{\text{ЭТН}}(t)$  и варьировать  $\varepsilon_{\text{ЭТ}}$ , до получения минимума модуля максимального значения разности и зафиксировать полученное значение. Можно использовать минимум среднего квадрата указанной разности. При этом относительную диэлектрическую

проницаемость  $\varepsilon_{\text{ЭКВ}}$  среды, заполняющей волновод над жидкостью, следует принять равной найденному значению  $\varepsilon_{\text{ЭТ}}$ .

На рис. 3 приведены теоретические зависимости разностей  $\Delta x(t)$  нормированных частот между графиком, полученным для фактического значения  $\varepsilon_{\text{ЭКВ}} = 1,02$ , и эталонным графиком при использовании волновода диаметром 25 мм.

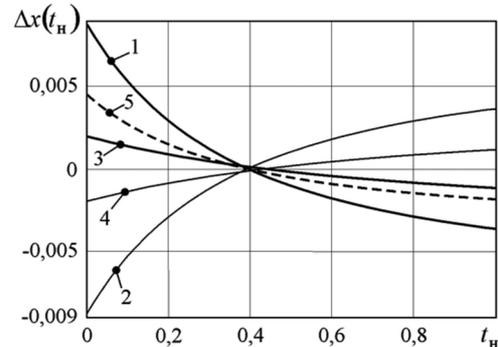


Рис. 3. Зависимости разностей нормированных частот

Зависимость 1 получена при  $\varepsilon_{\text{ЭКВ}} = 1,02$ ,  $\varepsilon_{\text{ЭТ}} = 1,04$  использовании волновода диаметром 25 мм, диапазоне ЧМ  $\Delta f = 3$  ГГц, при  $f_{\text{МИН}} = 8,5$  ГГц. Изменение эталонной относительной диэлектрической проницаемости при её подборе приводит к изменению зависимости разности нормированной мгновенной частоты выделенного сигнала разностной частоты и эталонного сигнала. В приведённом примере изменение  $\varepsilon_{\text{ЭТ}}$  с 1,04 до  $\varepsilon_{\text{ЭТ}} = 1,03$ , снижает максимальное значение  $\Delta x(t) = x_{\text{ИЗМ,НОРМ}}(t) - x_{\text{ЭТ}}(t)$  с 0,0089 до 0,0045 (линии, соответственно, 1 и 5). При дальнейшем изменении  $\varepsilon_{\text{ЭТ}}$  в процессе её подбора снижаются до нуля максимальные значения  $\Delta x(t) = x_{\text{ИЗМ,НОРМ}}(t) - x_{\text{ЭТ}}(t)$ . При нулевом значении  $\Delta x(t)$  (в общем случае при минимуме модуля  $|\Delta x(t)|$  или среднего квадрата)  $\varepsilon_{\text{ЭКВ}}$ , принимается равной  $\varepsilon_{\text{ЭТ}}$ .

Увеличение диаметра волновода приводит к снижению крутизны изменения зависимости  $\Delta x(t)$  (кривая 3) и, как следствие, к уменьшению чувствительности самого метода сравнения с эталонной зависимостью. Зависимость 3 получена при  $\varepsilon_{\text{ЭКВ}} = 1,02$ ,  $\varepsilon_{\text{ЭТ}} = 1,04$ , использовании волновода диаметром 34 мм, с диапазоном ЧМ  $\Delta f = 3$  ГГц и  $f_{\text{МИН}} = 8,5$  ГГц.

Снижение крутизны изменения зависимости  $\Delta x(t)$  происходит также при уменьшении диапазона частотной модуляции.

Для рассмотренных кривых исходное значение эталонной относительной диэлектрической проницаемости больше эквивалентной диэлектрической проницаемости среды заполняющей волновод  $\varepsilon_{\text{ЭТ}} > \varepsilon_{\text{ЭКВ}}$ . Если начальные  $\varepsilon_{\text{ЭКВ}} > \varepsilon_{\text{ЭТ}}$  (4 кривая и 5 кривая) то зависимости возрастающие.

К сожалению, практически измерить зависимость мгновенной разностной частоты от времени сложно, особенно при малом значении  $x_L$ .

Наиболее просто реализовать этот метод анализа позволяет цифровое формирование зондирующих сигналов и цифровая обработка СРЧ. При этом используется способ ступенчатого цифрового формирования ЧМ с запоминанием каждого отсчёта СРЧ в массиве на соответствующей ступеньке ЧМ. В результате становится возможным выполнять анализ зависимости дискретного ряда средних разностных частот СРЧ, измеренных для частных подмассивов, полученных разбиением всего массива отсчётов СРЧ. Аналогичный набор эталонных сигналов даёт эталонную зависимость дискретного ряда средних разностных частот СРЧ.

Предполагая цифровые методы формирования зондирующего сигнала и обработки СРЧ, целесообразно ориентироваться на ЧМ с числом ступеней частоты и, соответ-

ственно, числом отсчётов СРЧ  $N = \sum_{i=1}^m 2^{n_i}$ , где  $2^{n_i}$  – чис-

ло отсчётов в  $i$ -м частичном массиве из общего массива отсчётов СРЧ,  $m$  – число частичных подмассивов.

Диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей волновод над жидкостью, определяется из результатов сравнения зависимости измеренных средних разностных частот сигнала  $\hat{x}_{ср1}, \hat{x}_{ср2}, \dots, \hat{x}_{срm}$  в частичных диапазонах ЧМ  $\Delta f_1, \Delta f_2, \dots, \Delta f_m$  нормированных к средней разностной частоте сигнала, измеренной в полном диапазоне ЧМ  $\hat{x}_{срi, норм} = \hat{x}_{срi} / \hat{x}_{срполн}$ , с зависимостью эталонных нормированных средних частот  $x_{эсрн1}, x_{эсрн2}, \dots, x_{эсрnm}$ , соответствующих тем же диапазонам ЧМ. При этом эталонные нормированные средние частоты  $x_{эсрni}$  определены выражением:

$$x_{эсрni} = \frac{a \left[ \sqrt{\varepsilon_{экв} (1+a_i)^2 - b_i^2} - \sqrt{\varepsilon_{экв} - b_i^2} \right]}{\left\{ a_i \left[ \sqrt{\varepsilon_{экв} (1+a)^2 - b^2} - \sqrt{\varepsilon_{экв} - b^2} \right] \right\}}, \quad (9)$$

где  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $a = \Delta f / f_{мин}$ ;  $a_i = \Delta f_i / f_{мини}$ ;  $b = f_{кр} / f_{мин}$ ;  $b_i = f_{кр} / f_{мини}$ ,  $f_{мини}$  – минимальная частота в  $i$ -м поддиапазоне перестройки.

Искомая оценка диэлектрической проницаемости среды, заполняющей волновод над жидкостью  $\varepsilon_{экв}$ , принимается равной эталонной диэлектрической проницаемости среды  $\varepsilon_{эт}$ , при которой наблюдается минимум суммы

$$\sum_i \left| \hat{x}_{срi, норм} - x_{эсрni} \right| \Rightarrow \min. \quad (10)$$

Необходимо отметить, что увеличение числа частичных поддиапазонов приводит к уменьшению величины перестройки частоты  $\Delta f_i$  в частичных поддиапазонах при фиксированном полном диапазоне  $\Delta f$ . В результате увеличивается погрешность оценки  $\hat{x}_{срi}$  и, следовательно, оценки  $\hat{\varepsilon}_{экв}$ .

### Метод адаптации волноводного уровнемера к изменению эквивалентной диэлектрической проницаемости среды в волноводе

Предельным упрощением рассмотренного метода анализа зависимости разностной частоты является оценка средних частот в двух частичных поддиапазонах с соответствующим разбиением массива отсчётов СРЧ на два произвольных частичных массива. Для этого случая необходимо измерить средние разностные частоты  $\hat{x}_{ср1}, \hat{x}_{ср2}$  СРЧ в двух частичных произвольных

диапазонах ЧМ  $\Delta f_1$  и  $\Delta f_2 = \Delta f - \Delta f_1$ . Тогда нормированные параметры ЧМ можно записать в виде

$$a_1 = \frac{\Delta f_1}{f_{мин1}}; a = \frac{\Delta f}{f_{мин}}; a_2 = \frac{\Delta f_2}{f_{мин2}} = \frac{\Delta f_2}{f_{мин} + \Delta f_1} = \frac{a - a_1}{1 + a_1};$$

$$b = \frac{f_{кр}}{f_{мин}} = b_1; b_2 = \frac{b_1}{1 + a_1}.$$

При одинаковых фазах коэффициентов отражения от зондируемой жидкости в отношении средних частот исчезает зависимость от расстояния:

$$K = \frac{\hat{x}_{ср2}}{\hat{x}_{ср1}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{экв} A^2 - b^2} - \sqrt{\varepsilon_{экв} A_1^2 - b^2}}{\sqrt{\varepsilon_{экв} A_1^2 - b^2} - \sqrt{\varepsilon_{экв} - b^2}}. \quad (11)$$

Отсюда можно получить выражение для оценки значения эквивалентной диэлектрической проницаемости заполнения волновода

$$\hat{\varepsilon}_{экв} = - \frac{2b^2 [(K+1)^2 (A^2 - 2KA_1^2 + K^2) + (1-K^2)(K^2 - A^2)]}{(K+1)^2 A_1^2 [A_1^2 (K+1)^2 - 2K^2 - 2A^2] + (K^2 - A^2)^2}, \quad (12)$$

где  $A = 1+a$ ;  $A_1 = 1+a_1$ .

С использованием полученного  $\hat{\varepsilon}_{экв}$  можно вычислить уточнённое значение расстояния  $\hat{L}_T$ , по оценке  $\hat{x}_{срполн}$ , полученной с использованием полного массива записанных отсчётов сигнала в исходном диапазоне перестройки частоты  $\Delta f$

$$\hat{L}_T = \hat{x}_{срполн} \frac{ca}{2\Delta f} \left[ \sqrt{\hat{\varepsilon}_{экв} (1+a)^2 - b^2} - \sqrt{\hat{\varepsilon}_{экв} - b^2} \right]^{-1}. \quad (13)$$

Из известных методов обработки СРЧ для волноводного уровнемера целесообразно использовать модифицированное интегрально-дискретное преобразование Фурье [2]. В данном случае необходимо адаптировать его для оценки разностной частоты с учётом величины эквивалентной и эталонной диэлектрических проницаемостей  $\varepsilon_{экв}$ ,  $\varepsilon_{эт}$ , дискретизации сигнала и сдвига ВФ для исключения асимметрии [5]

$$S_d(x) = \frac{a}{MD} \times \left\{ \begin{aligned} & u(m) w[\varphi(m)] \times \\ & \times \sum_{m=0}^{M-1} \times \frac{\varepsilon_{эт} [1+a(m+0,5)/M]}{\sqrt{\varepsilon_{эт} [1+a(m+0,5)/M]^2 - b^2}} \times \\ & \times \exp \left[ -j2\pi \frac{x}{D} \sqrt{\varepsilon_{эт} (1+am/M)^2 - b^2} \right] \end{aligned} \right\}, \quad (14)$$

где  $u(m)$  – отсчёты СРЧ;  $M$  – число отсчётов СРЧ в соответствующем частичном диапазоне частот;  $a$  и  $b$  – соответствующие нормированные параметры ЧМ в частичных диапазонах частот;  $D = \sqrt{\varepsilon_{эТ}(1+a)^2 - b^2} - \sqrt{\varepsilon_{эТ} - b^2}$ ;  $\varphi(m) = \left\{ \sqrt{\varepsilon_{эТ}[1+a(m+0,5)/M]^2 - b^2} - \sqrt{\varepsilon_{эТ} - b^2} \right\} / D$ ;  $w[*]$  – весовая функция (7).

Поскольку до проведения измерений измеряемое расстояние и диэлектрическая проницаемость заполнения волновода неизвестны, то процесс их определения должен быть итерационным до снижения абсолютного значения разности между вновь полученным значением нормированной частоты  $\hat{x}_R^{(n)}$  и его предыдущим значением  $\hat{x}_R^{(n-1)}$  ниже заранее заданной величины  $\Delta_x$ :  $|\hat{x}_R^{(n)} - \hat{x}_R^{(n-1)}| \leq \Delta_x$ . В качестве первого приближения можно принять значение  $\varepsilon_{эТ} = 1$ .

На рис. 4 показаны графики зависимости мгновенной погрешности оценки расстояния, полученные с помощью моделирования указанного процесса адаптации при  $\varepsilon_{эКВ} = 1,2$ , указанных выше параметрах ЧМ и диаметрах волновода.

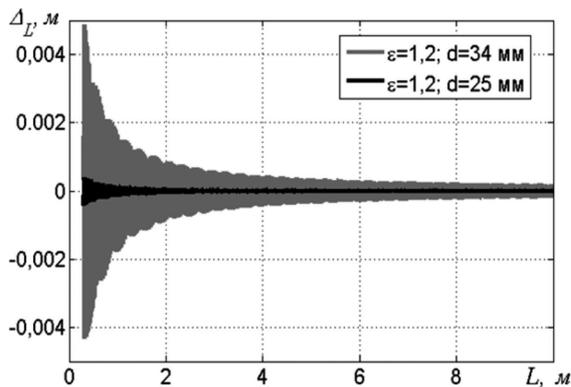


Рис. 4. Зависимость мгновенной погрешности измерения расстояния в волноводе с адаптацией к величине относительной диэлектрической проницаемости

Видно, что с увеличением измеряемого расстояния погрешность уменьшается, как и в свободном пространстве, в волноводе с диаметром 25 мм погрешность примерно на порядок меньше, чем в волноводе с диаметром 34 мм и не превышает 0,5 мм.

#### Влияние погрешности измерения расстояния и шума на результаты адаптации к изменению величины эквивалентной диэлектрической проницаемости

Существует минимально достижимый уровень погрешности измерения, ограниченный влиянием шума на оценки средних разностных частот. Из выражения (11) следует, что первоначальная погрешность измерения  $\Delta\hat{x}_{ср1}$ ,  $\Delta\hat{x}_{ср2}$  средних разностных частот  $\hat{x}_{ср1}$ ,  $\hat{x}_{ср2}$  приводит к погрешности оценки их отношения  $K_{изм}$  на величину  $\Delta K$  ( $K_{изм} = K + \Delta K$ ), что в свою очередь при-

водит к погрешности оценки  $\varepsilon_{эКВ}$  на величину  $\Delta\varepsilon_{ш}$ .

Очевидно, максимум погрешности определения отношения средних частот  $\Delta K_{max}$  получается при разных знаках  $\Delta\hat{x}_{ср1}$ ,  $\Delta\hat{x}_{ср2}$ , следовательно, из-за шума

$$K_{ш} = K + \Delta K_{max} \approx \frac{\hat{x}_{ср1}}{\hat{x}_{ср2}} + \frac{(|\Delta\hat{x}_{ср1}| + |\Delta\hat{x}_{ср2}|)}{(x_L)} = K + \frac{(|\Delta\hat{x}_{ср1}| + |\Delta\hat{x}_{ср2}|)}{(x_L)}$$

Тогда

$$\varepsilon_{эКВ} + \Delta\varepsilon_{ш} = \frac{2b^2[(K_{ш} + 1)^2(A^2 - 2K_{ш}A_1^2 + K_{ш}^2) + (1 - K_{ш}^2)(K_{ш}^2 - A^2)]}{(K_{ш} + 1)^2A_1^2[A_1^2(K_{ш} + 1)^2 - 2K_{ш}^2 - 2A^2] + (K_{ш}^2 - A^2)^2} \quad (15)$$

Отсюда аналитические оценки погрешностей определения относительной диэлектрической проницаемости среды  $\Delta\varepsilon_{ш}$  и нормированной частоты  $\Delta x_{ср}$  определяются, соответственно, выражениями

$$\Delta\varepsilon_{ш} = \frac{2b^2[(K + 1)^2(A^2 - 2KA_1^2 + K^2) + (1 - K^2)(K^2 - A^2)]}{(K + 1)^2A_1^2[A_1^2(K + 1)^2 - 2K^2 - 2A^2] + (K^2 - A^2)^2} - \frac{2b^2[(K_{ш} + 1)^2(A^2 - 2K_{ш}A_1^2 + K_{ш}^2) + (1 - K_{ш}^2)(K_{ш}^2 - A^2)]}{(K_{ш} + 1)^2A_1^2[A_1^2(K_{ш} + 1)^2 - 2K_{ш}^2 - 2A^2] + (K_{ш}^2 - A^2)^2}$$

$$\Delta x_{ср} = \frac{x_L}{a} \left[ \frac{\sqrt{(\varepsilon_{эКВ} + \Delta\varepsilon_{ш})(1+a)^2 - b^2} - \sqrt{(\varepsilon_{эКВ} + \Delta\varepsilon_{ш}) - b^2} - \sqrt{\varepsilon_{эКВ}(1+a)^2 - b^2} + \sqrt{\varepsilon_{эКВ} - b^2}}{\sqrt{\varepsilon_{эКВ}(1+a)^2 - b^2} + \sqrt{\varepsilon_{эКВ} - b^2}} \right] \quad (17)$$

Для оценок верхней границы такой погрешности можно использовать результаты расчёта достижимой погрешности на фоне шума и помех, приведённые в [6] ( $\Delta\hat{x}_{ср1} \approx 0,5q_{сш}^{-1}$ ), из которых следует, что при разной полярности  $\Delta\hat{x}_{ср1}$ ,  $\Delta\hat{x}_{ср2}$  относительная величина погрешности оценки отношения  $K$  составит  $\Delta K_{max} \approx 1/(q_{сш}x_L)$ .

На рис. 5 приведены зависимости максимальной погрешности до поверхности жидкости в волноводе, удалённой на 15 метров, от изменения эквивалентной диэлектрической проницаемости заполнения волновода  $\Delta\varepsilon$  над контролируемой жидкостью при различных отношениях сигнал-шум для волноводов диаметром 25 мм и диапазона ЧМ 3 ГГц (сплошные кривые) и 34 мм и диапазона ЧМ 1 ГГц (пунктирные кривые).

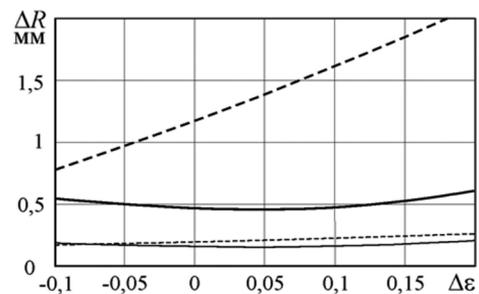


Рис. 5. Зависимости максимальных значений погрешностей измерений расстояния в волноводе

При расчёте использован исходный уровень погрешности, обусловленной шумом, соответствующий отношениям сигнал-шум  $q_{\text{сш}} = 40$  дБ (жирные сплошная и пунктирная кривые),  $q_{\text{сш}} = 50$  дБ (сплошная тонкая кривая) и  $q_{\text{сш}} = 60$  дБ (тонкий пунктир).

Из полученных аналитических выражений и графиков следует, что погрешность оценки расстояния при одновременном изменении диэлектрической проницаемости заполнения волновода  $\Delta\varepsilon$  над контролируемой жидкостью и наличии шума, в 3 ÷ 5 раз превышает шумовую составляющую погрешности.

Условия эксплуатации уровнемера и известность электрофизических параметров контролируемой жидкости позволяют заранее определить относительную диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon$  слоя возможных осадков. В этом случае использование (2), результатов оценки  $\hat{\varepsilon}_{\text{экв}}$  и изменения  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{\text{экв}} - \varepsilon_{\text{экв}0}$  позволяют, при необходимости оценить толщину слоя осадков  $\Delta R_B$  на внутренней поверхности волновода с радиусом  $R_a$

$$\Delta R_B / R_B \approx \varepsilon \Delta \varepsilon / [(\varepsilon - \varepsilon_{\text{газ}})(\varepsilon_{\text{газ}} + \Delta \varepsilon)], \quad (18)$$

при котором погрешность измерения не превышает допустимой величины. Допустимая величина отложений не зависит от диапазона ЧМ, а определяется только допустимой погрешностью измерения  $\Delta x$  и, соответственно, допустимым изменением  $\Delta\varepsilon$ . При эксплуатации уровнемера нет необходимости оценивать толщину слоя осадков. Достаточно определить предельно допустимое значение  $\varepsilon_{\text{экв}}$  для профилактического обслуживания уровнемера.

Представляет интерес вопрос о возможности адаптации к изменению  $\varepsilon_{\text{экв}}$  при наличии шума. На рис. 6 приведены результаты моделирования процесса адаптации при разных уровнях шума в условиях, соответствующих рис. 4. Сплошные линии – диаметр волновода 25 мм, штриховые линии – диаметр волновода 34 мм.

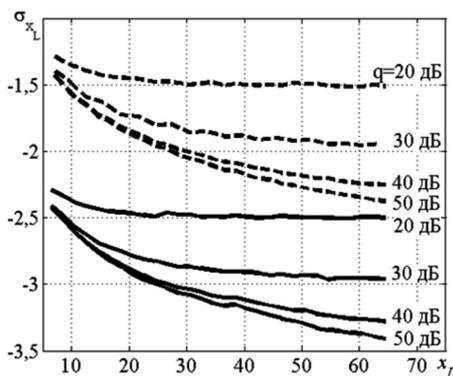


Рис. 6. Зависимость погрешности измерения от измеряемого расстояния и уровня шума при адаптации к величине эквивалентной диэлектрической проницаемости

При моделировании на каждом заданном расстоянии до уровня жидкости в волноводе к сформированному по (1) сигналу добавлялся белый нормальный шум. Для оценки величины эквивалентной диэлектрической проницаемости использовалось разбиение исходного массива из 1024 отсчётов СРЧ на два подмассива по

512 отсчётов. После этого выполнялся процесс адаптации в соответствии с описанной выше процедурой, и находилась погрешность измерения расстояния. На каждом моделируемом расстоянии последовательно добавлялось по 50 реализаций шума. Затем производилась оценка среднеквадратического отклонения результата измерения, и эта оценка усреднялась на отрезке расстояния, равном элементу разрешения ЧМ дальномера.

Видно, что наличие шума не мешает процессу адаптации к уровню эквивалентной диэлектрической проницаемости. При уровне шума примерно 50 дБ его влиянием можно полностью пренебречь. Однако даже при уровне шума 20 дБ уровень достигаемой погрешности соответствует практическим требованиям к уровнемерам. Причём в волноводе с диаметром 25 мм погрешность примерно на порядок меньше, чем в волноводе с диаметром 34 мм.

### Заключение

Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы.

1. Наличие дисперсии и отложений осадков в волноводном тракте приводит к возникновению дополнительной погрешности измерения расстояния, которая существенно превышает допустимые требования к практическим приборам.
2. Разработанный метод адаптации к изменению диэлектрической проницаемости среды в волноводе, вызванной наличием осадков на стенках волновода, снижает погрешность в десятки раз в зависимости от величины этого изменения.
3. Адаптация к изменению диэлектрической проницаемости успешно выполняется при наличии шума с уровнем менее минус 20 дБ.
4. Существует зависимость уровня достижимой погрешности от соотношения длины волны используемого сигнала и критической длины волны волновода, однако детальное изучение этого явления выходит за рамки данной статьи.

### Литература

1. Жданкин В.К. Измерение уровня посредством направленного электромагнитного излучения // Современные технологии автоматизации. 2004. № 4. С. 6-14.
2. Давыдочкин В.М. Преобразование Фурье в задаче измерения расстояния частотным дальнометром в пространстве с дисперсией // Цифровая обработка сигналов. – 2015. – № 1. – С. 66-70.
3. Справочник по волноводам. Под редакцией проф. Я.Н. Фельда. Перевод с английского. Издательство «Советское радио» Москва – 1952. 432 с.
4. Давыдочкин В.М., Давыдочкина С.В. Весовые функции для цифрового адаптивного гармонического анализа сигналов с многомодовым спектром // Радиотехника. 2009. № 9. С. 11-22.
5. Давыдочкин В.М., Давыдочкина С.В., Езерский В.В. Снижение методической и шумовой погрешностей в задаче оценки частоты отрезка гармонического сигнала // Радиотехника. 2015. № 11, С. 66-71.
6. Давыдочкин В.М., Езерский В.В., Влияние помех на погрешность радиолокационных уровнемеров с частотной модуляцией // Успехи современной радиоэлектроники. 2014. № 10. С. 30-37.

## СИНТЕЗ ОБНАРУЖИТЕЛЕЙ ГРУППОВЫХ МНОГОЧАСТОТНЫХ СИГНАЛОВ

*Попов Д.И., д.т.н., профессор кафедры радиотехнических систем Рязанского государственного радиотехнического университета, e-mail: adop@mail.ru.*

### SYNTHESIS OF GROUP MULTI-FREQUENCY SIGNALS DETECTORS

*Popov D.I.*

*The problem of synthesizing an adaptive detectors of group multi-frequency signals of moving targets against a background of clutter with an a priori uncertainty of the clutter parameters is considered. A statistical description of group multi-frequency signals and clutter is given. Based on the calculation of the likelihood ratio and the subsequent statistical averaging of the optimal processing algorithm, principles for constructing systems for the adaptive detection of group multi-frequency signals are proposed, and algorithms for group and sliding signal processing with clutter are presented. A block diagram of the system for adaptive detection of a group multifrequency signal against a background of clutter is proposed. In the system, the clutter rejection is performed separately for each group of coherent pulses with a known arrival time corresponding to the tuning of the carrier frequency of the transmitter. Carrier frequency tuning in combination with adaptive group processing of incoming samples allows to significantly increase the detection efficiency of group multifrequency signals at high detection probabilities.*

**Key words:** adaptation, detection algorithms, group processing, multifrequency signal, clutter, rejection filter.

**Ключевые слова:** адаптация, алгоритмы обнаружения, групповая обработка, многочастотный сигнал, пассивная помеха, режекторный фильтр.

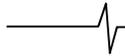
#### Введение

Обнаружение сигналов движущихся целей на фоне пассивных помех, создаваемых мешающими отражениями от неподвижных или медленно перемещающихся объектов, представляет собой одну из важнейших радиолокационных задач [1-4]. Априорная неопределенность спектрально-корреляционных характеристик помехи, а также их неоднородность и нестационарность в зоне обзора существенно затрудняют реализацию эффективного решения данной задачи. Преодоление априорной неопределенности параметров помехи основывается на методах адаптации к неизвестным корреляционным параметрам помехи, что приводит, в частности, к алгоритмам адаптивного режектирования помехи с комплексными весовыми коэффициентами и соответствующим адаптивным режекторным фильтрам (АРФ) [5]. Реализация данных АРФ в цифровом виде требует высокого быстродействия выполнения арифметических операций. Избежать указанных трудностей можно путем предварительной компенсации доплеровского сдвига фазы помехи. В работе [6] синтезированы алгоритмы оценивания и предложены принципы построения и структурные схемы автокомпенсаторов доплеровской фазы пассивных помех с прямой и обратной связью. Особенности адаптации к корреляционным свойствам помехи на выходе автокомпенсатора и последующего ее режектирования рассмотрены в работе [7]. Определенное упрощение процедуры адаптации достигается в АРФ каскадного типа [8]. Другим вариантом упрощения процедуры адаптации является переход от комплексных весовых

*Рассмотрена задача синтеза адаптивных обнаружителей групповых многочастотных сигналов движущихся целей на фоне пассивных помех при априорной неопределенности параметров помех. Приведено статистическое описание групповых многочастотных сигналов и пассивных помех. На основе вычисления отношения правдоподобия и последующего статистического усреднения оптимального алгоритма обработки предложены принципы построения систем адаптивного обнаружения групповых многочастотных сигналов и приведены алгоритмы групповой и скользящей обработки сигналов на фоне пассивных помех. Предложена структурная схема системы адаптивного обнаружения группового многочастотного сигнала на фоне пассивных помех. В системе режектирование помехи осуществляется отдельно по каждой группе когерентных импульсов с известным временем поступления, соответствующим перестройке несущей частоты передатчика. Перестройка несущей частоты в сочетании с адаптивной групповой обработкой поступающих отсчетов позволяет существенно повысить эффективность обнаружения групповых многочастотных сигналов при больших вероятностях обнаружения.*

коэффициентов к действительным, что ограничивает область целесообразного применения соответствующих АРФ при ограниченной и сравнительно малой в зависимости от порядка фильтра и ожидаемых параметров помехи величине ее доплеровской скорости [9]. Компромиссное решение достигается в фильтрах с частичной адаптацией к доплеровской фазе помехи и оптимизацией характеристик режекторных фильтров в априорном диапазоне изменения спектрально-корреляционных параметров помехи [10].

Кроме того, эффективная селекция сигналов движущихся целей невозможна при так называемых слепых скоростях цели, когда спектральные линии сигнала и помехи совпадают. Одним из способов устранения слепых скоростей, а также повышения разрешающей способности по дальности, увеличения дальности действия радио-



локатора и т. п. является использование многочастотных сигналов [11, 12]. Многочастотные сигналы нашли широкое применение в радиолокации, радиосвязи, физике и т. д. [11-17]. В данном обзоре новейших работ не рассмотрены перспективные методы и алгоритмы обработки многочастотных радиолокационных сигналов. Представляют интерес не освещенные в известной литературе, как это следует из приведенного обзора, новые аспекты использования многочастотных сигналов для повышения помехозащищенности радиолокационных систем.

Реальные радиолокационные цели представляют собой отражающие объекты сложной конфигурации, состоящие из совокупности элементарных отражателей [3, 4]. При движении цели изменяется положение отражателей относительно радиолокационной системы, что приводит к возникновению флюктуаций отраженного сигнала. От характера флюктуаций существенно зависит эффективность обнаружения радиолокационных сигналов [3]. При наиболее типичных, особенно для воздушных целей, медленных (совместных) флюктуациях при больших вероятностях обнаружения имеет место значительный проигрыш в величине порогового сигнала по сравнению с быстрыми (независимыми) флюктуациями [4, 18]. Перестройка от импульса к импульсу несущей частоты передатчика позволяет получить практически независимые флюктуации сигнала, повысив тем самым эффективность обнаружения сигналов на фоне собственного шума и затруднив селекцию сигналов движущихся целей на фоне пассивных помех.

Получить независимые флюктуации при решении задач селекции сигналов движущихся целей на фоне пассивных помех можно при использовании так называемых групповых многочастотных сигналов, в которых когерентность сохраняется в пределах группы импульсов, что достигается групповой перестройкой несущей частоты. Обнаружение групповых сигналов в условиях априорной неопределенности предполагает адаптивную обработку групп когерентных импульсов с последующим накоплением результатов обработки каждой из групп. При групповой перестройке несущей частоты устраняется корреляция остатков адаптивной обработки, и обеспечиваются быстрые флюктуации полезного сигнала, однако число накапливаемых отсчетов сокращается по сравнению с традиционной обработкой скользящего типа без перестройки частоты. Представляет интерес статистический синтез обнаружителей групповых многочастотных сигналов на фоне пассивных помех и принципы построения и структурные схемы соответствующих обнаружителей, реализующих групповую обработку.

**Статистическое описание сигналов и помех**

Рассмотрим обнаружение  $N$  радиоимпульсов с групповой перестройкой несущей частоты. Полагаем, что на вход системы обнаружения поступает  $L$  групп отсчетов, каждая из которых состоит из последовательности  $M$  цифровых отсчетов  $U_{jl} = x_{jl} + iy_{jl}$  комплексной огибающей аддитивной смеси сигнала, пассивной помехи и собственного шума, следующих через период повторения  $T$  и образующих в одном элементе разрешения по дальности совокупность вектор-столбцов  $U_l = \{U_{jl}\}^T, j = \overline{1, M},$

$l = \overline{1, L},$  причем  $LM = N,$  («т» – символ транспонирования). Сигнал и помеха являются узкополосными случайными процессами гауссового типа, статистически независимыми в группах отраженных импульсов, что достигается разносом групповых несущих частот, выбираемым из условия малости длины волны, соответствующей разносу частот, по сравнению с радиальными размерами цели. Статистические свойства совокупности  $\{U_l\} = \{U_1, \dots, U_L\}$  описываются с точностью до параметров корреляционных матриц  $R_l$  векторов  $U_l$  совместной плотностью вероятности

$$P(\{U_l\}) = \prod_{l=1}^L P(U_l) = (2\pi)^{-LM} \left( \prod_{l=1}^L \det W_l \right) \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^L U_l^{*T} W_l U_l \right), \tag{1}$$

где  $W_l$  – матрица, обратная корреляционной матрице  $R_l = \overline{U_l U_l^{*T}} / 2\sigma_n^2$  (где  $\sigma_n^2$  – дисперсия пассивной помехи) размерности  $M \times M,$  которая для аддитивной смеси сигнала, пассивной помехи и собственного шума  $R_l^{cn} = R_l^c + R_l^n.$

Элементы матриц  $R_l^c$  и  $R_l^n$  при симметричных спектрах сигнала и помехи имеют вид

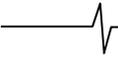
$$R_{jk}^{c(l)} = q \rho_{jk}^{c(l)} e^{i(j-k)\varphi_c^{(l)}} \text{ и } R_{jk}^{n(l)} = \rho_{jk}^{n(l)} e^{i(j-k)\varphi_n^{(l)}} + \lambda \delta_{jk},$$

где  $q = \sigma_c^2 / \sigma_n^2$  – отношение сигнал/помеха;  $\rho_{jk}^{c(l)}$  и  $\rho_{jk}^{n(l)}$  – коэффициенты межпериодной корреляции сигнала и помехи;  $\varphi_c^{(l)} = 2\pi f_{dc}^{(l)} T$  и  $\varphi_n^{(l)} = 2\pi f_{дп}^{(l)} T$  – доплеровские сдвиги фазы сигнала и помехи  $l$ -й группы импульсов за период повторения  $T,$  причем  $\varphi^{(l)} = a_l \varphi^{(1)},$   $a_l = f_l / f_1 < 1$  – отношение несущих частот  $l$ -й и 1-й групп импульсов;  $f_{dc}^{(l)} = 2v_r^c f_l / c$  и  $f_{дп}^{(l)} = 2v_r^n f_l / c$  – доплеровские частоты сигнала и помехи  $l$ -й группы импульсов с несущей частотой  $f_l;$   $v_r^c$  и  $v_r^n$  – радиальная скорость цели и источника помехи;  $c$  – скорость распространения радиоволн;  $\lambda = \sigma_w^2 / \sigma_n^2$  – отношение шум/помеха;  $\delta_{jk}$  – символ Кронекера.

**Синтез алгоритмов обнаружения**

Синтез алгоритмов обнаружения групповых многочастотных сигналов проведем на основе теории обнаружения гауссовых сигналов на фоне гауссовых помех. Алгоритм оптимального обнаружения сигнала от цели по  $L$  группам отсчетов определяется в результате вычисления отношения правдоподобия  $\Lambda(\{U_l\}) = P_{cn}(\{U_l\}) \div \div P_n(\{U_l\}),$  которое при использовании плотностей вероятности сигнала и помехи  $P_{cn}(\cdot)$  и одной помехи  $P_n(\cdot),$  соответствующих (1) при корреляционных матрицах  $R_l^{cn} = R_l^c + R_l^n$  и  $R_l^n,$  имеет вид

$$\Lambda(\{U_l\}) = \left( \prod_{l=1}^L C_l \right) \exp \left( \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L U_l^{*T} Q_l U_l \right), \tag{2}$$



где  $C_l = \det \mathbf{W}_l^{\text{cn}} / \det \mathbf{W}_l^n$ ;  $\mathbf{Q}_l = \mathbf{W}_l^n - \mathbf{W}_l^{\text{cn}}$  – матрица обработки  $l$ -й группы отсчетов, удовлетворяющая уравнению  $\mathbf{Q}_l(\mathbf{R}_l^c + \mathbf{R}_l^n) = \mathbf{W}_l^n \mathbf{R}_l^c$ , решение которого определяет конкретный вид алгоритма обработки.

Отношение правдоподобия (2) является монотонной функцией минимальной достаточной статистики

$$V = \sum_{l=1}^L u_l = \sum_{l=1}^L \mathbf{U}_l^{*T} \mathbf{Q}_l \mathbf{U}_l. \quad (3)$$

Вычисляя в алгоритме (3) матрицу  $\mathbf{Q}_l$  при совместных флюктуациях сигнала ( $\rho_{jk}^{(l)} = 1$ ), с точностью до постоянного множителя получаем

$$V(\varphi_c^{(1)}, \varphi_c^{(2)}, \dots, \varphi_c^{(L)}) = \sum_{l=1}^L V(\varphi_c^{(l)}) = \sum_{l=1}^L \left| \sum_{k=1}^M e^{-ik\varphi_c^{(l)}} \sum_{j=1}^M W_{jk}^{*(l)} U_{jl} \right|^2, \quad (4)$$

где  $W_{jk}^{(l)} = W_{jk}^{n(l)} = w_{jk}^{n(l)} e^{i(j-k)\varphi_n^{(l)}}$  – элементы обратной корреляционной матрицы помехи.

Алгоритм (4) описывает обработку группового многочастотного сигнала. Внутренняя сумма алгоритма (4) соответствует матричной фильтрации групп из  $M$  отсчетов. Преодоление априорной неопределенности параметров помехи основывается на адаптивном байесовском подходе, в соответствии с которым неизвестные величины  $W_{jk}^{(l)}$  или  $w_{jk}^{n(l)}$  и  $\varphi_n^{(l)}$  заменяются их состоятельными оценками  $\hat{W}_{jk}^{(l)}$  или  $\hat{w}_{jk}^{n(l)}$  и  $\hat{\varphi}_n^{(l)}$ . Неопределенность величин  $\varphi_c^{(l)}$  в доплеровском интервале  $[-\pi, \pi]$  первоначально предполагает, как это следует из алгоритма (4), многоканальное когерентное накопление результатов матричной фильтрации. При этом сигнал от движущейся цели из-за различия доплеровских сдвигов фазы в обрабатываемых группах будет попадать в различные доплеровские каналы каждого из когерентных накопителей, что исключает объединение выходных величин последних в соответствии с алгоритмом (4) и, следовательно, решение поставленной задачи. Другим вариантом преодоления априорной неопределенности доплеровских сдвигов фазы сигнала является усреднение алгоритма (4) по данным параметрам. Полагая величины  $\varphi_c^{(l)}$  равномерно распределенными в интервале  $[-\pi, \pi]$ , в результате усреднения (4), исключающего неопределенность этих величин в пределах указанного интервала, находим

$$v = (2\pi)^{-L} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} V(\varphi_c^{(1)}, \varphi_c^{(2)}, \dots, \varphi_c^{(L)}) d\varphi_c^{(1)} d\varphi_c^{(2)} \dots d\varphi_c^{(L)} = \sum_{l=1}^L (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k,p=1}^M e^{-i(k-p)\varphi_c^{(l)}} \sum_{j,r=1}^M \hat{W}_{jk}^{*(l)} U_{jl} \hat{W}_{rp}^{(l)} U_{rp}^* d\varphi_c^{(l)}.$$

Изменяя порядок интегрирования и суммирования, а также учитывая, что

$$(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-p)\varphi_c^{(l)}} d\varphi_c^{(l)} = \text{sinc}[(k-p)\pi] = \begin{cases} 1, & k = p, \\ 0, & k \neq p, \end{cases}$$

получаем

$$v = \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^M \left| \sum_{j=1}^M \hat{W}_{jk}^{*(l)} U_{jl} \right|^2.$$

Данный алгоритм определяет структуру системы обнаружения, инвариантной к доплеровским сдвигам фазы групп отраженного многочастотного сигнала. При этом межпериодная обработка каждой группы отсчетов является комбинированной, т.е. распадается на адаптивную когерентную матричную фильтрацию группы отсчетов и последующее некогерентное суммирование  $M$  результатов матричной фильтрации. Завершается обработка суммированием  $L$  результатов отдельной обработки групп отсчетов.

Весовыми коэффициентами адаптивного матричного фильтра являются оценки элементов обратной корреляционной матрицы помехи, вычисление которых в условиях априорной неопределенности в общем случае представляет собой трудоемкую процедуру, усложняющую реализацию алгоритма обработки. При марковских аппроксимациях гауссовой помехи матричный фильтр преобразуется в векторный (одноканальный) адаптивный режекторный фильтр.

Адаптивный режекторный фильтр (АРФ) используется и в случае произвольных корреляционных свойств помехи [5]. При этом оптимальные весовые коэффициенты АРФ имеют вид  $\hat{G}_{rl} = \hat{g}_{rl} e^{ir\hat{\varphi}_l}$ ,  $r = \overline{0, m}$ , где  $\hat{g}_{rl}$  – коэффициенты импульсной характеристики АРФ, а при канонической форме реализации АРФ – его весовые коэффициенты, определяемые для каждой группы отсчетов в соответствии с конкретными в зависимости от порядка АРФ  $m = M - 1$  адаптивными алгоритмами по оценкам коэффициентов межпериодной корреляции помехи  $\hat{\rho}_{lk}^{n(l)} = \hat{\rho}_{lk}^{(l)}$ ,  $k = \overline{2, m}$  [5], что при  $m \geq 2$  соответствует числу оцениваемых коэффициентов корреляции, равному  $m - 1$ ;  $\hat{\varphi}_l = \hat{\varphi}_n^{(l)}$  – оценка доплеровского сдвига фазы помехи.

Адаптация весовых коэффициентов оптимизирует характеристики АРФ относительно корреляционных свойств помехи [5]. В частности, при  $m = 1$  коэффициенты  $g_{0l} = g_0 = -g_{1l} = -g_1 = 1$ ; при  $m = 2$  –  $\hat{g}_{0l} = g_0 = \hat{g}_{2l} = g_2 = 1$ ,  $\hat{g}_{1l} = -2\hat{\rho}_{12}^{(l)} = -2\hat{\rho}_l$ ; при  $m = 3$  –  $\hat{g}_{0l} = g_0 = -\hat{g}_{3l} = -g_3 = 1$ ,  $\hat{g}_{1l} = -\hat{g}_{2l} = -(\hat{\rho}_{12}^{(l)} - \hat{\rho}_{13}^{(l)}) / (1 - \hat{\rho}_{12}^{(l)})$ .

Использование априорной информации о форме огибающей корреляционной функции помехи позволяет упростить алгоритмы. Для гауссовой функции [ $\hat{\rho}_{lk}^{(l)} = \hat{\rho}_l^{(k-1)^2}$ ] при  $m = 3$  получим  $\hat{g}_{1l} = -\hat{g}_{2l} = -(\hat{\rho}_l + \hat{\rho}_l^2 + \hat{\rho}_l^3)$ .

Оценки  $\hat{\rho}_l$  и  $e^{i\hat{\varphi}_l}$  находятся в соответствии с максимально правдоподобными алгоритмами оценивания отдельно для каждой группы отсчетов [19, 20]. Данные алгоритмы учитывают протяженный характер пассивной помехи и совместно оценивают коэффициент корреляции и доплеровский сдвиг фазы помехи.

Алгоритм групповой обработки на основе АРФ при  $m = M - 1$  имеет вид

$$v_r = \sum_{l=1}^L |Z_l|^2 = \sum_{l=1}^L \left| \sum_{r=0}^m \hat{g}_{rl} e^{ir\hat{\phi}_l} U_{lM-r} \right|^2. \quad (5)$$

Аналогичный алгоритм скользящей обработки с учетом исключения  $m$  отсчетов переходного процесса АРФ:

$$v_c = \sum_{l=m+1}^N |Z_l|^2 = \sum_{l=m+1}^N \left| \sum_{r=0}^m \hat{g}_{rl} e^{ir\hat{\phi}_l} U_{l-r} \right|^2. \quad (6)$$

**Структурная схема системы обнаружения**

Структурная схема системы обнаружения группового многочастотного сигнала на фоне пассивных помех, включающая АРФ групповой обработки [21], изображена на рисунке. Режектирование помехи при этом осуществляется отдельно по каждой группе  $M$  когерентных импульсов с известным временем поступления, соответствующим перестройке несущей частоты передатчика. В отличие от скользящей обработки, соответствующей алгоритму (6) и предполагающей использование  $m-1$  весовых блоков, групповая обработка осуществляется с помощью одного весового блока ( $\times$ ), к входу которого по командам блока управления БУ блок переключения БП поочередно коммутирует весовые коэффициенты  $\hat{g}_{rl}$ . Последние для заданного порядка АРФ  $m$  определяются на основе приведенных выше адаптивных алгоритмов по оценке  $\hat{\rho}_l$ , вычисляемой совместно с оценкой  $e^{i\hat{\phi}_l}$  по текущим и задержанным в запоминающем устройстве ЗУ1 на период повторения  $T$  исходным отсчетам в соответствии с алгоритмами описания патента [21]. Из-за усреднения по дальности и задержек при вычислениях оценки  $\hat{\rho}_l$  и  $e^{i\hat{\phi}_l}$  по отношению к среднему элементу обучающей выборки определяются с задержкой  $\tau$  [21, 22]. Для временного согласования обработки с поступающими оценками исходные отсчеты в запоминающем устройстве ЗУ2 задерживаются на интервал  $\tau$ , что обеспечивает соответствие по времени обработки в АРФ отсчетов  $U_{jl}$  среднему элементу обучающей выборки. С помощью комплексного перемножения ( $\times$ ) с оценкой  $e^{i\hat{\phi}_l}$  задержанных в цепи обратной связи (ОС) отсчетов достигается синфазность при суммировании ( $\Sigma$ ). После завершения обработки данных  $M = m+1$  периодов, очередной перестройки несущей частоты и поступления данных первого периода следующей группы по команде БУ первый коммутатор Км1 переключает ЗУ3 к выходу фильтра, и в течение периода повторения  $T$  происходит считывание результатов режектирования  $Z_l$ .

После вычисления в блоке объединения БО величин  $|Z_l|^2$  происходит их накопление. Обработка в АРФ групп из  $M = m+1$  отсчетов каждая при общем числе отсчетов  $N$ , кратном  $M$ , приводит к некогерентному накоплению  $L = N / M$  отсчетов, следующих с интервалом  $MT$ . (При скользящей обработке по алгоритму (6) накапливается  $N - m$  отсчетов.) Соответствующая задержка накапливаемых отсчетов реализуется путем синхронного с поступлением данных от АРФ заполнением отсчетами запоминающего устройства ЗУ4 в течение интервала  $T$ . При дискретном сканировании антенного луча накопление осуществляется с помощью одного ЗУ4 в коммутируемой цепи ОС. После перемещения антенного луча в новое угловое положение результаты накопления через второй коммутатор Км2 поступают на вход порогового устройства ПУ, в котором сравниваются с пороговым уровнем обнаружения  $v_0$ . В реальных условиях при неизвестной интенсивности остатков режектирования следует использовать адаптивное пороговое устройство. При непрерывном сканировании антенного луча осуществляется скользящее суммирование выходных величин блока объединения БО.

В результате групповой перестройки несущей частоты происходит декорреляция выходных отсчетов режекторного фильтра. Последующее некогерентное их накопление в сочетании с адаптивной групповой обработкой входных отсчетов позволяет повысить эффективность обработки при больших вероятностях обнаружения.

**Заключение**

Синтезированные алгоритмы обнаружения осуществляют адаптивное групповое режектирование пассивной помехи с последующим некогерентным накоплением остатков режектирования.

Предложенная структурная схема обнаружителя реализует групповое режектирование с помощью одного весового блока и синфазного суммирования взвешенных отсчетов с использованием задержанной обратной связи и может быть реализована аппаратно-программными средствами цифровой вычислительной техники.

Перестройка несущей частоты в сочетании с адаптивной групповой обработкой поступающих отсчетов позволяет за счет декорреляции накапливаемых остатков режектирования повысить эффективность обработки при больших вероятностях обнаружения.

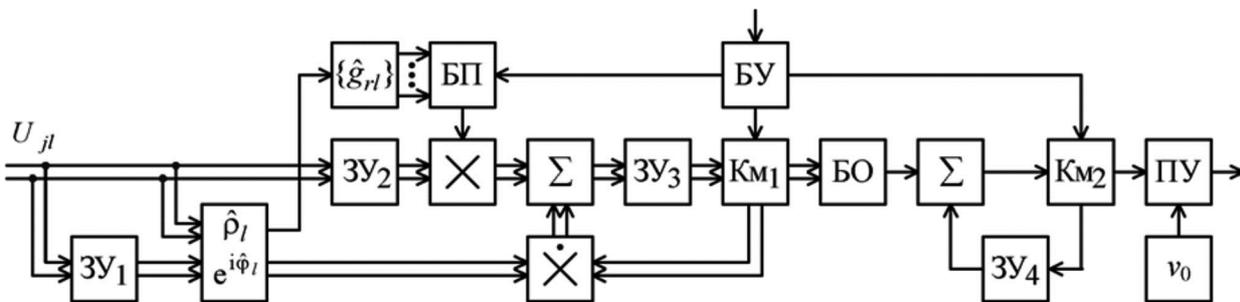


Рис. 1. Структурная схема системы обнаружения



## Литература

1. Skolnik M.I. Introduction to Radar System, 3rd ed., New York: McGraw-Hill, 2001. – 862 p.
2. Richards M.A., Scheer J.A., Holm W.A. (Eds.). Principles of Modern Radar: Basic Principles. New York: SciTech Publishing, IET, Edison. 2010. – 924 p.
3. Melvin W.L., Scheer J.A. (Eds.). Principles of Modern Radar: Advanced Techniques. New York: SciTech Publishing, IET, Edison, 2013. – 846 p.
4. Справочник по радиолокации: в 2 кн. Кн. 1 / под ред. М.И. Сколника; пер. с англ. под ред. В.С. Вербы. М.: Техносфера, 2014. – 672 с.
5. Попов Д.И. Адаптивные режекторные фильтры с комплексными весовыми коэффициентами // Вестник Концерна ПВО «Алмаз – Антей». – 2015. – № 2 (14). – С. 21-26.
6. Попов Д.И. Автокомпенсация доплеровской фазы пассивных помех // Цифровая обработка сигналов. – 2009. – № 2. – С. 30–33.
7. Попов Д.И. Адаптивное подавление пассивных помех // Цифровая обработка сигналов. – 2014. – № 4. – С. 32-37.
8. Попов Д.И. Адаптивные режекторные фильтры каскадного типа // Цифровая обработка сигналов. – 2016. – № 2. – С. 53-56.
9. Попов Д.И. Адаптивные режекторные фильтры с действительными весовыми коэффициентами // Цифровая обработка сигналов. – 2017. – № 1. – С. 22-26.
10. Попов Д.И. Оптимизация нерекурсивных режекторных фильтров с частичной адаптацией // Цифровая обработка сигналов. – 2018. – № 1. – С. 28-32.
11. Гульшин В.А. Многочастотные сигналы и методы их формирования и обработки // Вестник Концерна ПВО «Алмаз – Антей». – 2013. – № 1 (9). – С. 34-40.
12. Попов Д.И. Обнаружение многочастотных радиолокационных сигналов // Успехи современной радиоэлектроники. – 2014. – № 6. – С. 61-66.
13. Avagyan H., Nakhoumian A., Tovmasyan K. QAM Mapped OFDM Signal Processing on Radar Application // Telecommunications and Radio Engineering. – 2014, vol. 73, no 6, pp. 529-535.
14. Zavjalov S.V., Makarov S.B., Volvenko S.V. and Balashova A.A. Efficiency of coherent detection algorithms nonorthogonal multifrequency signals based on modified decision diagram // Lecture Notes in Computer Science. – 2015, vol. 9247, pp. 599–604.
15. Vertogradov G.G., Vertogradov V.G., Vertogradova E.G., Kubatko S.V. and Uryadov V.P. Drift velocity of small-scale artificial ionospheric irregularities according to a multifrequency HF doppler radar. II. Observation and modeling results // Radiophysics and Quantum Electronics. – 2015, vol. 58, no. 6, pp. 381–389.
16. Angelliaume S., Martineau P., Minchew B., Chataing S., Miegibelle V. Multifrequency Radar Imagery and Characterization of Hazardous and NOXIOUS Substances at Sea // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. – 2017, vol. 55, no. 5, pp. 3051-3066.
17. Bi D., Xie Y., Ma L., Li X., Yang X., Zheng Y. R. Multifrequency Compressed Sensing for 2-D Near-field Synthetic Aperture Radar Image Reconstruction // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. – 2017, vol. 66, no 4, pp. 777-791.
18. Ширман Я.Д., Манжос В.Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации. – М.: Радио и связь, 1981. – 416 с.
19. Popov D.I. Measurements of Characteristics of Clutter // Measurement Techniques. May 2017. Vol. 60. No 2. – P. 190-195.
20. Dmitrii I. Popov and Sergey M. Smolskiy, «Estimation of the Clutter Correlation Coefficient in Radar Systems», Infocommunications Journal, Vol. VIII, No 3, September 2016, pp. 8-12.
21. Патент 2660803 РФ, МПК G01S 7/36. Фильтр режекции помех / Д.И. Попов, опубли. 10.07.2018, Бюл. № 19. – 12 с.
22. Dmitrii I. Popov and Sergey M. Smolskiy, «Optimization of the digital rejection filter», Infocommunications Journal, Vol. IX, No 2, June 2017, pp. 1-5.

## Уважаемые авторы!

Редакция научно-технического журнала «Цифровая обработка сигналов» просит Вас соблюдать следующие требования к материалам, направляемым на публикацию:

### 1) Требования к текстовым материалам и сопроводительным документам:

- Текст – текстовый редактор Microsoft Word.
- Таблицы и рисунки должны быть пронумерованы. На все рисунки, таблицы и библиографические данные указываются ссылки в тексте статьи.
- Объем статьи до 12 стр. (шрифт 12). Для заказных обзорных работ объем может быть увеличен до 20 стр.
- Название статьи на русском и английском языках.
- Рукопись статьи сопровождается: краткой аннотацией на русском и английском языках; номером УДК; сведениями об авторах (Ф.И.О., организация, должность, ученая степень, телефоны, электронная почта); ключевыми словами на русском и английском языках; актом экспертизы (при наличии в вашей организации экспертной комиссии).

### 2) Требования к иллюстрациям:

- Векторные (схемы, графики) – желательно использование графических редакторов Adobe Illustrator или Corel DRAW.
- Растровые (фотографии, рисунки) – М 1:1, разрешение не менее 300 dpi, формат tiff.

УДК 621.396.962.2

## АЛГОРИТМ ФОРМИРОВАНИЯ ПРОФИЛЯ РЕЛЬЕФА МЕСТНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАЛОГАБАРИТНОЙ РЛС С СИНТЕЗИРОВАННОЙ АПЕРТУРОЙ АНТЕННЫ ВЫСОКОГО РАЗРЕШЕНИЯ

*Иванников К. С., директор НПК специального программного обеспечения, главный конструктор,  
e-mail: ivannikov\_ks@radar-mms.com;*

*Купряшкин И. Ф., д.т.н., доцент, доцент кафедры Военного учебно-научного центра «Военно-воздушная академия» (г. Воронеж), e-mail: ifk78@mail.ru;*

*Рязанцев Л. Б., к.т.н., докторант Военного учебно-научного центра «Военно-воздушная академия» (г. Воронеж),  
e-mail: kernel386@mail.ru.*

## AN ALGORITHM FOR GENERATING THE TERRAIN CONTOUR WITH THE USE OF SMALL-SIZED HIGH RESOLUTION SYNTHETIC APERTURE RADAR

*Ivannikov K. S., Kupryashkin I. F., Ryzantsev L. B.*

*The article proposes an algorithm to improve angular resolution of airborne radar altimeters and to increase the detail level of the terrain contour due to the application of SAR methods. The results of the experimental verification of the developed algorithm which uses data from a small-sized C-band radar are presented, which illustrate the possibility of classifying areas of the earth's surface according to the calculated height estimates of the terrain, vegetation, constructions and buildings.*

**Key words:** FMCW SAR, radar image, terrain contour matching.

**Ключевые слова:** РЛС с синтезированной апертурой антенны, непрерывное излучение, радиолокационное изображение, корреляционно-экстремальное наведение.

### Введение

Одной из наиболее эффективных мер борьбы с беспилотными летательными аппаратами (БПЛА) сегодня является постановка помех их каналам приема спутниковых навигационных сигналов. Использование сравнительно простых с точки зрения конструкции и применения передатчиков помех способно практически полностью исключить автономные полеты БПЛА в пределах заданных районов.

Среди существующих решений задачи автономной навигации БПЛА особый интерес вызывают те из них, которые основаны на сопоставлении оцененного с помощью радиовысотомера профиля высот полета с цифровой картой местности, записанной в бортовое запоминающее устройство БПЛА [1]. В первую очередь этот интерес обусловлен возможностью получения высокоточных оценок собственных координат БПЛА в широком диапазоне высот полета независимо от состояния естественной освещенности поверхности и метеоусловий на участке коррекции.

Как правило, в силу массогабаритных ограничений, антенны радиовысотомеров, устанавливаемых на БПЛА, характеризуются небольшими размерами и, как следствие, широкими диаграммами направленности (ДН). Это приводит к тому, что формирование оценки профиля с протяженностью, достаточной для сопоставления с цифровой картой местности, требует довольно продолжительного времени (десятки секунд и более).

*Предложен алгоритм, позволяющий улучшить разрешение бортовых радиовысотомеров по угловым координатам и повысить детальность формируемого профиля рельефа местности за счет применения методов синтеза апертуры антенны. Представлены результаты экспериментальной проверки разработанного алгоритма с использованием малогабаритной РЛС с синтезированной апертурой С-диапазона, иллюстрирующие возможность классификации участков земной поверхности по сформированным оценкам высот рельефа местности, растительности и сооружений.*

В то же время достигнутый к настоящему моменту уровень развития науки и техники обеспечил возможность создания малогабаритных широкополосных РЛС и высокопроизводительных вычислительных платформ, массогабаритные характеристики которых допускают их размещение даже на малых БПЛА. Значительный объем памяти и высокое быстродействие бортовых систем обработки сигналов обеспечивает возможность улучшения разрешения радиовысотомеров по угловым координатам за счет применения методов синтеза апертуры антенны. В сочетании с высокой разрешающей способностью по высоте это позволяет их рассматривать как средства формирования профиля рельефа местности с детальностью, обеспечивающей существенное повышение точности и оперативности определения собственных координат БПЛА на основе сопоставления измеренных оценок высоты с цифровой картой местности.

**Целью статьи** является создание алгоритма обработки эхо-сигналов поверхности в малогабаритной широкополосной РЛС, обеспечивающего формирование детального профиля рельефа местности.

## Синтез алгоритма формирования профиля рельефа местности

Для измерения высоты полета летательных аппаратов наиболее широкое применение нашли РЛС с непрерывным излучением (НИ), характеризующиеся невысокой пиковой мощностью, простотой конструкции и низким энергопотреблением. Определение высоты полета в таких РЛС основано на излучении сигнала с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ) в направлении поверхности, находящейся под летательным аппаратом, приеме отраженного сигнала, его демодуляции путем перемножения с зондирующим сигналом, усилении, оцифровки с помощью аналого-цифрового преобразователя (АЦП), сжатии по дальности путем выполнения быстрого преобразования Фурье, обнаружении альтиметровых отражений и оценки их дальности.

Траекторный сигнал на выходе демодулятора РЛС НИ в отдельном  $k$ -м периоде зондирования представляет собой сумму сигналов от всех элементов разрешения в пределах следа диаграммы направленности (ДН) (рис. 1) [2, 3]

$$\dot{S}_z(t_m, k) = \sum_u \dot{S}_{p_u}(t_m, k) + \dot{\eta}(t_m, k), \quad t_m \in [0, T_m], \quad (1)$$

где  $R_{э_u}(t_m, k)$  – эхо-сигнал  $u$ -го элемента разрешения, расположенного на земной поверхности на дальности  $R_{э_u}$  (рис. 1), описываемый выражением [6, 7]

$$\dot{S}_{p_u}(t_m, k) = A_{э_u} \exp\left(j \frac{4\pi R_{э_u}(t_m, k)}{c} \left(f_0 + \mu t_m - \mu \frac{R_{э_u}(t_m, k)}{c}\right)\right); \quad (2)$$

$A_{э_u}$  – амплитуда эхо-сигнала  $u$ -го элемента разрешения;  $f_0$  – начальная частота зондирующего сигнала;  $\mu = \Delta f_c / T_m$ ;  $\Delta f_c$  и  $T_m$  – ширина спектра и период модуляции зондирующего сигнала соответственно;  $c$  – скорость света;  $k = \overline{0, N_k - 1}$ ;  $N_k = \text{int}[T_c / T_m]$ ;  $\text{int}[x]$  – целая часть  $x$ ;  $T_c$  – длительность интервала когерентного накопления сигнала;  $\dot{\eta}(t_m, k)$  – реализация комплексного шума приемного канала на  $k$ -м зондировании.

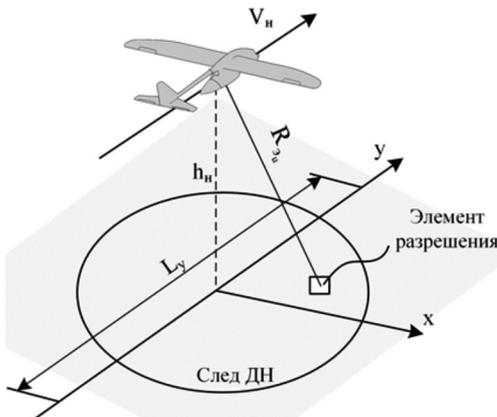


Рис. 1. Геометрия обзора земной поверхности

В предлагаемой реализации алгоритма формирования детального профиля рельефа местности обработка эхо-сигналов поверхности основана на применении алго-

ритма свертки, широко используемого в РЛС с синтезированием апертуры для формирования радиолокационных изображений (РЛИ) в режиме полосовой съемки [4].

Работа алгоритма свертки носит циклический характер, причем каждый  $n$ -й цикл включает последовательное выполнение следующих этапов.

На первом этапе оцифрованный траекторный сигнал (1) запоминается в виде блока, представляющего собой матрицу комплексных отсчетов  $\mathbf{B}$  (рис. 2), количество строк которой составляет  $N_s = F_s T_m$ , а количество столбцов –  $N_B = \Delta y / (V_n T_m)$ , где  $F_s$  – частота дискретизации АЦП;  $V_n$  – скорость полета БПЛА. Значение  $\Delta y$  соответствует шагу выходного изображения профиля рельефа по координате поперечной дальности, определяемому из условия  $\Delta y \leq \delta l$ , где  $\delta l = h_n \lambda / (2V_n T_c)$  – разрешение по поперечной дальности;  $h_n$  – априорная высота полета БПЛА;  $\lambda = c / f_0$ .

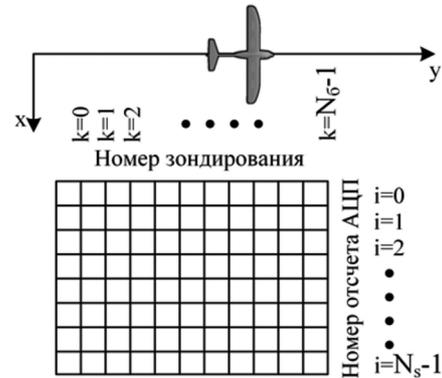


Рис. 2. Формирование блока отсчетов оцифрованного траекторного сигнала

Продолжительность интервала  $N_s$  выбирается исходя из времени нахождения точечного отражателя в элементе разрешения по высоте  $\delta h$

$$T_c \leq \frac{2\sqrt{h_n \delta h + \delta h^2}}{V_n}, \quad (3)$$

где  $\delta h = c / (2\Delta f_c)$ .

Над каждым  $m$ -м столбцом матрицы  $\mathbf{B}$  выполняется операция одномерного дискретного преобразования Фурье, результатом которой является сжатие сигналов, зарегистрированных в течение отдельных зондирований, по координате наклонной дальности

$$\mathbf{B}_{сж} = \mathcal{F}\{\mathbf{B}\}, \quad (4)$$

где  $\mathcal{F}\{\}$  – оператор одномерного дискретного преобразования Фурье.

На втором этапе осуществляется поблочное заполнение матрицы  $\dot{S}_{сж}$ , количество строк которой составляет  $N_s$ , а количество столбцов  $N_k$  определяется количеством зондирований в течение интервала когерентного накопления  $T_c$ . Перед заполнением все строки матрицы

$\dot{S}_{сж}$  сдвигаются влево на  $N_B$  отсчетов, и, далее, в ее освобожденные элементы записываются элементы мат-

рицы  $\dot{\mathbf{B}}_{\text{сж}}$ , т.е.

$$\dot{S}_{\text{сж},i,k} = \dot{S}_{\text{сж},i,k+N_g} \quad (5)$$

$$\dot{S}_{\text{сж},i,N_k-N_g+m} = \dot{B}_{\text{сж},i,m} \quad (6)$$

где  $i = \overline{0, N_s - 1}$ ,  $k = \overline{0, N_k - N_B - 1}$ ,  $m = \overline{0, N_B - 1}$ .

На третьем этапе выполняется процедура фокусировки, включающая поэлементное перемножение отсчетов матрицы  $\dot{\mathbf{S}}_{\text{сж}}$  с соответствующими отсчетами матрицы опорных сигналов  $\dot{\mathbf{S}}_{\text{оп}}$

$$\dot{S}_{\Phi,i,k} = \dot{S}_{\text{сж},i,k} \dot{S}_{\text{оп},i,k} \quad (7)$$

Элементы матрицы  $\dot{\mathbf{S}}_{\text{оп}}$  определяются как

$$\dot{S}_{i,k} = \exp\left(-j \frac{2\pi f_0 T_m^2 V_n^2}{h_{i,c}} (k - N_k/2)^2\right), \text{ где } h_i = ih_{\text{max}}/N_s;$$

$h_{\text{max}}$  – максимальная высота полета БПЛА.

На четвертом этапе формируется  $n$ -й столбец выходного изображения профиля рельефа местности путем выполнения операции

$$I_{i,n} = \sum_{k=0}^{N_k-1} \dot{S}_{\Phi,i,k} \quad (8)$$

Общее количество циклов  $N_y = \text{int}[L_y/\Delta y]$  (количество столбцов матрицы  $\mathbf{I}$ ) определяется протяженностью участка формирования профиля рельефа  $L_y$  и заданным шагом  $\Delta y$ .

Схема, иллюстрирующая последовательность выполнения перечисленных этапов, представлена на рис. 3.

Скорость обработки может быть существенно увеличена за счет снижения размерности матриц  $\dot{\mathbf{S}}_{\text{сж}}$  и  $\mathbf{I}$  путем копирования лишь тех строк матрицы  $\dot{\mathbf{B}}_{\text{сж}}$ , которые содержат альтиметровые отражения. Начальный  $i_n$  и конечный  $i_k$  номера этих строк могут определяться с помощью следующих соотношений

$$i_n = \text{int}\left[\frac{\bar{h} - \Delta h}{2} \frac{N_s}{h_{\text{max}}}\right], \quad i_k = \text{int}\left[\frac{\bar{h} + \Delta h}{2} \frac{N_s}{h_{\text{max}}}\right] \quad (9)$$

где  $\bar{h}$  – среднее значение высоты полета носителя;  $\Delta h$  – максимальное значение перепада высот на участке формирования профиля рельефа местности.

Кроме того, принимая во внимание эффект сверхдискретизации [5], может быть достигнуто дополнительное увеличение скорости работы алгоритма без заметного ухудшения качества формируемого изображения профиля рельефа за счет уменьшения разрядности регистрируемых данных до 1-2 бит.

Алгоритм работы детектора основан на сравнении статистики обнаружения с порогом, для расчета которых используются одномерные выборки отсчетов столбца матрицы  $\mathbf{I}$  в пределах двух смещенных друг относительно друга скользящих окон с одинаковыми апертурами равными  $N_w$ . При этом между апертурами скользящих окон устанавливается «защитное» окно размером

$N_g$ , по аналогии с тем, как это делается в детекторе CFAR [7]

$$\hat{h}_{i,n} = \begin{cases} i\delta h, I_{i,n} \geq I_{0,i,n}; \\ 0, I_{i,n} < I_{0,i,n}; \end{cases} \quad (10)$$

где  $I_{i,n} = \sum_{u=i}^{i+N_w} I_{u,n}$  – статистика обнаружения;

$I_{0,i,n} = \text{erf}^{-1}[2(1-F_{\text{лт}})-1] \sqrt{2\sigma_{i,n}^2} + m_{i,n}$  – порог обнаружения по критерию Неймана-Пирсона, рассчитываемый исходя из гауссовской вероятностной модели отсчетов  $n$ -го столбца матрицы  $\mathbf{I}$  при заданной вероятности ложной тревоги  $F_{\text{лт}}$ ;

$m_{i,n} = \frac{1}{N_w} \sum_{u=i-N_w}^{i-N_g} I_{u,n}$  и

$\sigma_{i,n}^2 = \frac{1}{N_w-1} \sum_{u=i-N_w}^{i-N_g} (I_{u,n} - m_{i,n})^2$  – оценки среднего значения и дисперсии отсчетов  $n$ -го столбца  $\mathbf{I}$  в пределах скользящего окна, формируемые для расчета порога обнаружения, соответственно;  $\text{erf}^{-1}[x]$  – обратная функция ошибок;  $i = \overline{N_w + N_g, N_s - N_w - 1}$ .

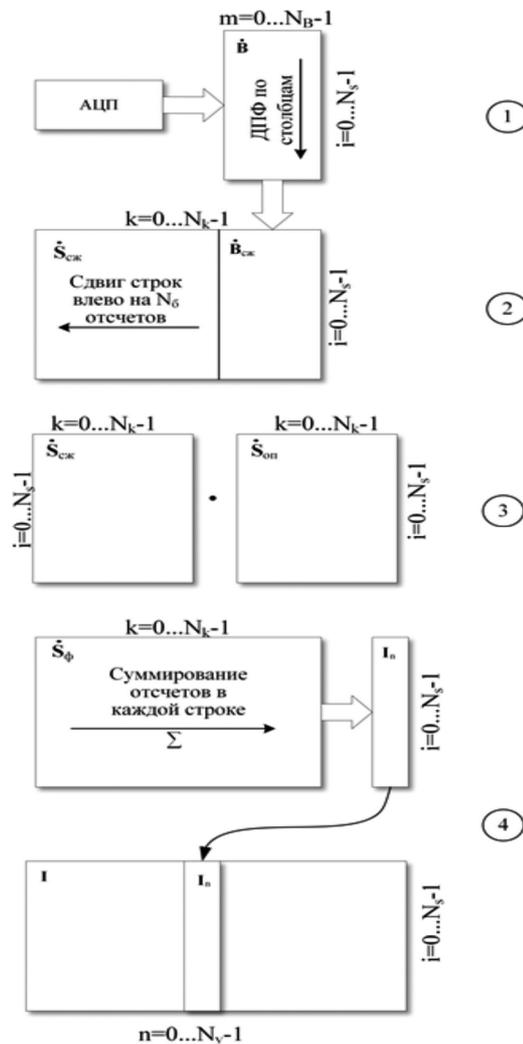
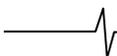


Рис. 3. Схема алгоритма формирования детального профиля рельефа местности с целью снижения допустимого уровня ложной тре-



воги выполнению операции (10) может предшествовать операция фильтрации вида

$$I_{i,n} = \sum_{u=0}^{N_i-1} I_{u,n} A_{i-u}, \quad (11)$$

где  $A_i = \exp(-\alpha i)$  – весовые коэффициенты фильтра, рассчитываемые исходя из экспоненциальной модели альтиметровых отражений [6];  $\alpha \in [0, 1]$ .

В случае, если в  $n$ -м столбце матрицы  $\hat{h}$  имеется более одной ненулевой оценки, может делаться вывод о наличии растительности (деревьев) в точке, расположенной под БПЛА в соответствующий момент времени. При этом наименьшая высота соответствует высоте крон деревьев  $\hat{h}_d$ , а наибольшая – высоте рельефа  $\hat{h}_p$ .

Для повышения достоверности и точности результата

тов могут применяться методы вторичной обработки, например, калмановская фильтрация оценок высот, последовательно формируемых для различных столбцов матрицы  $\mathbf{I}$ .

#### Экспериментальная проверка алгоритма

Экспериментальная проверка осуществлялась с использованием малогабаритной РЛС С-диапазона, являющейся совместной разработкой Военного учебно-научного центра Военно-воздушных сил «Военно-воздушная Академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж) и АО «НПП «Радар ммс» (г. Санкт-Петербург). Характеристики РЛС и параметры ее зондирующего сигнала приведены в табл. 1. РЛС устанавливалась на вертолете Robinson R44 (рис. 4), при этом антенны ориентировались в наadir. Полет вертолета осуществлялся на высотах от 50 до 200 м над земной поверхностью со скоростью 80...130 км/ч.

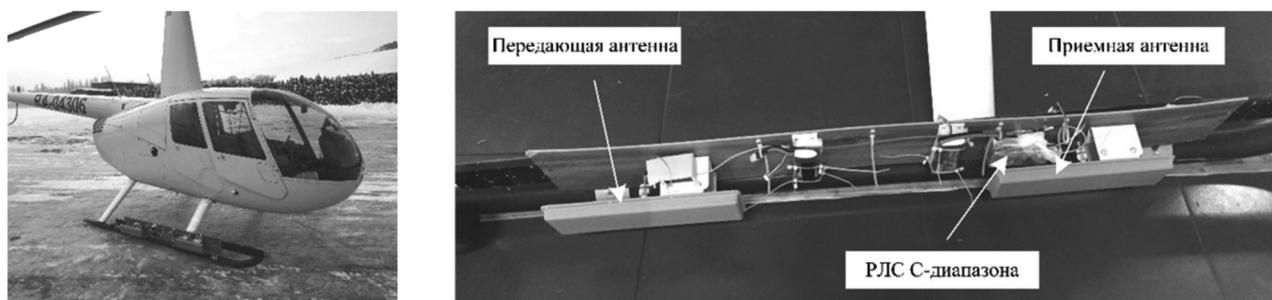
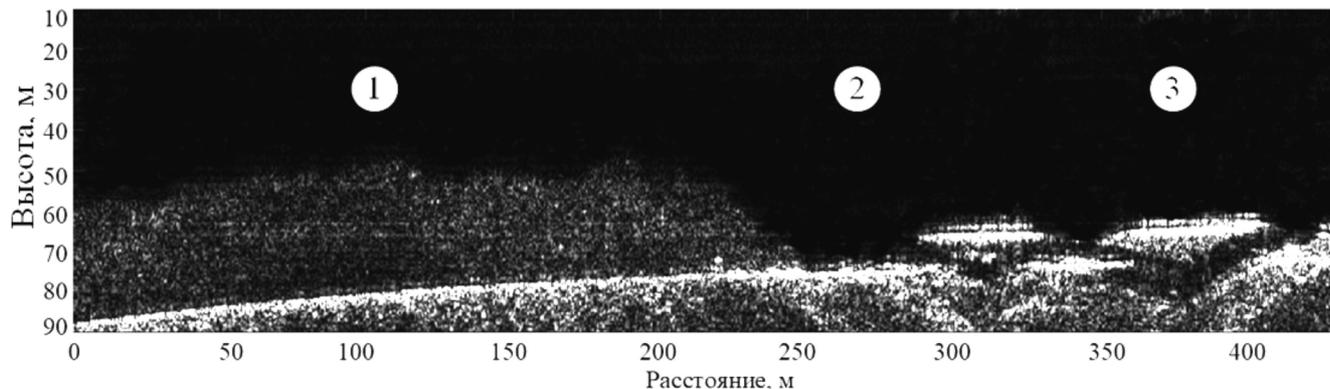


Рис. 4. Вид установленной РЛС С-диапазона на вертолете Robinson R44



а)



б)

Рис. 5. Участок маршрута полета (а) (начало в точке 51046'21.55"С 39011'56.72"В, окончание в точке 51046'32.95"С 39011'41.86"В) и соответствующий ему вид сформированного РЛИ профиля рельефа местности (б): 1 – лесной массив; 2 – асфальтированный участок; 3 – промышленные здания

Табл. 1. Характеристики РЛС С-диапазона

Параметр	Значение
Диапазон рабочих частот, ГГц	5,25-5,75
Ширина спектра зондирующего сигнала, МГц	500
Период модуляции зондирующего сигнала, мс	2,1
Дальность действия, км	9...11
Мощность зондирующего сигнала, Вт	0,05; 1 (с усилителем мощности)
Потребляемая мощность, Вт	36
Масса, кг	0,16 (модуль РЛС) 2x1 (приемная и передающая антенны)

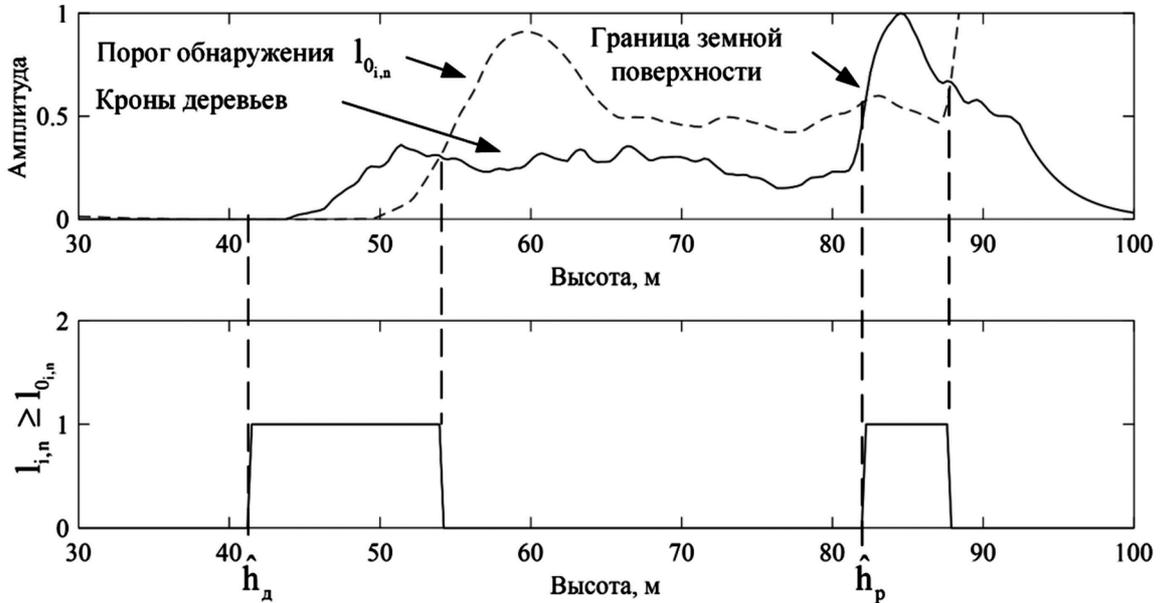


Рис. 6. Сечение РЛИ профиля местности и соответствующие ему значения оценок  $\hat{h}_{i,n}$

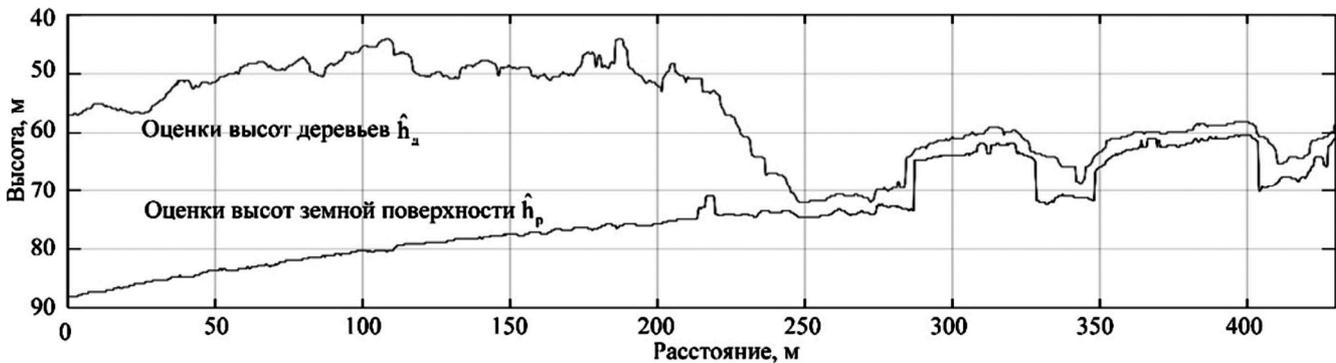


Рис. 7. Оценки высот рельефа местности и деревьев

Вид участка маршрута полета и сформированное на этом участке изображение профиля рельефа местности описанным алгоритмом при  $N_k = 128$  и  $N_6 = 5$  представлены на рис. 5,а и 5,б соответственно. Сечение изображении профиля местности и значения оценок  $\hat{h}_{i,n}$ , соответствующие расстоянию 108 м на рис. 5,б, после выполнения операций (11), (10) при  $N_w = 40$ ,  $N_g = 20$ ,  $F_{\text{IT}} = 1 \cdot 10^{-8}$  и  $\alpha = 0,1$ , представлены на рис. 6, а сформированные по изображению профиля оценки высот рельефа местности и деревьев – на рис. 7.

Из анализа рис. 7 следует, что различия оценок  $\hat{h}_p$  и  $\hat{h}_d$  могут свидетельствовать о наличии участков расти-

тельности (участок полета 0 до 220...250 м), а их близкое соответствие при наличии резких перепадов (участки 270...330 и 350...405 м) – о наличии искусственных сооружений.

**Заключение**

Таким образом, применение бортовых радиовысотомеров с широкополосными зондирующими сигналами, реализующих методы синтеза апертуры антенны при обработке эхо-сигналов поверхности, позволяет существенно повысить детальность формируемого профиля рельефа местности. Установлено, что помимо оценки собственно профиля рельефа также может решаться задача классификации зондируемой поверхности, что обеспечивает возможность определения соб-

ственных координат БПЛА с использованием данных не только о высотах поверхности на участке коррекции, но и семантической информации, включаемой с состав цифровых карт местности.

### Литература

1. Наумов А.И., Кичигин Е.К., Сафонов И.А., Мох А.М. Бортовой комплекс высокоточной навигации с корреляционно-экстремальной навигационной системой и цифровой картой рельефа местности // Вестник Воронежского государственного технического университета, 2019. Том 9, выпуск 6-1, С. 51-55.

2. Рязанцев Л.Б., Лихачев В.П. Оценка дальности и радиальной скорости объектов широкополосной радиолокационной станцией в условиях миграции отметок по каналам дальности // Измерительная техника. 2017. № 11. С. 61-64.

3. Рязанцев Л.Б., Купряшкин И.Ф., Лихачев В.П., Гнездилов М.В. Алгоритм формирования радиолокационных изображений с субметровым разрешением в малогаба-

ритных РЛС с синтезированной апертурой // Цифровая обработка сигналов. 2018. №2. С. 53-58.

4. Авиационные системы радиовидения. Монография / Под ред. Г.С. Кондратенкова. М.: «Радиотехника», 2015. 648 с.

5. Рязанцев Л.Б., Купряшкин И.Ф., Лихачев В.П. Методика обоснования требований к аналого-цифровому преобразованию в РЛС с синтезированной апертурой непрерывного излучения // Цифровая обработка сигналов. 2017. № 2. С. 49-52.

6. Phalippou L., Demeestere F. Optimal re-tracking of SAR altimeter echoes over open ocean: Theory versus results for SIRAL2 data [Электронный ресурс] // [https://www.aviso.altimetry.fr/fileadmin/documents/OSTST/2011/oral/01\\_Wednesday/Splinter%201%20IP/02%20OSTST-2011-Phalippou-Demeestere.pdf](https://www.aviso.altimetry.fr/fileadmin/documents/OSTST/2011/oral/01_Wednesday/Splinter%201%20IP/02%20OSTST-2011-Phalippou-Demeestere.pdf) (дата обращения: 17.01.2019).

7. Constant False Alarm Rate (CFAR) Detection [Электронный ресурс] // <https://www.mathworks.com/help/phased/examples/constant-false-alarm-rate-cfar-detection.html> (дата обращения: 17.01.2019).

### Секция 4: Обработка сигналов в радиотехнических системах

Обсуждение проблем и задач обработки радиотехнических сигналов велось по трем основным направлениям: обнаружение сигналов и оценивание их параметров; радиолокация, пеленгация и навигация; пространственно-временная обработка сигналов.

На секции обсуждались следующие актуальные научные проблемы:



- цифровая обработка эллиптически-поляризованного линейно частотно модулированного сигнала;
- алгоритм обнаружения с сопровождением в задаче шумопеленгации в гидроакустической системе;
- алгоритм обработки статистических характеристик джиттера сигналов цифровых интерфейсов;
- об одном способе построения программируемого генератора случайных чисел с распределением Гаусса;

- цифровое генерирование и цифровая обработка сигналов для перспективных радиолокационных визиров на беспилотных летательных аппаратах;
- сравнительная оценка алгоритмов траекторной фильтрации;
- особенности распознавания сигналов со сложной формой в сенсорных системах связи;
- варианты схем построения антенных систем мобильных РЛС;
- оптимальный прием сигналов с высоким разрешением;
- определение местоположения источника радиоизлучения на поверхности земли по данным группы из двух космических аппаратов;
- ошибки самонастройки автокомпенсатора двух шумовых помех реализующего алгоритм LMS;
- применение инверсной фильтрации в задаче подавления боковых лепестков в ультразвуковом локаторе;
- снижение дифракционных лепестков в плоской цифровой антенной решетке с неэквидистантным размещением фазовых центров групп подрешеток.

УДК 621.391.833

## О ТОЧНОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

*Поршнев С.В., д.т.н., профессор, директор подразделения «Учебно-научный центр «Информационная безопасность»» Уральского федерального университета, ведущий научный сотрудник Института математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург, e-mail: sergey\_porshnev@mail.ru;*

*Кусайкин Д.В., к.т.н., доцент кафедры МЭС УрТИСИ СибГУТИ, доцент подразделения «Учебно-научный центр «Информационная безопасность»» УрФУ, г. Екатеринбург, e-mail: kusaykin@mail.ru.*

## ON ACCURACY OF TRIGONOMETRIC INTERPOLATION

*Porshnev S.V., Kusaykin D.V.*

*In this paper mean square error  $\Delta u_N^2$  ( $N$  – is order of trigonometric polynomial) of a trigonometric interpolation of a periodic signal  $u(t) = \sin(2\pi f_s t)$  is calculated. The results are obtained for the case when interpolation time interval  $[0, T_s]$  contains non-integer number of the signal periods ( $f_s T_s \neq \text{const}$ ). It is proved that contrary to popular opinion error  $\Delta u_N^2 \neq 0$  even if  $N \rightarrow \infty$ , but it tend to some value depending on  $f_s T_s$ . Analytical expressions for the lower bound estimation of  $\Delta u_N^2$  are obtained.*

**Key words:** trigonometric interpolation, signal reconstruction, interpolation error, trigonometric polynomial, Fourier series, mean square error reconstruction.

**Ключевые слова** погрешность тригонометрической интерполяции, ошибка восстановления сигнала, интерполяционный тригонометрический полином, ряд Фурье, среднеквадратическая ошибка восстановления.

**Введение**

Тригонометрическая интерполяция, неразрывно связанная с преобразованием Фурье, сегодня является неотъемлемой частью вычислительной математики и теории сигналов. Она рассматривается как в известных учебниках по высшей математике [1-4 и др.], так и в монографиях, посвященных теории интерполирования и приближения функций [4].

Отметим, что тригонометрическая интерполяция находит широкое применение в цифровой обработке сигналов, например, при решении задачи восстановления дискретного сигнала (ДС), передискретизации ДС [5-10]. При этом, однако, часто не учитывается, что теория тригонометрической интерполяции построена для периодических функций  $f(t) = f(t+T)$ , для которых доказана следующая теорема [1]:

**Теорема.** Коэффициенты интерполяционного тригонометрического полинома порядка  $N$

$$g_N(t) = a_0 + \sum_{k=1}^N a_n \cos(k\omega_0 t) + b_n \sin(k\omega_0 t), \quad (1)$$

где  $\omega_0 = 2\pi/T_s$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{N}$  – множество натуральных чисел, являющегося решением задачи интерполяции:

$$f(t_i) = x_i, \quad t_i = \frac{T_s}{2N+1} i, \quad i = \overline{0, 2N}, \quad (2)$$

вычисляются по формулам:

*Вычислена среднеквадратическая погрешность тригонометрической интерполяции  $\Delta u_N^2$ ,  $N$  – порядок тригонометрического полинома, дискретного сигнала (ДС), представляющего собой значения периодической функции  $u(t) = \sin(2\pi f_s t)$ , вычисленные в узлах временной сетки (ВС)  $t_i = \frac{T_s}{2N+1} i$ ,  $i = \overline{0, 2N}$ ,  $T_s$  – интервала интерполяции, для случая  $f_s T_s \neq \text{const}$  укладывается нецелое число периодов. Доказано, что предел данной величины, вопреки устоявшимся представлениям, не равен нулю, но стремится к некоторому значению, зависящему от  $f_s T_s$ . Получены аналитические выражения для вычисления оценок  $\Delta u_N^2$  при различных значениях  $f_s T_s$ .*

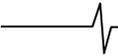
$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2N+1} \sum_{j=0}^{2N} x_j, \\ a_k &= \frac{2}{2N+1} \sum_{j=0}^{2N} x_j \cos(k\omega_0 t_j) = \\ &= \frac{2}{2N+1} \sum_{j=0}^{2N} x_j \cos\left(\frac{2\pi}{2N+1} j\right), \\ b_k &= \frac{2}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} x_j \sin(k\omega_0 t_j) = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} x_j \sin\left(\frac{2\pi}{2n+1} j\right), \end{aligned} \quad (3)$$

которые совпадают с коэффициентами ряда Фурье. Отметим, что в данном подходе число отсчетов ДС должно быть нечетным.

Однако на практике во многих случаях значения восстанавливаемого ДС оказываются заданными в узлах другой временной сетки:

$$f(t_i) = x_i, \quad t_i = \frac{T_0}{2N+1} i, \quad i = \overline{0, 2N},$$

где  $T_0 \neq T_s$ , на которой  $f(0) \neq f(T_0)$ , а в (1)  $\omega_0 = 2\pi/T_0$ .



В тоже время известно, что в соответствии с теоремой Дирихле для того чтобы ряд Фурье  $g_N(t)$ , вычисленный на интервале  $[0, T_0]$ , сходиллся к непрерывной, кусочно-монотонной и ограниченной функции  $f(t)$ , данная функция должна отвечать условию Дирихле [1]:

$$g_N(0) = g_N(T_s) = \frac{1}{2} [f(0-) + f(T_0+)],$$

которое при  $T_s \neq nT$ ,  $n$  – произвольное целое число, не выполняется. В этой ситуации с неизбежностью при формальном использовании тригонометрического полинома будет возникать соответствующая погрешность интерполяции (восстановления ДС). Однако найти формул для оценок значений погрешности, обусловленной невыполнением условий Дирихле на интервале интерполяции, в многочленных работах по теории тригонометрической интерполяции не удается. В этой связи анализ влияния нарушений условий Дирихле на точность тригонометрической интерполяции представляется актуальным.

В статье получены соответствующие формулы для оценки среднеквадратической погрешности тригонометрической интерполяции.

#### Постановка задачи

Вычислить среднеквадратическую погрешность тригонометрической интерполяции периодического сигнала

$$f(t) = \sin\left(2\pi \frac{t}{T_s}\right) = \sin(2\pi f_s t)$$

при решении следующей интерполяционной задачи:

$$x_j = \sin(2\pi f_s t_j) = \sin\left(\frac{2\pi \cdot f_s T_0}{2N+1} j\right), \quad (4)$$

$$t_j = \frac{T_0}{2N+1} j, \quad j = \overline{0, 2N}.$$

#### Погрешность тригонометрической интерполяции сигнала при невыполнении условий Дирихле

Для нахождения формулы для вычисления среднеквадратической погрешности тригонометрической интерполяции вычислим значения коэффициентов тригонометрического полинома. Для этого, подставив (4) в (3), получаем:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2N+1} \sum_{j=0}^{2N} \sin\left(\frac{2\pi f_s T_0}{2N+1} j\right), \\ a_k &= \frac{2}{2N+1} \sum_{j=0}^{2N} \sin\left(\frac{2\pi \cdot f_s T_0}{2N+1} j\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi k}{2N+1} j\right), \\ b_k &= \frac{2}{2N+1} \sum_{j=0}^{2N} \sin\left(\frac{2\pi \cdot f_s T_0}{2N+1} j\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{2N+1} j\right). \end{aligned} \quad (5)$$

Введем обозначения:

$$\alpha = \frac{2\pi \cdot f_s T_0}{2N+1}, \quad \beta_k = \frac{2\pi k}{2N+1}, \quad (6)$$

тогда

$$\alpha + \beta_k = \frac{2\pi \cdot (f_s T_0 + k)}{2N+1}, \quad \alpha - \beta_k = \frac{2\pi \cdot (f_s T_0 - k)}{2N+1} \quad (7)$$

В выбранных обозначениях

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2N+1} \sum_{j=0}^{2N} \sin(\alpha j), \\ a_k &= \frac{2}{2N+1} \sum_{j=0}^{2N} \sin(\alpha j) \cdot \cos(\beta_k j), \\ b_k &= \frac{2}{2N+1} \sum_{j=0}^{2N} \sin(\alpha j) \cdot \sin(\beta_k j). \end{aligned} \quad (8)$$

Принимая во внимание, что

$$\sum_{j=0}^{2N} \sin(\alpha j) = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2} \alpha\right) \sin(N\alpha)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)},$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2N} \sin(\alpha j) \cdot \cos(\beta_k j) &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2N} \sin((\alpha + \beta_k) j) + \sin((\alpha - \beta_k) j) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2} (\alpha + \beta_k)\right) \sin(N(\alpha + \beta_k))}{\sin\left(\frac{\alpha + \beta_k}{2}\right)} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2} (\alpha - \beta_k)\right) \sin(N(\alpha - \beta_k))}{\sin\left(\frac{\alpha - \beta_k}{2}\right)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2N} \sin(\alpha j) \cdot \sin(\beta_k j) &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2N} \cos((\alpha - \beta_k) j) - \cos((\alpha + \beta_k) j) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2} (\alpha - \beta_k)\right) \cos(N(\alpha - \beta_k))}{\sin\left(\frac{\alpha - \beta_k}{2}\right)} - \\ &- \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2} (\alpha + \beta_k)\right) \cos(N(\alpha + \beta_k))}{\sin\left(\frac{\alpha + \beta_k}{2}\right)}, \end{aligned}$$

и подставив в данные выражения (7) находим искомые выражения для коэффициентов тригонометрического полинома  $a_0, a_k, b_k$ :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2(2N+1)} \frac{\sin(\pi f_s T_0) \sin\left(\frac{2\pi N f_s T_0}{2N+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi f_s T_0}{2N+1}\right)}, \\ a_k &= \frac{1}{2N+1} \times \\ &\times \left[ \frac{\sin(\pi (f_s T_0 + k)) \sin\left(\frac{2\pi N (f_s T_0 + k)}{2N+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi (f_s T_0 + k)}{2N+1}\right)} + \right. \\ &\left. \frac{\sin(\pi (f_s T_0 - k)) \sin\left(\frac{2\pi N (f_s T_0 - k)}{2N+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi (f_s T_0 - k)}{2N+1}\right)} \right] \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{\sin(\pi(f_s T_0 - k)) \sin\left(\frac{2\pi N(f_s T_0 - k)}{2N+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(f_s T_0 - k)}{2N+1}\right)} + \right. \\
 & b_k = \frac{1}{2N+1} \times \\
 & \left. \times \left[ \frac{\sin(\pi(f_s T_0 - k)) \cos\left(\frac{2\pi N(f_s T_0 - k)}{2N+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(f_s T_0 - k)}{2N+1}\right)} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\sin(\pi(f_s T_0 + k)) \cos\left(\frac{2\pi N(f_s T_0 + k)}{2N+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(f_s T_0 + k)}{2N+1}\right)} \right] \right.
 \end{aligned}$$

Из (9) видно, что коэффициенты тригонометрического полинома  $a_0, a_k, b_k$  оказываются зависящими, как от числа отсчетов ДС, число которых равняется  $2N + 1$ , так и от величины  $f_s T_0$  являющейся мерой количества периодов восстанавливаемой периодической функции, укладываемых на временном интервале  $[0, T_s]$ . В связи с тем, что при произвольном выборе  $T_s$  на временном интервале  $[0, T_s]$  может укладываться, как целое число периодов сигнала  $N_p \in \mathbb{N}$ , ( $\mathbb{N}$  – множество натуральных чисел, функции  $f(t)$ ), так и доля периода  $\Delta N_p$ , введем следующее обозначение:

$$T_0 f_s = N_p + \Delta N_p. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9) и выполняя элементарные тригонометрические преобразования, получаем:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{2(2N+1)} \frac{\sin(\pi \Delta N_p) \sin\left(\pi \Delta N_p - \frac{\pi(N_p + \Delta N_p)}{2N+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(N_p + \Delta N_p)}{2N+1}\right)}, \\
 a_k &= \frac{\sin(\pi \Delta N_p)}{2N+1} \times \\
 & \times \left[ (-1)^{N_p+k} \frac{\sin\left(\frac{2\pi N(N_p+k+\Delta N_p)}{2N+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(N_p+k+\Delta N_p)}{2N+1}\right)} + \right. \\
 & \left. + (-1)^{N_p-k} \frac{\sin\left(\frac{2\pi N(N_p-k+\Delta N_p)}{2N+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(N_p-k+\Delta N_p)}{2N+1}\right)} \right], \\
 b_k &= \frac{\sin(\pi \Delta N_p)}{2N+1} \times
 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[ (-1)^{N_p-k} \frac{\cos\left(\frac{2\pi N(N_p-k+\Delta N_p)}{2N+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(N_p-k+\Delta N_p)}{2N+1}\right)} - \right. \\
 & \left. - (-1)^{N_p+k} \frac{\cos\left(\frac{2\pi N(N_p+k+\Delta N_p)}{2N+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(N_p+k+\Delta N_p)}{2N+1}\right)} \right].
 \end{aligned}$$

Из (11) видно, что при  $\Delta N_p = 0$

$$a_0 = a_k \equiv 0,$$

$$\begin{aligned}
 b_k &= \lim_{\Delta N_p \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \Delta N_p)}{2N+1} \left[ \frac{\cos\left(\frac{2\pi N(N_p-k+\Delta N_p)}{2N+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(N_p-k+\Delta N_p)}{2N+1}\right)} - \right. \\
 & \left. - \frac{\cos\left(\frac{2\pi N(N_p+k+\Delta N_p)}{2N+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(N_p+k+\Delta N_p)}{2N+1}\right)} \right] = \begin{cases} 1, & k = N_p, \\ 0, & \neq N_p, \end{cases}
 \end{aligned}$$

то есть отличным от нуля оказываются все коэффициенты тригонометрического полинома (1) за исключением, коэффициента  $b_{N_p}$  при функции

$$\sin(N_p \omega_0 t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T_s} N_p t\right).$$

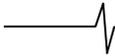
Принимая во внимание, что в рассматриваемом случае  $T_0 = N_p \cdot T_s$ , получаем

$$\sin(N_p \omega_0 t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T_s N_p} N_p t\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{T_s} t\right).$$

Таким образом, тригонометрический полином совпадает с интерполируемым тригонометрическим сигналом, и, соответственно, погрешность интерполяции тождественно равняется нулю. Напомним, что с точки зрения теории ортогональных сигналов, выражение (1) есть разложение функции  $f(t)$  по системе ортогональных базисных функций  $\cos(k\omega_0 t), \sin(k\omega_0 t)$ ,  $\omega_0 = 2\pi/T_0$ , поэтому в рассматриваемом случае можно говорить о том, что на интервале  $[0, T_0]$  функция  $f(t)$  оказывается точно ортогональной базису, составленному из тригонометрических функций  $\cos(k\omega_0 t), \sin(k\omega_0 t)$ .

Если  $\Delta N_p \neq 0$ , то как видно из (11), для всех  $a_0, a_k, b_k \neq 0$  и, следовательно,  $f(t) \neq g_N(t)$ , поэтому среднеквадратическая погрешность интерполяции

$$\Delta_N^2 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} (f(t) - g_N(t))^2 dt \neq 0, \quad (12)$$



где  $\hat{T}_0 = \frac{2N}{2N+1}T_0$  – значение координаты  $2N$ -го узла используемой временной сетки.

Данный результат с точки зрения теории ортогональных сигналов означает, что функция  $f(t)$  на интервале  $[0, T_0]$  оказывается неортогональной использованной системе ортогональных базисных функций  $\cos(k\omega_0 t), \sin(k\omega_0 t)$ .  $\omega_0 = 2\pi/T_0$ .

Отметим, что существует устоявшаяся точка зрения о погрешности тригонометрической интерполяции:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta_N^2 = 0,$$

однако, ее доказательства в многочисленных учебниках, монографиях и статьях, посвященных тригонометрической интерполяции, обнаружить, не удалось. Для подтверждения либо опровержения данной точки зрения следует вычислить интеграл

$$\Delta \bar{u}_N^2 = \frac{1}{\hat{T}_0} \times \int_0^{\hat{T}_0} [f(t) - (a_0 + \sum_{k=1}^N [a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0}t\right)]]^2 dt, \quad (13)$$

где коэффициенты  $a_0, a_k, b_k$  вычисляются в соответствии с (11).

Выполнив в (13) очевидные, но достаточно громоздкие вычисления, приведенные в Приложении 1, получаем:

$$\Delta \bar{u}_N^2 = \bar{f}^2 - 2a_0 \bar{f} - \sum_{k=1}^N [a_k \hat{a}_k + b_k \hat{b}_k] + a_0^2 + \left(1 + \frac{1}{2N(2N+1)}\right) \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N b_k^2\right) + \sum_{k=1}^N \frac{a_k^2}{2} \left(\frac{1}{4\pi k} \sin\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right)\right) + \sum_{k=1}^N \frac{b_k^2}{2} \left(\frac{1}{4\pi k} \sin\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right)\right) - 2 \sum_{k=1}^N a_k b_k \left(\frac{1}{8\pi k} \left(1 - \cos\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right)\right)\right), \quad (14)$$

где

$$\bar{f} = \frac{1}{\hat{T}_0} \int_0^{\hat{T}_0} f(t) dt, \quad \bar{f}^2 = \frac{1}{\hat{T}_0} \int_0^{\hat{T}_0} f^2(t) dt, \quad \hat{a}_k = \frac{2}{\hat{T}_0} \int_0^{\hat{T}_0} f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) dt, \quad \hat{b}_k = \frac{2}{\hat{T}_0} \int_0^{\hat{T}_0} f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) dt. \quad (15)$$

Подставив в (15) интерполируемую функцию  $\sin(2\pi f_s t)$ , вычислив соответствующие интегралы и заменив  $f_s T_0$  на  $N_p + \Delta N_p$  в соответствии с (10), получаем:

$$\bar{f} = \frac{1}{\hat{T}_0} \int_0^{\hat{T}_0} \sin(2\pi f_s t) dt =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2N}\right) \frac{1}{2} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi \Delta N_p - \pi(N_p + \Delta N_p)}{2N+1}\right)}{\pi(N_p + \Delta N_p)},$$

$$\bar{f}^2 = \frac{1}{\hat{T}_0} \int_0^{\hat{T}_0} \sin^2(2\pi f_s t) dt =$$

$$= \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{2N}\right) \frac{\sin^2\left(\frac{2\pi \Delta N_p - 2\pi(N_p + \Delta N_p)}{2N+1}\right)}{2\pi(N_p + \Delta N_p) - \frac{2\pi(N_p + \Delta N_p)}{2N+1}},$$

$$\hat{a}_k = \frac{2}{\hat{T}_0} \int_0^{\hat{T}_0} \sin(2\pi f_s t) \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0}t\right) dt =$$

$$= \frac{\sin^2\left(\pi(N_p + \Delta N_p + k)\frac{2N}{2N+1}\right)}{\pi(N_p + \Delta N_p + k)\frac{2N}{2N+1}} -$$

$$- \frac{\sin^2\left(\pi(N_p + \Delta N_p - k)\frac{2N}{2N+1}\right)}{\pi(N_p + \Delta N_p - k)\frac{2N}{2N+1}},$$

$$\hat{b}_k = \frac{2}{\hat{T}_0} \int_0^{\hat{T}_0} \sin(2\pi f_s t) \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0}t\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\sin\left(2\pi(N_p + \Delta N_p - k)\frac{2N}{2N+1}\right)}{2\pi(N_p + \Delta N_p - k)\frac{2N}{2N+1}} -$$

$$- \frac{\sin\left(2\pi(N_p + \Delta N_p + k)\frac{2N}{2N+1}\right)}{2\pi(N_p + \Delta N_p + k)\frac{2N}{2N+1}} \right).$$

Для анализа зависимости погрешности  $\Delta u_N$  от  $N$  вычислим пределы  $a_k, b_k, \hat{a}_k, \hat{b}_k, \bar{f}, \bar{f}^2$ :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a_0 = \frac{1}{2} \frac{\sin^2(\pi \Delta N_p)}{\pi(N_p + \Delta N_p)},$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a_k = \frac{\sin(\pi \Delta N_p)^2}{\pi} \times$$

$$\times 2(N_p + \Delta N_p) \left( \frac{1}{(N_p + \Delta N_p)^2 - k^2} \right),$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} b_k = \frac{\sin(2\pi \Delta N_p)}{\pi} \left( \frac{k}{(N_p + \Delta N_p)^2 - k^2} \right).$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{a}_k = \frac{\sin(\pi \Delta N_p)^2}{\pi} \times$$

$$\times 2(N_p + \Delta N_p) \left( \frac{1}{(N_p + \Delta N)^2 - k^2} \right),$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{b}_k = \frac{\sin(2\pi\Delta N_p)}{\pi} \left( \frac{k}{(N_p + \Delta N_p)^2 - k^2} \right)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{f} = \frac{1}{2} \frac{\sin^2(\pi\Delta N_p)}{\pi(N_p + \Delta N_p)}, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{f}^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sin^2(2\pi\Delta N_p)}{2\pi(N_p + \Delta N_p)}.$$

Анализ выражений для пределов  $a_k, b_k, \hat{a}_k, \hat{b}_k, \bar{f}, \bar{f}^2$  позволяет сделать вывод о том, что при  $N \rightarrow \infty$  данные коэффициенты оказываются независимыми от  $N$  и отличными от нуля. При этом  $\lim_{N \rightarrow \infty} a_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{f}, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} a_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{a}_k = A_k, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} b_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{b}_k = B_k.$

Переходя в (14) к пределу и используя значения вычисленных пределов  $a_0, a_k, b_k, \hat{a}_k, \hat{b}_k$  и  $\bar{f}$ , находим:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \overline{\Delta u_N^2} = \frac{1}{2} + \frac{\sin^2(2\pi\Delta N_p)}{2\pi(N_p + \Delta N_p)} - \left( \left( \frac{1}{2} \frac{\sin^2(\pi\Delta N_p)}{\pi(N_p + \Delta N_p)} \right)^2 + \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N A_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N B_k^2 \right] \right), \quad (16)$$

где

$$\sum_{k=1}^N A_k^2 = S_A(N, N_p, \Delta N_p) = \frac{\sin^4(\pi\Delta N_p)}{\pi^2} 4(N_p + \Delta N_p)^2 \sum_{k=1}^N \left( \frac{1}{(N_p + \Delta N_p)^2 - k^2} \right)^2,$$

$$\sum_{k=1}^N B_k^2 = S_B(N, N_p, \Delta N_p) = \left( \frac{\sin(2\pi\Delta N_p)}{\pi} \right)^2 \sum_{k=1}^N \left( \frac{k}{(N_p + \Delta N_p)^2 - k^2} \right)^2.$$

Так как  $\sum_{k=1}^N \left( \frac{\Delta N_p}{(N_p - k)^2 + (\Delta N_p)^2} \right)^2 < \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^4},$

$$\sum_{k=1}^N \left( \frac{k}{(N_p + \Delta N_p)^2 - k^2} \right)^2 < \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2}, \quad \text{а} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90},$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ , при  $\Delta N_p \neq 0$  и  $N \rightarrow \infty$  данные ряды будут сходящимися, что позволяет сразу записать выражение для вычисления оценки нижней границы погрешности тригонометрической интерполяции периодической функции  $f(t)$  при  $N \rightarrow \infty, \Delta N_p \neq 0$ :

$$[\Delta u_N]_{\min} = \frac{1}{2} + \frac{\sin^2(2\pi\Delta N_p)}{2\pi(N_p + \Delta N_p)} - \left( \frac{1}{2} \frac{\sin^2(\pi\Delta N_p)}{\pi(N_p + \Delta N_p)} \right)^2 -$$

$$- \frac{\pi^4}{180} \sin^2(\pi\Delta N_p) - \frac{\sin^2(\pi\Delta N_p)}{24}. \quad (17)$$

Из (17) видно, что минимальное значение погрешности тригонометрической интерполяции при  $N \rightarrow \infty, \Delta N_p \neq 0$  оказывается зависящим от  $N_p, \Delta N_p$  и отличным от нуля. Таким образом, выражение (17) доказывает, что при  $N \rightarrow \infty, \forall \Delta N_p \neq 0$  предположение  $\lim_{N \rightarrow \infty} \overline{\Delta u_N^2} = 0$ , оказывается неверным.

### Анализ влияния длительности интервала интерполяции на точность тригонометрической интерполяции периодического ДС

Для изучения вопроса о зависимости точности тригонометрической интерполяции периодического ДС от длительности интервала интерполяции введем в рассмотрение временную сетку

$$t_j = \frac{T_0}{2N+1} j, \quad j = 0, 2(N + \Delta N) = 0, 2\tilde{N}, \quad (18)$$

использование которой эквивалентно переходу от решения задачи тригонометрической интерполяции на временном интервале  $[0, T_0]$  к решению данной задачи на

интервале  $[0, \tilde{T}_0]$ , где  $\tilde{T}_0 = T_0 \left( 1 + \frac{2\Delta N}{2N+1} \right)$ :  $N$  – число от-

счетов ДС на интервале  $[0, T_0]$ ,  $2\Delta N$  – количество добавленных отсчетов. Тогда в рассматриваемом случае задача имеет следующую формулировку:

восстановить по таблице

$$t_j = \frac{T_0}{2N+1} j, \quad x_j = \sin \left( \frac{2\pi \cdot f_s T_0}{2N+1} j \right), \quad j = 0, 2\tilde{N}. \quad (19)$$

с помощью тригонометрического полинома (1) значения периодической функции  $f(t)$ .

Отметим, что рассматриваемая задача решается на временном интервале  $[0, \tilde{T}_0]$ , поэтому следует заменить

в (1)  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  на  $\tilde{\omega}_0 = \frac{2\pi}{\tilde{T}_0} = 2\pi/T_0 \left( 1 + \frac{2\Delta N}{2N+1} \right)$  и, со-

ответственно, вычислять коэффициенты интерполирующего полинома  $\tilde{a}_0, \tilde{a}_k, \tilde{b}_k$  по формулам:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0 &= \frac{1}{2\tilde{N}+1} \sum_{j=0}^{2\tilde{N}} x_j, \\ \tilde{a}_k &= \frac{2}{2\tilde{N}+1} \sum_{j=0}^{2\tilde{N}} x_j \cos(k\omega_0 t_j) = \\ &= \frac{2}{2\tilde{N}+1} \sum_{j=0}^{2\tilde{N}} x_j \cos \left( \frac{2\pi k}{2\tilde{N}+1} j \right) = \\ &= \frac{2}{2\tilde{N}+1} \sum_{j=0}^{2\tilde{N}} \sin \left( \frac{2\pi \cdot f_s T_0}{2N+1} j \right) \cos \left( \frac{2\pi k}{2\tilde{N}+1} j \right), \\ \tilde{b}_k &= \frac{2}{2\tilde{N}+1} \sum_{j=0}^{2\tilde{N}} x_j \sin(k\omega_0 t_j) = \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{2\tilde{N}+1} \sum_{j=0}^{2\tilde{N}} x_j \sin\left(\frac{2\pi k}{2\tilde{N}+1} j\right) = \\
&= \frac{2}{2\tilde{N}+1} \sum_{j=0}^{2\tilde{N}} \sin\left(\frac{2\pi \cdot f_s T_0}{2N+1} j\right) \sin\left(\frac{2\pi k}{2\tilde{N}+1} j\right).
\end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\tilde{\alpha} = \frac{2\pi \cdot f_s T_0}{2N+1}, \tilde{\beta}_k = \frac{2\pi k}{2\tilde{N}+1},$$

тогда

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}_k &= \frac{2\pi \cdot f_s T_0}{2N+1} - \frac{2\pi k}{2\tilde{N}+1} = \\
&= 2\pi \left( f_s T_0 \frac{(2\tilde{N}+1)}{(2N+1)} - k \right) / (2\tilde{N}+1),
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}_k &= \frac{2\pi \cdot f_s T_0}{2N+1} + \frac{2\pi k}{2\tilde{N}+1} = \\
&= 2\pi \left( f_s T_0 \frac{(2\tilde{N}+1)}{(2N+1)} + k \right) / (2\tilde{N}+1).
\end{aligned}$$

Сравнивая (21) и (7), видим, что для получения выражений для вычисления коэффициентов тригонометрического полинома  $\tilde{a}_k, \tilde{b}_k$  следует заменить в (9)  $f_s T_0$  на  $f_s T_0 \frac{(2\tilde{N}+1)}{(2N+1)}$ :

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_k &= \frac{1}{2\tilde{N}+1} \times \\
&\times \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \left[ \frac{\sin\left(\pi \left( f_s T_0 \frac{(2\tilde{N}+1)}{(2N+1)} + k \right)\right) \sin\left(\frac{2\pi \tilde{N}}{2\tilde{N}+1} \left( f_s T_0 \frac{(2\tilde{N}+1)}{(2N+1)} + k \right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2\tilde{N}+1} \left( f_s T_0 \frac{(2\tilde{N}+1)}{(2N+1)} + k \right)\right)} + \right. \\
&\left. + \frac{\sin\left(\pi \left( f_s T_0 \frac{(2\tilde{N}+1)}{(2N+1)} - k \right)\right) \sin\left(\frac{2\pi \tilde{N}}{2\tilde{N}+1} \left( f_s T_0 \frac{(2\tilde{N}+1)}{(2N+1)} - k \right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2\tilde{N}+1} \left( f_s T_0 \frac{(2\tilde{N}+1)}{(2N+1)} - k \right)\right)} \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_k &= \frac{1}{2\tilde{N}+1} \times \\
&\times \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \left[ \frac{\sin\left(\pi \left( f_s T_0 \frac{(2\tilde{N}+1)}{(2N+1)} - k \right)\right) \cos\left(\frac{2\pi \tilde{N}}{2\tilde{N}+1} \left( f_s T_0 \frac{(2\tilde{N}+1)}{(2N+1)} - k \right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2\tilde{N}+1} \left( f_s T_0 \frac{(2\tilde{N}+1)}{(2N+1)} - k \right)\right)} - \right. \\
&\left. - \frac{\sin\left(\pi \left( f_s T_0 \frac{(2\tilde{N}+1)}{(2N+1)} + k \right)\right) \cos\left(\frac{2\pi \tilde{N}}{2\tilde{N}+1} \left( f_s T_0 \frac{(2\tilde{N}+1)}{(2N+1)} + k \right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2\tilde{N}+1} \left( f_s T_0 \frac{(2\tilde{N}+1)}{(2N+1)} + k \right)\right)} \right],
\end{aligned} \tag{22}$$

но

$$\frac{2\tilde{N}+1}{2N+1} = 1 + \frac{2\Delta N}{2N+1},$$

поэтому

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_0 &= \frac{1}{2(2\tilde{N}+1)} \frac{\sin\left(\pi f_s T_0 \frac{2\tilde{N}+1}{2N+1}\right) \sin\left(2\tilde{N} \frac{2\pi f_s T_0}{2N+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi f_s T_0}{2N+1}\right)} = \\
&= \frac{1}{2(2\tilde{N}+1)} \frac{\sin\left(\pi f_s T_0 \frac{2\tilde{N}+1}{2N+1}\right) \sin\left(\frac{2\pi f_s T_0 2\tilde{N}}{2\tilde{N}+1} \frac{2\tilde{N}+1}{2N+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi f_s T_0}{2\tilde{N}+1} \frac{2\tilde{N}+1}{2N+1}\right)}, \\
\tilde{a}_k &= \frac{1}{2\tilde{N}+1} \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \left[ \frac{\sin\left(\pi (f_s \tilde{T}_0 + k)\right) \sin\left(\frac{2\pi \tilde{N}}{2\tilde{N}+1} (f_s \tilde{T}_0 + k)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2\tilde{N}+1} (f_s \tilde{T}_0 + k)\right)} + \right. \\
&\left. + \frac{\sin\left(\pi (f_s \tilde{T}_0 - k)\right) \sin\left(\frac{2\pi \tilde{N}}{2\tilde{N}+1} (f_s \tilde{T}_0 - k)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2\tilde{N}+1} (f_s \tilde{T}_0 - k)\right)} \right],
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_k &= \frac{1}{2\tilde{N}+1} \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \left[ \frac{\sin\left(\pi (f_s \tilde{T}_0 - k)\right) \cos\left(\frac{2\pi \tilde{N}}{2\tilde{N}+1} (f_s \tilde{T}_0 - k)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2\tilde{N}+1} (f_s \tilde{T}_0 - k)\right)} - \right. \\
&\left. - \frac{\sin\left(\pi (f_s \tilde{T}_0 + k)\right) \cos\left(\frac{2\pi \tilde{N}}{2\tilde{N}+1} (f_s \tilde{T}_0 + k)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2\tilde{N}+1} (f_s \tilde{T}_0 + k)\right)} \right].
\end{aligned}$$

Обозначив, как и ранее (см. (10)),

$$f_s \tilde{T}_0 = \tilde{N}_p + \Delta \tilde{N}_p,$$

и сравнив (23) с (9), соответственно, сразу записываем окончательные выражения для вычисления значений коэффициентов тригонометрического полинома  $\tilde{a}_k, \tilde{b}_k$ , аналогичные выражениям (11):

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_0 &= \frac{1}{2(2\tilde{N}+1)} \frac{\sin(\pi \Delta \tilde{N}_p) \sin\left(\pi \Delta \tilde{N}_p - \frac{\pi(\tilde{N}_p + \Delta \tilde{N}_p)}{2\tilde{N}+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(\tilde{N}_p + \Delta \tilde{N}_p)}{2\tilde{N}+1}\right)}, \\
\tilde{a}_k &= \frac{\sin(\pi \Delta \tilde{N}_p)}{2\tilde{N}+1} \left[ \frac{\sin\left(\frac{2\pi \tilde{N}(\tilde{N}_p + k + \Delta \tilde{N}_p)}{2\tilde{N}+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(\tilde{N}_p + k + \Delta \tilde{N}_p)}{2\tilde{N}+1}\right)} + \right. \\
&\left. + \frac{\sin\left(\frac{2\pi \tilde{N} \pi(\tilde{N}_p - k + \Delta \tilde{N}_p)}{2\tilde{N}+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(\tilde{N}_p - k + \Delta \tilde{N}_p)}{2\tilde{N}+1}\right)} \right],
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\tilde{b}_k = \frac{\sin(\pi\Delta\tilde{N}_p)}{2\tilde{N}+1} \left[ \frac{\cos\left(\frac{2\pi\tilde{N}(\tilde{N}_p-k+\Delta\tilde{N}_p)}{2\tilde{N}+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(\tilde{N}_p-k+\Delta\tilde{N}_p)}{2\tilde{N}+1}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{2\pi N(\tilde{N}_p+k+\Delta\tilde{N}_p)}{2\tilde{N}+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(N_p+k+\Delta\tilde{N}_p)}{2\tilde{N}+1}\right)} \right]$$

а также выражения для среднеквадратического значения погрешности тригонометрической интерполяции:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \overline{\Delta\tilde{u}_N^2} = \frac{1}{2} + \frac{\sin^2(2\pi\Delta\tilde{N}_p)}{2\pi(N_p + \Delta N_p)} - \left[ \left( \frac{1}{2} \frac{\sin^2(\pi\Delta\tilde{N}_p)}{\pi(\tilde{N}_p + \Delta\tilde{N}_p)} \right)^2 + \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \tilde{A}_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \tilde{B}_k^2 \right] \right],$$

где

$$\sum_{k=1}^{\tilde{N}} \tilde{A}_k^2 = S_A(\tilde{N}, \tilde{N}_p, \Delta N_p) = \frac{\sin^4(\pi\Delta\tilde{N}_p)}{\pi^2} 4(\tilde{N}_p + \Delta\tilde{N}_p)^2 \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \left( \frac{1}{(\tilde{N}_p + \Delta\tilde{N}_p)^2 - k^2} \right)^2,$$

$$\sum_{k=1}^N \tilde{B}_k^2 = S_B(\tilde{N}, \tilde{N}_p, \Delta\tilde{N}_p) = \left( \frac{\sin(2\pi\Delta\tilde{N}_p)}{\pi} \right)^2 \sum_{k=1}^N \left( \frac{k}{(\tilde{N}_p + \Delta\tilde{N}_p)^2 - k^2} \right)^2$$

и выражение для вычисления оценки нижней границы погрешности тригонометрической интерполяции периодической функции  $f(t)$  при  $\tilde{N} \rightarrow \infty, \Delta N_p \neq 0$ :

$$\left[ \overline{\Delta\tilde{u}_N^2} \right]_{\min} = \frac{1}{2} + \frac{\sin^2(2\pi\Delta\tilde{N}_p)}{2\pi(\tilde{N}_p + \Delta\tilde{N}_p)} - \left( \frac{1}{2} \frac{\sin^2(\pi\Delta\tilde{N}_p)}{\pi(\tilde{N}_p + \Delta\tilde{N}_p)} \right)^2 - \frac{\pi^4}{180} \sin^2(\pi\Delta\tilde{N}_p) - \frac{\sin^2(\pi\Delta\tilde{N}_p)}{24}. \tag{25}$$

Из (25) видно, что минимальное значение погрешности тригонометрической интерполяции при  $N \rightarrow \infty, N_p \gg 1, \Delta N_p \neq 0$ , как и в предыдущем случае, оказывается зависящим от  $N_p, \Delta N_p$  и отличным от нуля.

**Заключение**

Проведен анализ погрешности тригонометрической интерполяции периодического сигнала, результаты которого свидетельствуют о том, что вне зависимости от способа увеличения числа отсчетов ДС среднеквадратическая погрешность тригонометрической интерполяции, в том случае, когда восстанавливаемая периодическая функция не удовлетворяет условиям Дирихле

( $f(0) \neq f(T_0)$ , что эквивалентно  $\Delta N_p \neq 0$ ), вопреки устойчивым представлениям стремится не к нулю, но к некоторому значению, зависящему от  $N_p, \Delta N_p$ , как в случае  $\tilde{N} \rightarrow \infty, N_p = \text{const}, \Delta N_p \neq 0$ , так и в случае  $\tilde{N} \rightarrow \infty, N_p \rightarrow \infty, \Delta N_p \neq 0$ .

Получены выражения для оценки нижней границы среднеквадратической ошибки тригонометрической интерполяции периодической функции для случаев  $\tilde{N} \rightarrow \infty, N_p = \text{const}, \Delta N_p \neq 0$  и  $\tilde{N} \rightarrow \infty, N_p \rightarrow \infty, \Delta N_p \neq 0$ .

Данные результаты, объясняют результаты численного исследования точности тригонометрической интерполяции, опубликованные авторами в [11-12].

**Приложение 1**

$$\Delta u_N^2 = \frac{1}{T_0} \int_0^{\hat{T}_0} \left[ f(t) - \left( a_0 + \sum_{k=1}^N \left[ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right] \right) \right]^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{\hat{T}_0} f^2(t) dt -$$

$$- \frac{2}{T_0} \int_0^{\hat{T}_0} f(t) \left( a_0 + \sum_{k=1}^N \left[ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right] \right) dt + \frac{1}{T_0} \int_0^{\hat{T}_0} \left( a_0 + \sum_{k=1}^N \left[ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right] \right)^2 dt.$$

Вычисляем второй интеграл в (П.1):

$$\frac{2}{T_0} \int_0^{\hat{T}_0} f(t) \left( a_0 + \sum_{k=1}^N \left[ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right] \right) dt = 2a_0\bar{f} + \sum_{k=1}^N \left[ a_k \hat{a}_k + b_k \hat{b}_k \right], \tag{П.2}$$

где  $\bar{f}, \hat{a}_k, \hat{b}_k$  определены в (19).

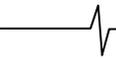
Вычисляем третий интеграл в (П.1):

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{\hat{T}_0} \left( a_0 + \sum_{k=1}^N \left[ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right] \right)^2 dt = a_0^2 + \frac{2}{T_0} \int_0^{\hat{T}_0} a_0 \sum_{k=1}^N \left[ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right] dt + \frac{1}{T_0} \int_0^{\hat{T}_0} \left[ \sum_{k=1}^N \left[ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right] \right]^2 dt \tag{П.3}$$

Вычисляем второй интеграл в (П.3):

$$\frac{2}{T_0} \int_0^{\hat{T}_0} a_0 \sum_{k=1}^N \left[ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right] dt = \frac{a_0 T_0}{\pi \hat{T}_0} \sum_{k=1}^N \left[ \frac{a_k}{k} \sin\left(\frac{2\pi \hat{T}_0}{T_0}\right) + \frac{b_k}{k} \left( 1 - \cos\left(\frac{2\pi \hat{T}_0}{T_0}\right) \right) \right]. \tag{П.4}$$

Принимая во внимание, что  $T_0/\hat{T}_0 = (2N+1)/2N$ , получаем



$$\frac{2}{\hat{T}_0} \int_0^{\hat{T}_0} a_0 \sum_{k=1}^N \left[ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right] dt = \quad (\text{П.5})$$

$$= \frac{2N+1}{2N} \frac{a_0}{\pi} \sum_{k=1}^N \left[ -\frac{a_k}{k} \sin\left(\frac{2\pi}{2N+1}\right) + \frac{2b_k}{k} \sin^2\left(\frac{\pi}{2N+1}\right) \right].$$

Вычисляем третий интеграл в (П.3):

$$\frac{1}{\hat{T}_0} \int_0^{\hat{T}_0} \left[ \sum_{k=1}^N \left[ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right] \right]^2 dt = \quad (\text{П.6})$$

$$\frac{2N+1}{2N} \left( \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left[ \sum_{k=1}^N \left[ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right] \right]^2 dt + \right.$$

$$\left. \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left[ \sum_{k=1}^N \left[ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right] \right]^2 dt \right).$$

Вычислим первый интеграл в (П.6):

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left[ \sum_{k=1}^N \left[ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right] \right]^2 dt =$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^N \left[ \left( a_m \cos\left(\frac{2\pi m}{T_0} t\right) + b_m \sin\left(\frac{2\pi m}{T_0} t\right) \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left( a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right) \right] dt =$$

$$= \sum_{k=1}^N a_k^2 \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \cos^2\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) dt + \sum_{k=1}^N b_k^2 \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin^2\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N b_k^2.$$

Здесь принято во внимание, что функции  $\cos\left(\frac{2\pi m}{T_0} t\right)$ ,  $\sin\left(\frac{2\pi m}{T_0} t\right)$ ,  $\cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right)$ ,  $\sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right)$  при  $k \neq m$  ортогональны друг другу.

Вычисляем второй интеграл в (П.6):

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left[ \sum_{k=1}^N \left[ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right] \right]^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{T_0}{2N+1} - \frac{1}{2} \frac{T_0}{4\pi k} \sin\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right) -$$

$$- \frac{T_0}{8\pi k} \left( 1 - \cos\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right) \right) + \frac{1}{2} \frac{T_0}{2N+1} + \frac{1}{2} \frac{T_0}{4\pi k} \sin\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right).$$

Таким образом,

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left[ \sum_{k=1}^N \left[ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right] \right]^2 dt =$$

$$= \sum_{k=1}^N \frac{a_k^2}{2} \left( \frac{1}{2N+1} - \frac{1}{4\pi k} \sin\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right) \right) +$$

$$- 2 \sum_{k=1}^N a_k b_k \left( \frac{1}{8\pi k} \left( 1 - \cos\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right) \right) \right) +$$

$$\sum_{k=1}^N \frac{b_k^2}{2} \left( \frac{1}{2N+1} + \frac{1}{4\pi k} \sin\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right) \right).$$

Записываем окончательное выражение для интеграла (П.6):

$$\frac{1}{\hat{T}_0} \int_0^{\hat{T}_0} \left( a_0 + \sum_{k=1}^N \left[ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right] \right)^2 dt =$$

$$a_0^2 + \frac{2N+1}{2N} \left( \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N b_k^2 \right) -$$

$$- \sum_{k=1}^N \frac{a_k^2}{2} \left( \frac{1}{2N+1} - \frac{1}{4\pi k} \sin\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right) \right) +$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^N a_k b_k \left( \frac{1}{8\pi k} \left( 1 - \cos\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right) \right) \right) -$$

$$- \sum_{k=1}^N \frac{b_k^2}{2} \left( \frac{1}{2N+1} + \frac{1}{4\pi k} \sin\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right) \right) =$$

$$\left( 1 + \frac{1}{2N(2N+1)} \right) \left( \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N b_k^2 \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^N \frac{a_k^2}{2} \left( \frac{1}{4\pi k} \sin\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right) \right) -$$

$$- \sum_{k=1}^N \frac{b_k^2}{2} \left( \frac{1}{4\pi k} \sin\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right) \right) + \quad (\text{П.7})$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^N a_k b_k \left( \frac{1}{8\pi k} \left( 1 - \cos\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right) \right) \right).$$

Подставляя (П.2), (П.3), (П.7) в (П.1) записываем окончательное выражение для вычисления среднеквадратической погрешности:

$$\Delta \bar{u}_N^2 = \bar{f}^2 + 2a_0 \bar{f} + \sum_{k=1}^N \left[ a_k \hat{a}_k + b_k \hat{b}_k \right] +$$

$$+ \left( 1 + \frac{1}{2N(2N+1)} \right) \left( \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N b_k^2 \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^N \frac{a_k^2}{2} \left( \frac{1}{4\pi k} \sin\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right) \right) - \sum_{k=1}^N \frac{b_k^2}{2} \left( \frac{1}{4\pi k} \sin\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right) \right) +$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^N a_k b_k \left( \frac{1}{8\pi k} \left( 1 - \cos\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right) \right) \right).$$

## Литература

1. Смирнов В.И. Курс высшей математики. – М.: Наука, 1974. – Т. 2. – 656 с.
2. Турецкий А.Х. Теория интерполирования в задачах. – Минск: Высшая школа, 1968. – 320 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. – М.: Наука, 1964. – Т. 2. – 463 с.
4. Гончаров В.П. Теория интерполирования и приближения функций 1954. 327 с.
5. Schmitter D., Delgado R., Unser M., Trigonometric Interpolation Kernel to Construct Deformable Shapes for User-Interactive Applications, IEEE Signal Processing Letters, Vol. 22, No. 11, November, 2015.

6. Fu D., Willson A. N., Trigonometric polynomial interpolation for timing recovery, IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, Volume: 52, Issue: 2, Feb. 2005, pp. 338-349.

7. Petra N., Willson A.N., A High-Speed and High-Accuracy Interpolator for Digital Modems, 2008 15th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems, 31 Aug. – 3 Sept. 2008.

8. Li J., Song L., Ch. Liu, The Cubic Trigonometric Automatic Interpolation Spline, IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, Volume 5, Issue: 6, November 2018, pp. 1136-1141.

9. Abbas S., Irshad M., Hussain M. Z., Adaptive image interpolation technique based on cubic trigonometric B-spline

representation, IET Image Process., 2018, Vol. 12 Issue 5, pp. 769-777.

10. Selva J., Convolution-Based Trigonometric Interpolation of Band-Limited Signals, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 56, No. 11, Nov. 2008, pp. 5465-5477.

11. Поршнев С.В., Кусайкин Д.В. Точность восстановления периодических дискретных сигналов конечной длительности с помощью тригонометрической интерполяции // Электросвязь, №7, с. 45-50, 2017.

12. Поршнев С.В., Кусайкин Д.В. Особенности восстановления периодических дискретных сигналов конечной длительности с помощью тригонометрической интерполяции // Известия высших учебных заведений. Приборостроение, №6, с. 504-512, 2017.

### **Секция 8: Системы технического зрения, искусственного интеллекта и робототехники**

Новая секция была введена вместо секции «Многомерная обработка сигналов», общие теоретические вопросы которой, связанные с многомерной фильтрацией, были переданы на секцию «Теория и методы цифровой обработки сигналов», а вопросы обработки изображений, как пример двумерной обработки, логически были отнесены к обработке изображений, расширяя ее в область технического зрения, распознавания образов, искусственного интеллекта и робототехники.

На секции обсуждались следующие актуальные научные проблемы:



– биологически подобные методы анализа видеоинформации для систем технического зрения;

– применение шрифт-преобразования для внедрения цифровых водяных знаков на изображение;

– идентификация колебательных систем в кадрах видеопоследовательности;

– структурные особенности сверточных нейронных сетей для задач распознавания изображений;

– метод повышения разрешения с использованием сверточной нейронной сети;

– интерпретация весовых коэффициентов и функций активации искусственных нейронных сетей;

– автоматический анализ эндоскопических

изображений для выявления и сегментации полипов;

– уравнения управления параметрами работы фотоприемной матрицы в прикладных телевизионных системах, адаптивных к динамике наблюдаемой сцены;

– использование нейронных сетей ALEXNET и U-NET в задаче сегментации гистологических изображений;

– использование сверточной нейронной сети SSD для детектирования патологий при эндоскопии желудка;

– редактирование шума в изображении на основе пороговой нейронной сети;

– диагностирование болезни Альцгеймера с помощью трёхмерной сверточной нейросети, основанной на архитектуре INCEPTION;

– разработка архитектуры нейронной сети с адаптивной точкой экстремума функции активации;

– адаптивная обработка сигналов в масштабируемых и реконфигурируемых мемристивных синаптических структурах для сетей искусственных импульсных нейронов;

– обзор сферических мобильных роботов;

– реализация алгоритмов технического зрения на манипуляторе, расположенного на мобильной платформе;

– обзор применения аппарата мультиагентных систем в робототехнике.

## СРАВНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ УЛУЧШЕНИЯ НИЗКОКОНТРАСТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ И ОЦЕНОК КАЧЕСТВА КОМПЛЕКСИРОВАНИЯ РАЗНОСПЕКТРАЛЬНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ ВИДЕОНАБЛЮДЕНИЯ

*Кириллов С.Н., д.т.н., профессор, зав. кафедрой РУС РГРТУ, e-mail: kirillov.lab@mail.ru;*

*Покровский П.С., к.т.н., доцент кафедры РУС РГРТУ, e-mail: paulps@list.ru;*

*Сконников П.Н., аспирант РГРТУ, e-mail: skonnikovpn@yandex.ru;*

*Бауков А.А., магистрант РГРТУ, e-mail: baukov.andrej@yandex.ru.*

## THE COMPARISON OF MULTISPECTRAL IMAGE FUSION QUALITY METRICS AND FUZZY IMAGE QUALITY IMPROVEMENT ALGORITHMS FOR VIDEO SURVEILLANCE SYSTEMS

*Kirillov S.N., Pokrovskij P.S., Skonnikov P.N., Baukov A.A.*

*Issues of enhanced vision systems implementation in digital video surveillance systems are considered. The modified Image contrast enhancement algorithm is proposed. According to the experimental comparison results, the advantages of the proposed modification over the known approaches are revealed. The values of subjective and seven objective multispectral image fusion quality assessments comparison by four different methods are obtained. The variance-weighted non-linear regression analysis has showed that prediction accuracy and monotonicity of spatial feature and modified structural similarity index are not less than 0,5 when inconsistency ratio does not exceed 2,5 %.*

**Key words:** enhanced vision, multispectral images, image quality metrics, CLAHE.

**Ключевые слова:** улучшенное видение, мультиспектральные изображения, показатели качества изображений, CLAHE.

### Введение

В задачах видеонаблюдения в сложной погодной обстановке, а также в ночное время суток, применяют мультиспектральные системы улучшенного видения. Как правило, в таких системах используются видеокамеры и сенсоры инфракрасных диапазонов: ближнего инфракрасного (NIR), коротковолнового инфракрасного (SWIR), и длинноволнового инфракрасного (LWIR). При цифровой обработке сигналов в таких системах решаются две задачи: улучшение качества изображений отдельных взятых каналов и комплексирование мультиспектральных изображений.

Решение первой задачи направлено на устранение действия статических помех (туман, дым, смог и т.п.), приводящих к снижению дальности видимости на видеоизображениях и ухудшающих различимость объектов. В таких условиях для улучшения качества видеоизображений целесообразно осуществлять увеличение контрастности. В работах [1-3] описаны известные алгоритмы улучшения контраста, которые обладают рассмотренными ниже преимуществами и недостатками.

При комплексировании изображения, поступающие с видеокамер различных диапазонов, объединяются в единый кадр, содержащий информацию о всех объектах, различимых на изображении хотя бы одного канала. Это позволяет осуществлять видеонаблюдение в любое время суток и дополнительно улучшить видимость при условии действия мешающих факторов [4].

*Рассмотрены задачи, решаемые в цифровых системах улучшенного видения в целях видеонаблюдения. Предложен модифицированный алгоритм улучшения контраста изображений. По результатам экспериментального сравнения показаны преимущества предложенной модификации над известными подходами по рассмотренным показателям качества обработанных изображений. Получены значения субъективной и семи объективных оценок качества комплексирования разномасштабных изображений четырьмя различными методами. Нелинейный весовой регрессионный анализ этих значений показал, что точность и монотонность пространственного признака и модифицированного индекса структурного сходства составляют не менее 0,5 при уровне несогласованности не более 2,5 %.*

Задачи принятия решения об используемом алгоритме комплексирования определяют актуальность сравнения и выбора наиболее адекватных объективных показателей качества результирующего изображения.

Таким образом, целью данной работы является модификация и сравнение алгоритмов улучшения качества видеоизображений для уменьшения проявления недостатков известных подходов, а также сравнение объективных показателей качества комплексирования мультиспектральных изображений.

### Модифицированный алгоритм улучшения качества низкоконтрастных изображений

Одним из широко использующихся алгоритмов повышения контрастности является алгоритм адаптивной эквализации гистограмм с ограничением (CLAHE) [1, 2]. В процессе применения данного алгоритма кадр видеоизображения разделяется на прямоугольные блоки, для каждого из которых строится гистограмма яркости. С

целью не допустить перенасыщения для каждой гистограммы ограничивается количество пикселей с одинаковым значением яркости. Превысившие установленный предел пиксели равномерно распределяются по другим значениям яркости. При этом данный предел вычисляется по формуле [2]

$$L = N_{cp} + \gamma(N_0 - N_{cp}), \quad (1)$$

где  $N_{cp}$  – число пикселей, приходящееся в среднем на одно значение яркости в гистограмме,  $N_0$  – количество пикселей в блоке,  $\gamma$  – коэффициент, определяющий ограничение гистограммы. Параметр  $\gamma$  одинаков для всех блоков изображения. Чем больше его значение, тем слабее ограничение гистограммы, и, следовательно, кадр становится более контрастным.

Далее с использованием значений новых гистограмм рассчитывается функция кумулятивного распределения [2, 5]

$$F(k) = \sum_{j=1}^k p(r_j) = \sum_{j=1}^k \frac{N_j}{N_0}, \quad (2)$$

где  $p(r_j)$  – вероятность пикселя блока исходного изображения со значением яркости  $r_j$ ,  $N_j$  – число пикселей в блоке со значением  $r_j$ ,  $k$  – уровень яркости. Согласно выражению (2), выполняется эквализация гистограмм интенсивности пикселей каждого блока, что приводит к увеличению динамического диапазона уровней яркости, в результате чего часто наблюдается повышение контрастности изображения [5]. Для уменьшения видимости границ блоков обработанного кадра применяется билинейная интерполяция [2].

Глобальный характер параметра  $\gamma$  означает повышение контрастности в том числе и на однородных участках изображения, следствием чего является значительное проявление шума и артефактов сжатия на данных участках. С целью уменьшения этого явления в работе [3] в алгоритме CLANE используется локальный параметр  $\gamma$ , который рассчитывается для каждого фрагмента обрабатываемого кадра по значению дисперсии интенсивности пикселей  $D$ , являющейся характеристикой структурированности соответствующего фрагмента. Зависимость  $\gamma(D)$ , описанная в работе [3], является монотонно возрастающей. При таком характере данной зависимости усиление контраста изображения в наиболее однородных фрагментах значительно меньше по сравнению с наиболее структурированными. Это приводит к снижению проявления шума и артефактов в монотонных областях, но является причиной осветления сильно структурированных фрагментов и появления «ореолов» вокруг объектов.

Для решения данной проблемы предлагается способ автоматического определения параметра  $\gamma$ , соответствующего степени увеличения контрастности. По результатам экспериментальных исследований установлено, что использование только характеристики структурированности блока изображения недостаточно для корректной оценки необходимого уровня повышения контрастности. Для увеличения адекватности данной

оценки целесообразным является учёт таких характеристик изображений, как цветовая насыщенность и интенсивность пикселей, а также использование модуля вектора градиента вместо дисперсии яркости пикселей в качестве характеристики структурированности кадра. По сравнению с дисперсией  $D$ , используемой в работе [3], модуль вектора градиента отличается более точной оценкой средне структурированных изображений [5, 6]. Создана база участков изображений, подверженных действию неблагоприятных факторов, понижающих контрастность (туман, дым, смог), и построены гистограммы распределений  $p$  насыщенности  $S$ , интенсивности  $I$  и модуля вектора градиента  $M$  пикселей для данных участков (рис. 1 а, в, д).

Для учёта влияния данных распределений при определении параметра  $\gamma$  выполнена аппроксимация представленных гистограмм известными распределениями с помощью метода моментов [7, 8]. При аппроксимации характеристик  $p(S)$  и  $p(I)$  однокомпонентными распределениями наблюдалось существенное отклонение от формы гистограмм, поэтому целесообразно использование смеси двух распределений для аналитического описания данных гистограмм. Аппроксимация  $p(S)$  и  $p(I)$  выполнена с помощью метода моментов для смеси  $f(x)$  двух распределений  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ , представленной в виде [8]:

$$f(x) = v \cdot f_1(x) + (1-v) \cdot f_2(x), \quad (3)$$

где  $v$  – весовой коэффициент,  $0 < v < 1$ . В соответствии с критерием согласия Пирсона [7] в качестве  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  выбраны функции плотности вероятности (ФПВ) бета-  $f_\beta(x, \alpha, \beta)$  и нормального  $f_N(x, \mu, \sigma)$  распределений соответственно, которые описываются выражениями [9]:

$$f_\beta(x, \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, & x \in [0; 1]; \\ 0, & x \notin [0; 1]; \end{cases} \quad (4)$$

$$f_N(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-(x-\mu)^2 / 2\sigma^2). \quad (5)$$

Согласно методу моментов для определения коэффициента  $v$  и параметров распределений  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu$  и  $\sigma$  смеси двух распределений [8] необходимо решить систему пяти уравнений:

$$\begin{cases} m_0 = v \int_0^1 f_\beta(x, \alpha, \beta) dx + (1-v) \int_0^1 f_N(x, \mu, \sigma) dx, \\ m_1 = v \int_0^1 x f_\beta(x, \alpha, \beta) dx + (1-v) \int_0^1 x f_N(x, \mu, \sigma) dx, \\ m_2 = v \int_0^1 x^2 f_\beta(x, \alpha, \beta) dx + (1-v) \int_0^1 x^2 f_N(x, \mu, \sigma) dx, \\ m_3 = v \int_0^1 x^3 f_\beta(x, \alpha, \beta) dx + (1-v) \int_0^1 x^3 f_N(x, \mu, \sigma) dx, \\ m_4 = v \int_0^1 x^4 f_\beta(x, \alpha, \beta) dx + (1-v) \int_0^1 x^4 f_N(x, \mu, \sigma) dx, \end{cases} \quad (6)$$

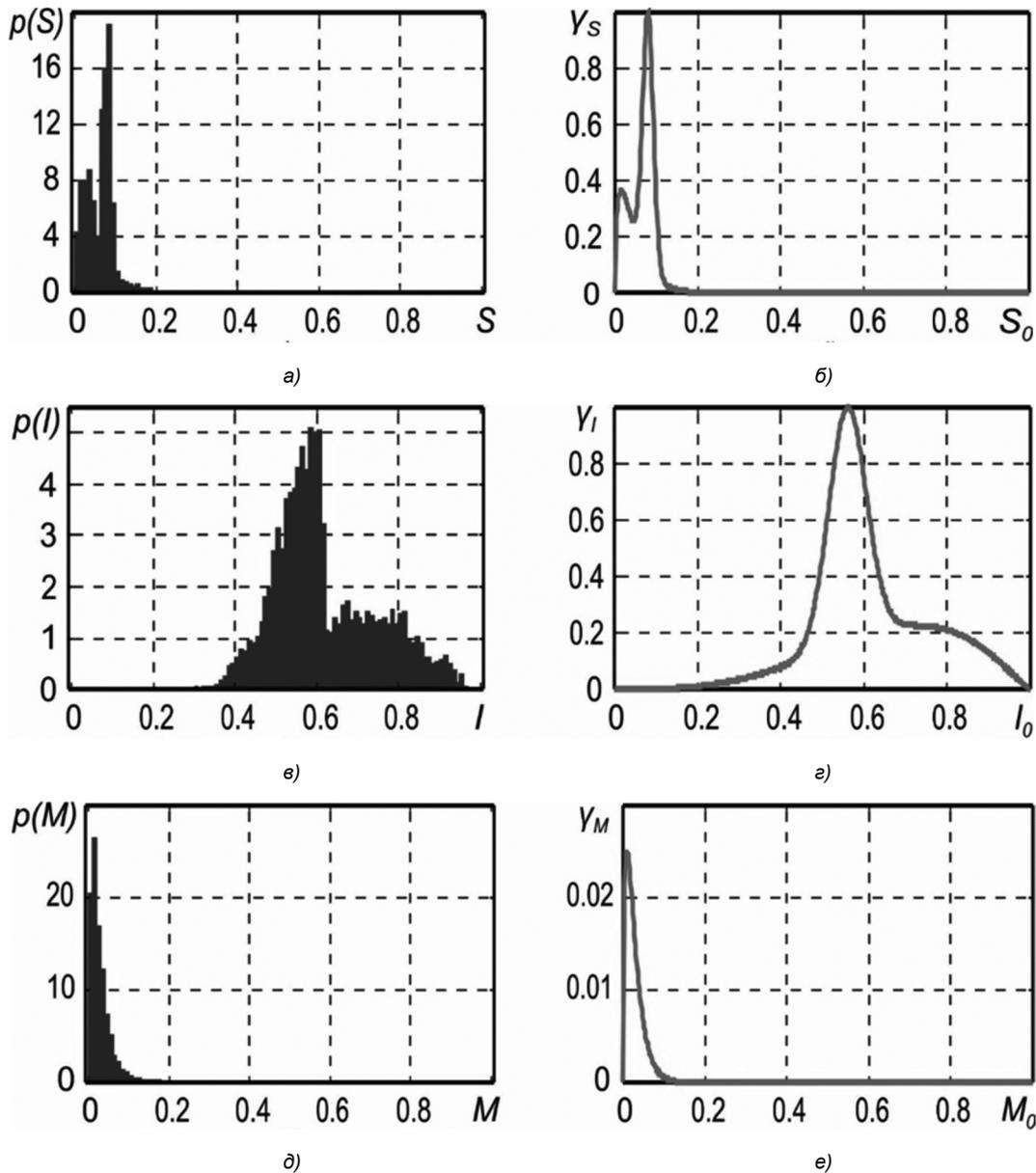


Рис. 1. Вероятностные распределения насыщенности (а), интенсивности (в) и модуля вектора градиента (д) пикселей и соответствующие зависимости параметров ограничений от средних значений этих величин (б, г, е)

где  $m_0 \dots m_4$  – начальные моменты 0-го...4-го порядков распределений  $p(S)$  и  $p(I)$ , полученных экспериментально. Данная система была решена с помощью метода наименьших квадратов [10], по результатам решения получены уравнения смесей распределений, аппроксимирующие гистограммы  $p(S)$  и  $p(I)$  соответственно:

$$f(S) = 0,43f_{\beta}(S) + 0,57f_N(S); \quad (7)$$

$$f(I) = 0,52f_{\beta}(I) + 0,48f_N(I). \quad (8)$$

При этом рассчитанные значения параметров для  $f(S)$ :  $\alpha = 1,5$ ,  $\beta = 33$ ,  $\mu = 0,08$ ,  $\sigma = 0,013$ ; для  $f(I)$ :  $\alpha = 4,5$ ,  $\beta = 2,3$ ,  $\mu = 0,56$ ,  $\sigma = 0,045$ .

Для аппроксимации гистограммы  $p(M)$  в соответствии с критерием согласия Пирсона [7] выбрана ФПВ бета-распределения  $f_{\beta}(x, \alpha, \beta)$ , параметры которой  $\alpha$  и  $\beta$  определены из решения системы уравнений

$$\begin{cases} m_1 = \int_0^1 x f_{\beta}(x, \alpha, \beta) dx, \\ m_2 = \int_0^1 x^2 f_{\beta}(x, \alpha, \beta) dx. \end{cases} \quad (9)$$

В результате решения (9):  $\alpha = 1,5$ ,  $\beta = 53$ .

На рис. 1 б, г, е представлены зависимости параметров  $\gamma_S$ ,  $\gamma_I$  и  $\gamma_M$  от средних значений насыщенности  $S_0$ , интенсивности  $I_0$  и модуля вектора градиента  $M_0$  блока изображения. Данные параметры представляют собой нормированные по максимальным значениям функции  $f(S)$ ,  $f(I)$  и  $f(M)$ , аппроксимирующие экспериментальные распределения  $p(S)$ ,  $p(I)$  и  $p(M)$ . Для увеличения контрастности участков изображения, лишь незначительно покрытых туманом или дымом и по этой причине не вошедших в базу для построения гисто-

грамм (рис. 1), целесообразно выполнить растяжение функции  $\gamma_M(M_0)$  вдоль оси абсцисс.

В разработанной модификации алгоритма CLAHE определение степени усиления контраста на том или ином участке изображения осуществляется с помощью выражения

$$\gamma(M_0, S_0, I_0) = \gamma_M \sqrt{\gamma_S \cdot \gamma_I}, \quad (10)$$

где  $\gamma(M_0, S_0, I_0)$  – полный параметр ограничения гистограмм значений пикселей блока изображения, соответствующий, так же как и в работе [3], степени повышения контрастности. Параметр  $\gamma_M$  определяет уровень ограничения гистограммы в зависимости от характеристики структурированности блока и по своему назначению соответствует параметру  $\gamma(D)$ , использованном в алгоритме [3]. Множитель  $\sqrt{\gamma_S \cdot \gamma_I}$  выполняет роль поправочного коэффициента с целью учёта информации о цветовой насыщенности и интенсивности пикселей фрагментов кадра. Мультипликативная связь  $\gamma_S$  и  $\gamma_I$  следует из формул преобразования цветовой модели «цветовой тон, насыщенность, интенсивность» (HSI) в пространство RGB.

Таким образом, в предложенной модификации алгоритма CLAHE осуществляется интеллектуальный выбор необходимой степени улучшения контраста исходя из выражения (10).

Другой особенностью предложенной модификации является использование цветового пространства HSI. В работе [3] используется цветовое пространство YCbCr. По результатам экспериментальных исследований применение этого пространства может привести к некорректной цветопередаче при обработке всех трёх каналов, а при обработке только яркостного канала (Y) – к ослаблению насыщенности и осветлению изображения. В предложенном модифицированном алгоритме используется цветовая модель HSI, при этом алгоритм применяется не только к яркостной информации (I), но и к компоненте насыщенности (S), поскольку статические помехи, как правило, приводят также к снижению насыщенности изображения. Канал цветового тона (H) обработке не подвергается. Описанная особенность модификации алгоритма CLAHE позволяет значительно улучшить передачу цветовой информации по сравнению с известными подходами. Для устранения осветления изображения используется гамма-коррекция [5].

Предложенный модифицированный алгоритм CLAHE включает следующие этапы:

- 1) преобразование исходного изображения в цветовое пространство HSI;
- 2) разделение изображений каналов S и I на прямоугольные блоки;
 

далее для каждого блока изображения осуществляется:
- 3) построение гистограмм значений пикселей в каналах S и I;
- 4) расчёт средних значений насыщенности  $S_0$  по

информации канала S, а также интенсивности  $I_0$  и модуля вектора градиента  $M_0$  по информации канала I;

5) определение параметров  $\gamma_S$ ,  $\gamma_I$  и  $\gamma_M$  в соответствии с зависимостями, представленными на рис.1 б, г, е;

6) расчёт параметра  $\gamma(M_0, S_0, I_0)$  ограничения гистограммы по формуле (10);

7) ограничение и перераспределение значений яркости в гистограммах для каналов S и I;

8) эквализация полученных гистограмм для каналов S и I;

далее для кадра в целом производится:

9) билинейная интерполяция для изображений каналов S и I с целью устранения границ блоков;

10) объединение обработанных каналов I и S с компонентой H и преобразование в модель RGB;

11) гамма-коррекция изображения.

Проведён сравнительный анализ изображений, полученных в результате обработки кадров различных видеосцен тремя алгоритмами: исходным алгоритмом (CLAHE-1) [1, 2], вариантом алгоритма CLAHE, описанным в работе [3] (CLAHE-2), и предложенной модификацией (CLAHE-M). Сравнение изображений осуществлялось по следующим показателям качества (ПК): среднеквадратической ошибке (MSE), пиковому отношению сигнал-шум (PSNR), индексу структурного сходства (SSIM) [11], качеству края (QE) [12], взаимной информации с выделением особенностей (FMI) при помощи анализа градиентов (Fast-FMI-г), дискретного косинусного преобразования (Fast-FMI-к) и вейвлет-анализа (Fast-FMI-в) [13]. Для расчёта ПК для каждого алгоритма и каждой сцены используются два изображения из базы [14] – эталонное (без статических помех) и результат обработки низкоконтрастного (под действием статических помех) изображения.

Значения ПК, соответствующие рассмотренным алгоритмам и усреднённые по различным сценам, представлены в табл. 1.

Таблица 1. Значения ПК для рассмотренных алгоритмов повышения контрастности

	CLAHE-1	CLAHE-2	CLAHE-M
MSE	0,0507	0,0531	0,0447
PSNR	13,3315	13,1144	14,0173
SSIM	0,7041	0,7165	0,8303
QE	0,3708	0,4068	0,7667
Fast-FMI-гп	0,5759	0,5739	0,6081
Fast-FMI-к	0,6010	0,5800	0,6848
Fast-FMI-в	0,5276	0,5196	0,5783

Из анализа табл. 1 следует, что применение модифицированного алгоритма сопровождается улучшением всех рассмотренных ПК по сравнению с известными алгоритмами: QE возрастает примерно в 2 раза, среднеквадратическая ошибка уменьшается на 12...16 % улучшение SSIM и PSNR составляет 16...18 % и 5...7 % соответственно в сравнении с CLAHE-1 и CLAHE-2. Также наблюдается улучшение показателей взаимной информации (Fast-FMI) на 6...18 %

## Сравнение показателей качества комплексирования

Известное в настоящее время многообразие методов комплексирования мультиспектральных изображений [15...19] определяет актуальность задачи выбора конкретного алгоритма, применяемого в системе улучшенного видения. Поскольку обработанное изображение представляется для анализа оператору, наиболее точное решение о выборе соответствующего алгоритма комплексирования может быть получено в результате проведения субъективной (экспертной) оценки. Однако, большое количество известных методов комплексирования изображений, необходимых для набора достаточной статистики, ограничивают возможность проведения такой оценки. Поэтому при выборе соответствующего алгоритма целесообразно применять объективный показатель качества комплексирования мультиспектральных изображений, значения которого наиболее идентичны результатам субъективной оценки качества.

Для выбора такого ПК составлена база, состоящая из геометрически совмещённых пар изображений  $X$ ,  $Y$  различных спектральных диапазонов, включающая 20 различных сцен.

Далее производилось комплексирование этих изображений различными методами. Поскольку на этапе выбора ПК не производится выбор алгоритма комплексирования и, как было отмечено выше, следует ограничить базу изображений, подлежащих субъективной оценке, к анализу приняты только четыре алгоритма комплексирования: оценка информативности, анализ НЧ и ВЧ составляющих [15], выделение локальных контрастов [15, 16] и модификация последнего метода, описанная в работе [20].

Затем была проведена субъективная оценка качества  $Q_0$  результатов комплексирования  $F(X, Y)$  указанными методами. При проведении этой оценки учитывались рекомендации, представленные в работе [21], причём для обеспечения сходства принципов получения субъективных  $Q_0$  и объективных  $Q_1 \div Q_7$  значений использовалась абсолютная шкала общего качества. Предметом субъективной оценки являлась различимость на комплексированном изображении  $F$  всех деталей, присутствующих хотя бы на одном из изображений  $X$  и  $Y$ .

Для сравнения с результатами субъективных оценок  $Q_0$  выбраны наиболее широко распространённые объективные оценки качества комплексирования разномасштабных изображений: метрика Пиеллы –  $Q_1$  [22], объём восприятия –  $Q_2$ , пространственный признак –  $Q_3$  [23], FAST-FMI –  $Q_4$  [13], QE –  $Q_5$  [12], MI –  $Q_6$  [24]. Кроме того, данный набор дополнен предложенным показателем качества  $Q_7$ , описанном в работе [25] и основанном на ПК SSIM [26].

В каждой из 20 анализируемых сцен определение значений оценок  $Q_k(X, Y, F)$  производилось для четырёх указанных алгоритмов комплексирования и для ис-

ходных изображений  $F = X$  и  $F = Y$ , где  $k$  – номер оценки. Необходимость получения значений  $Q_k(X, Y, X)$  и  $Q_k(X, Y, Y)$  обусловлена тем, что в некоторых ситуациях принимается решение об отсутствии необходимости комплексирования [15], и в этом случае на выход блока обработки подаётся одно из исходных изображений. Таким образом, каждая из восьми оценок качества  $Q_k$  определялась для 120 наборов изображений  $\{X, Y, F\}$ .

Сопоставление оценок  $Q_0$  и  $Q_1 \div Q_7$  производилось по методике [27], по трём критериям: точность  $M_1$ , монотонность  $M_2$  и несогласованность  $M_3$ . Для этого методом нелинейной весовой регрессии [28] по набору из 120 пар  $\{Q_k, Q_0\}_i$   $i = \overline{1, 120}$  для каждой  $k$ -й оценки была получена аппроксимация зависимости предсказанного значения  $Q_{Pk}(Q_k)$  субъективной оценки  $Q_{Pk}$  от значений  $Q_k$  кубическим полиномом. При получении аппроксимации  $Q_{Pk}(Q_k)$  каждой паре  $\{Q_k, Q_0\}_i$  ставился в соответствие весовой коэффициент  $c_i = 1/\sigma_i^2$ , где  $\sigma_i^2 = D\{Q_0(\{X, Y, F\}_i)\}$  – оценка дисперсии субъективной оценки  $Q_0$   $i$ -го набора  $\{X, Y, F\}_i$  различными лицами.

В качестве меры точности  $M_1$  ПК  $Q_k$  принималась величина весовой корреляции [27] между наборами значений  $Q_{Pk}$  и  $Q_k$ . Коэффициент ранговой корреляции Спирмена [7] между этими величинами определял монотонность  $M_2$  оценки. Для оценки несогласованности  $M_3$  ПК  $Q_k$  рассчитывалось отношение количества пар  $\{Q_k, Q_0\}_i$ , признанных «выбросами»  $I_{out}$  к общему количеству точек  $I = 120$ . При этом пара принималась относящейся к «выбросу», если выполнялось соотношение  $|R_i| > 2\sigma_0$ , где  $R_i$  – невязка  $i$ -й пары  $\{Q_k, Q_0\}_i$  [27, 28],  $\sigma_0$  – оценка среднеквадратического отклонения субъективной оценки  $Q_0$  по всем наборам изображений. Результаты сравнения ПК  $Q_1 \div Q_7$  с  $Q_0$  по критериям  $M_1 \div M_3$  представлены в табл. 2.

Таблица 2. Сопоставление субъективной и объективных оценок качества комплексирования

Показатель качества	Точность $M_1$	Монотонность $M_2$	Несогласованность $M_3$
$Q_1$	0,52	0,39	0,05
$Q_2$	0,45	0,24	0,1
$Q_3$	0,71	0,57	0,05
$Q_4$	0,11	0,11	0,1
$Q_5$	0,5	0,4	0,12
$Q_6$	0,28	0,16	0,08
$Q_7$	0,68	0,5	0,06

Анализ табл. 2 показывает, что наилучшее соответствие субъективной оценке качества комплексирования по точности и монотонности имеют ПК  $Q_3$  и  $Q_7$ . Низкие значения  $M_3$  говорят о достаточной согласованности субъективной и объективных оценок.

### Заключение

Предложен модифицированный алгоритм CLANE, использование которого приводит к улучшению рассмотренных ПК обработанных изображений по сравнению с известными алгоритмами: показатель качества края увеличивается примерно в 2 раза, среднеквадратическая ошибка уменьшается на 12...16 %, улучшение SSIM, PSNR и Fast-FMI составляет 16...18 %, 5...7 % и 6...18 % соответственно в сравнении с известными методами.

Из анализа рассчитанных значений точности, монотонности и несогласованности рассмотренных показателей качества следует, что при выборе алгоритма комплексирования разносектральных изображений для задач видеонаблюдения целесообразно использовать пространственный признак [23] и модифицированный индекс структурного сходства. [25]. Для данных показателей качества значение точности составляет не более 0,68, а монотонности – не более 0,5. При этом уровень несогласованности с субъективной оценкой не превышает 6 %.

*Опубликованные результаты получены в рамках государственного задания № 8.8445.2017/БЧ Минобрнауки на 2017-2019 гг. высшим учебным заведениям и научным организациям в сфере научной деятельности.*

### Литература

1. Zuiderveld K. Contrast limited adaptive histogram equalization // Graphics gems. 1994. Vol. 4. – P. 474–485.
2. Фисенко Т.Ю., Фисенко В.Т. Исследование и разработка методов улучшения подводных изображений // Сборник трудов X Международной конференции «Прикладная оптика – 2012». 2012. Т. 3. – С. 294–298.
3. Jia Z., Wang H., Caballero R.E., Xiong Z., Zhao J., Finn A. A two-step approach to see-through bad weather for surveillance video quality enhancement // Machine Vision and Applications. 2012. Vol. 23, № 6. – P. 1059–1082.
4. Холопов И.С. Реализация алгоритма формирования цветного изображения по сигналам монохромных видеодатчиков видимого и длинноволнового инфракрасного диапазонов в цветовом пространстве YCbCr // Компьютерная оптика. 2016. Т. 40, №2. – С. 266–274.
5. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. Изд. 3-е, испр. и доп. М.: Техносфера, 2012. – 1104 с.
6. Асатрян Д.Г. Оценивание степени размытости изображения путём анализа градиентного поля // Компьютерная оптика. 2017. Т. 41, № 6. – С. 957–962. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-6-957-962.
7. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. шк., 2003 – 479 с.

8. Исаенко О.К., Урбах В.Ю. Разделение смесей распределений вероятностей на их составляющие // Итоги науки и техн. Сер. Теор. вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет. 1976. Т. 13. – С. 37–58.
9. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985. – 640 с.
10. Levenberg K. A Method for the Solution of Certain Problems in Least Squares // Quarterly Applied Math. 2. 1944. – P. 164 – 168.
11. Wang Z., Bovik A.C., Sheikh H.R., Simoncelli E.P. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity // IEEE transactions on image processing. 2004. Vol. 13, № 4. – P. 600–612.
12. Xydeas C.S., Petrovic V. Objective image fusion performance measure // Electronics letters. 2000. Vol. 36, № 4. – P. 308-309.
13. Haghghat M., Razian M.A. Fast-FMI: non-reference image fusion metric // 2014 IEEE 8th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT). IEEE. 2014. – P. 1–3.
14. Li B., Ren W., Wang Z. RESIDE Dataset: OTS (Outdoor Training Set) [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://sites.google.com/view/reside-dehaze-datasets>. Дата доступа: 01.02.2019.
15. Инсаров В.В., Тихонова С.В., Михайлов И.И. Проблемы построения систем технического зрения, использующих комплексирование информационных каналов различных спектральных диапазонов // Информационные технологии. 2014. Приложение к № 3. – С. 1-32.
16. Инсаров В.В. и др. Формирование комплексированных телевизионно-тепловизионных изображений в системах переднего обзора летательных аппаратов // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2013. №. 4. – С. 3-10.
17. He C. et al. Multimodal medical image fusion based on IHS and PCA // Procedia Engineering. 2010. Т. 7. – С. 280-285.
18. Дрынкин В.Н., Фальков Э.Я., Царева Т.И. Формирование комбинированного изображения в двухзональной бортовой авиационно-космической системе // Механика, управление и информатика. 2012. №. 9. – С. 33-39.
19. Рубис А.Ю., Выголов О.В., Визильтер Ю.В. Морфологическое комплексирование изображений различных спектральных диапазонов // Механика, управление и информатика. 2012. №. 8. – С. 143-148.
20. Кириллов С.Н., Покровский П.С., Сконников П.Н. Алгоритм комплексирования телевизионного и инфракрасного изображений для систем улучшенного видения беспилотных летательных аппаратов. Сб. тез. докл. научно-техн. конф. «Техническое зрение в системах управления». М. 2019. – С. 32-33.

21. Орлов А. И. Экспертные оценки. Учебное пособие. М. 2002. – 31 с.

22. Piella G. A new quality metric for image fusion // Image Processing, 2003. ICIIP 2003. Proceedings. 2003 International Conference on. IEEE, 2003. Vol. 3. – P. 173.

23. Бондаренко М.А., Дрынкин В.Н. Оценка информативности комбинированных изображений в мультиспектральных системах технического зрения // Программные системы и вычислительные методы. 2016. № 1. – С. 64.

24. Aslantas V., Bendes E. A new image quality metric for image fusion: the sum of the correlations of differences // Aeu-international Journal of electronics and communications. – 2015. Vol. 69. №. 12. – P. 1890-1896.

25. Кириллов С.Н. и др. Сравнение оценок качества

комплексирования разноспектральных изображений и алгоритмы улучшения качества низкоконтрастных изображений для систем видеонаблюдения // Сборник докладов 21-й международной конференции «Цифровая обработка сигналов и её применение DSPA-2019» М. 2019. – С. 403-408.

26. Yang C. et al. A novel similarity based quality metric for image fusion // Information Fusion. 2008. Vol. 9. №. 2. – P. 156-160.

27. Tutorial I. Objective perceptual assessment of video quality: Full reference television // ITU-T Telecommunication Standardization Bureau. – 2004.

28. Seber, G. A. F., and C. J. Wild. Nonlinear Regression. Hoboken, NJ: Wiley-Interscience. 2003.

## **21-я Международная научно-техническая конференция «Цифровая обработка сигналов и её применение – DSPA'2019»**

### **АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР**

Важнейшее место в программе цифровой экономики Российской Федерации занимают вопросы развития и применения современных цифровых информационных технологий в различных отраслях промышленности, здравоохранения, науки, культуры, социальной сферы. Для успешного решения таких задач требуются опережающие фундаментальные исследования, направленные на разработку и развитие методов формирования высокоинтеллектуальных цифровых платформ, технологий накопления знаний и повышения уровня компетенции интеллектуальных систем, методов и технологий искусственного интеллекта.

Развитие современных информационных технологий характеризуется широким практическим использованием методов и техники цифровой обработки сигналов (ЦОС) – одной из самых динамичных и быстро развивающихся технологий в мире телекоммуникаций и информатизации мирового сообщества.



Отвечая поставленным целям и задачам консолидации отечественных ученых и специалистов, работающих в области передовых информационных технологий реального времени, расширения международных научных связей и содействия внедрению высоких наукоемких технологий XXI века, Российское научно-техническое общество радиотехники, электроники и связи им. А.С. Попова совместно с компанией «AUTEX.Ltd» при поддержке РФФИ и при участии Федерального агентства по промышленности РФ, Министерства образования и науки РФ, Российской секции IEEE Signal Processing Society, Института радиотехники и электроники РАН, Института проблем управления РАН, ЗАО «МНИТИ», МГТУ им. Н.Э. Баумана, МТУСИ, МАИ, МЭИ, РГРТУ и других ведущих российских вузов и организаций, провели 27-29 марта 2019 г. в ИПУ РАН 21-ю Международную научно-техническую конференцию: «Цифровая обработка сигналов и её применение – DSPA'2019». В работе конференции приняли участие свыше 200 человек из 23 городов России и стран СНГ, а также представители ряда стран дальнего зарубежья.

Работа конференции проходила по восьми секциям: «Теория сигналов и систем» (14 докладов, руководители – д.т.н., проф. Ю.С. Шинаков, д.т.н., проф. Д.С. Чирин); «Теория и методы цифровой обработки сигналов» (19 докладов, руководители – д.т.н., проф. Ю.А. Брюханов, д.т.н., проф. В.И. Джиган); «Обработка сигналов в системах

телекоммуникаций» (15 докладов, руководители – д.т.н., проф. Ю.Н. Прохоров, к.т.н., проф. Санников В.Г.); «Обработка сигналов в радиотехнических системах» (22 доклада, руководители – д.т.н., проф. В.Г. Бартенев, к.т.н., проф. В.С. Сперанский); «Обработка и передача изображений» (12 докладов, руководители – д.т.н., проф. В.П. Дворкович, д.т.н., проф., член-корр. РАН А.В. Дворкович); «Проектирование и техническая реализация систем ЦОС» (7 докладов, руководители – д.т.н., проф. В.В. Витязев, к.т.н., доцент В.Б. Штещенко); «Системы технического зрения, искусственного интеллекта и робототехники» (28 докладов, руководители – д.т.н., доцент А.Л. Приоров, д.т.н., проф. Фаворская М.Н., д.т.н., проф. М.К. Чобану). На конференции было заслушано более 120 докладов, по материалам которых изданы «Труды Конференции» в 2-томах, общим объемом 582 страницы.

В своем приветствии участников конференции Председатель Национального комитета, член-корреспондент РАН Ю.Б. Зубарев, в частности, отметил: «Сегодня мы открываем работу уже 21-й Международной Конференции «Цифровая обработка сигналов и ее применение – DSPA'2019»! Как и в предыдущие годы, начиная с 2000 года, наша Конференция проходит в стенах Института Проблем Управления РАН, любезно предоставившего нам такую возможность.

Хотелось бы особо отметить активное участие в нашей Конференции молодых ученых. Как и в предыдущие годы, по представленным результатам исследований, будет проведен конкурс среди молодых ученых, аспирантов и специалистов на лучший доклад. Вручение дипломов лауреатам конкурса состоится в день закрытия Конференции: 29 марта в 14-00, в Малом конференц-зале.

Информационно-издательскую поддержку работы Конференции обеспечивают научно-технические журналы: «Цифровая обработка сигналов», «Радиотехника», «Электросвязь» и другие издательства, принимающие непосредственное участие в работе Конференции. В частности, редакционная коллегия журнала «Цифровая обработка сигналов» планирует по материалам работы всех 8 секций Конференции подготовить тематический выпуск во втором и третьем номерах 2019 года, а журнал «Электросвязь» - тематическую подборку статей: «ЦОС в системах телекоммуникаций», в одном из номеров текущего года. Полагаю, будет целесообразно и в журнале «Радиотехника» опубликовать ряд научных статей в рамках тематического выпуска – «ЦОС в радиотехнических системах»

Уверен, что успешная работа Конференции «DSPA'2019» станет новым весомым вкладом в эффективное решение проблем цифровых информационных технологий реального времени и даст новый толчок к широкому практическому использованию методов и техники DSP в таких областях, как связь и системы управления, радиотехника и электроника, акустика и сейсмология, радиовещание и телевидение, измерительная техника и приборостроение».

На пленарном заседании, в день открытия конференции, были заслушаны 5 докладов, в которых нашли отражение вопросы развития современных информационных технологий обработки сигналов в области радиолокационных и телекоммуникационных систем, мультимедийных приложений, теории кодирования, параллельных методов вычислений, перспективной элементной базы радиоэлектроники.

В докладе д.т.н. Харламова А.А., к.ф.-м.н. Чучупала В.Я. (Институт высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН, Московский государственный лингвистический университет, Федеральный исследовательский центр Информатики и управления РАН) «Современное состояние и тенденции развития речевых технологий» рассмотрены основные направления развития речевых технологий в областях автоматического распознавания речи и фильтрации речевых сигналов. Упор сделан на существующие и ожидаемые практические решения, связанные с использованием архитектур глубоких нейросетей. Показано, что наиболее эффективная фильтрация речи использует один из двух алгоритмов подавления аддитивного шума: алгоритм NRS на основе спектрального вычитания и алгоритм PCSS на основе обработки речевого сигнала в подпространствах. Эффективность работы алгоритмов различается в зависимости от уровня мешающего шума, но мало зависит от окраски.

Доклад Кирпичникова А.П. (ИПУ РАН им. В.А. Трапезникова), Никулина В.В. (АО «Центр комплексных программ «ГАЛИТ») «Новая быстродействующая отечественная бортовая ЭВМ, как взгляд на кадровый вопрос» посвящен решению проблемы импортозамещения и возможности привлечения новых молодых кадров из университетов и технопарков. В докладе, в частности, проводится сравнение существующих и перспективных БЦВМ, а также вычислительной производительности современных интегральных схем, как зарубежных, так и отечественных. Делается вывод, что: «Для выхода из сложившейся ситуации разработчику необходимо предложить современную БЦВМ на отечественной элементной базе, лишенную установленных недостатков и пригодную при модернизации комплекса. В этом изделии должна сочетаться высокая производительность для решения задач реального времени и «дружелюбность» молодому поколению программистов, а именно: должны использоваться стандартные и привычные ему программные средства».

С большим интересом был встречен доклад специалистов из АО НПЦ «ЭЛВИС» Петричковича Я.Я., Кузнецова Д.А., Солохиной Т.В. «Когнитивные процессоры. Новые вызовы».

В докладе чл.-корр. РАН Зубарева Ю.Б. (Московский научно-исследовательский телевизионный институт), д.т.н., проф. Золотарёва В.В. (Институт космических исследований РАН), д.т.н., проф. Овечкина Г.В. (Рязанский государственный радиотехнический университет) «Теория кодирования как оптимизационная проблема декодирования вблизи границы Шеннона» обсуждаются нерешенные проблемы «классической» алгебраической теории и рассматриваются результаты исследований для основных кластеров алгоритмов декодирования, построенных на основе оптимизационной теории. Отмечаются очередные задачи развития оптимизационной теории и предлагаются методы их решения. Подчеркиваются достоинства символьных кодов и дивергентного кодирования. Отмечается особая группа алгоритмов декодирования с прямым контролем метрики. Определены основные пути развития теории кодирования на ближайшие годы и на перспективу.

---

Доклад проф. Дворковича В.П., член-корр. РАН Дворковича А.В., (Московский физико-технический институт (национальный университет)) связан с анализом проблемы внедрения отечественной мультимедийной системы РАВИС. В докладе отмечается, что: «Согласно майским Указам Президента РФ «ключевым направлением повышения конкурентоспособности отечественных информационных технологий является внедрение радиотехнических инновационных систем как приоритетного пути технологического развития, что должно быть основой работы созданного «нового» Министерства цифрового развития, связи и массовых коммуникаций РФ... Возникает только один вопрос: где же отечественные разработки, когда они будут созданы и внедрены?». В докладе перечисляются все этапы разработки и испытаний отечественной мультимедийной системы РАВИС с 2003 по 2018 годы. Последние проведенные испытания в Казани и в Ижевске показали, что система обеспечивает устойчивый беспроводной прием экстренных сообщений ГО ЧС на специальные приемные устройства РАВИС, размещаемых как в квартирах, коттеджах, так и на различных промышленных объектах без использования Интернета!

Работа отдельных секций Конференции была объединена по трем основным научным направлениям:

1. Обработка и передача информации в системах телекоммуникаций и информационно-измерительных системах (секции 1, 3, 5 и 8).

2. Теория и методы цифровой обработки сигналов. Техническая реализация систем обработки сигналов (секции 2, 7).

3. Обработка сигналов в радиотехнических системах (секции 4).

В заключительный день работы конференции по каждой секции были подведены общие итоги, а также итоги конкурса на лучшие научные доклады среди молодых ученых и специалистов и состоялось их награждение.

Следующая, 22-я Международная конференция «DSPA'2020», состоится ориентировочно в марте – апреле 2020 г. в г. Москва, ИПУ РАН.

Проведенный аналитический обзор докладов, представленных на 21-й МНТК «Цифровая обработка сигналов и её применение – DSPA'2019», позволяет сделать следующие выводы:

Российские ученые и специалисты, работающие в области цифровой обработки сигналов, вносят существенный вклад в решение актуальных проблем развития современной информатики и информационных технологий реального времени по всем направлениям фундаментальных исследований в этой области: разработка теории и методов синтеза, анализа, сжатия и распознавания сигналов, методов цифровой фильтрации и селекции сигналов, методов многоскоростной и адаптивной обработки сигналов, методов частотно-временной и пространственной обработки многомерных сигналов, теории вейвлет-преобразования и быстрых алгоритмов ЦОС, методов высокоэффективного построения многопроцессорных систем и нейрокомпьютерных систем обработки сигналов.

Успешное решение указанных проблем является сегодня решающим фактором на пути создания принципиально новых способов и технических средств построения современных систем телекоммуникаций, включая радиовещание и телевидение, сети связи и мультимедиа; радиотехнических и информационно-измерительных систем, систем управления, приборостроения и бытовой радиоэлектроники.

Принимая во внимание Послание президента России В.В. Путина Федеральному собранию о реализации программы «цифровой экономики» Российской Федерации, Программный и Национальный комитеты, опираясь на мнение и предложения участников Конференции, отмечают необходимость формирования научно-исследовательских и научно-образовательных Центров «Цифровых информационных технологий», работающих над решением проблемы подготовки научных кадров и специалистов по информационным технологиям реального времени. Подобные Центры (научные исследовательские лаборатории) сегодня успешно работают на общественных началах (при постоянной поддержке региональных отделений РНТО РЭС им. А.С. Попова) в тех городах и на базе тех университетов, в которых накоплен достаточный потенциал для решения поставленной задачи подготовки научных и инженерных кадров. К таким университетам относятся, прежде всего: Рязанский государственный радиотехнический университет (г. Рязань), Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова (г. Ярославль), Московский технический университет связи и информатики (г. Москва), Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет (г. Санкт-Петербург), Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. М.А. Бонч-Бруевича (г. Санкт-Петербург), Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика М.Ф. Решетнева (г. Красноярск). Необходима государственная поддержка их работы!!!

В стране остро ощущается недостаточный уровень и масштаб подготовки научных и инженерных кадров по рассматриваемому направлению. Необходима реализация общегосударственной программы «Цифровые технологии обработки сигналов и изображений», включающей в себя весь комплекс вопросов, связанных как с решением актуальных научных и технических проблем информационных технологий реального времени, так и с решением вопросов эффективной подготовки научных и инженерных кадров.

Анализ проблематики проектов, поддерживаемых РФФИ (по ряду представленных докладов), показал, что рассматриваемые в них проблемы относятся к разряду наиболее актуальных в области цифровой обработки сигналов и информационных технологий реального времени, а полученные решения вносят существенный вклад в развитие отечественной и мировой науки.

Международному организационному комитету необходимо провести реорганизацию своей работы по подготовке и проведению конференции в 2020 году, направленную на увеличение числа участников, повышение уровня представляемых докладов, отвечающим в полном объеме требованиям РИНЦ и престижных зарубежных конференций, включенных в базу Scopus и Web of Science.