

ОПТИМИЗАЦИЯ МЕТОДА КВАНТОВАНИЯ ДЛЯ ВЕЙВЛЕТ-ВИДЕОКОДЕКА

Дам Чонг Нам, аспирант Московского физико-технического института (государственного университета), chong.dam@phystech.edu.

OPTIMIZATION OF QUANTIZATION METHOD FOR WAVELET-BASED VIDEO CODEC

Dam Trong Nam

This paper is dedicated to the research and development of quantization methods for wavelet-based video codec. The presented paper investigates uniform, nonlinear and entropy-constrained quantization methods and their potential applications for wavelet-based video codec Dirac. Based on analyzing the processing results of various video types using quantization methods mentioned above, the optimized quantization method for wavelet-based video codec was proposed. The output data rate for given distortion levels is reduced noticeably by using the proposed method. The processing results for various types of video show that the proposed method provides up to 4,2 % bitrate saving for low distortion level in the intra-frame coding mode, up to 9,8 % bitrate reduction for low distortion level and up to 11,2 % bitrate saving for medium (acceptable) distortion level in the inter-frame coding mode compared to the uniform quantization method implemented in this video codec.

Key words: video codec Dirac, video coding, wavelet decomposition, quantization, uniform quantization, nonlinear quantization, Lloyd-Max algorithm, entropy-constrained quantization.

Ключевые слова видеокодек Dirac, видеокодирование, вейвлет-декомпозиция, квантование, равномерное квантование, нелинейное квантование, алгоритм Ллойда-Макса, алгоритм энтропийного ограниченного квантования.

Введение

Для уменьшения визуальной и статистической избыточности в видеокодеках используется групповое кодирование кадров, основанное на их разбиении на участки и одновременном кодировании сразу группы пикселей. При групповом кодировании обычно используют преобразование исходных данных для увеличения количества незначимых коэффициентов после преобразования, которые можно отбросить без заметного изменения качества восстановленного кадра, и для декорреляции исходных данных.

После преобразования полученные коэффициенты подвергаются квантованию для уменьшения объема данных. Задача оптимального квантования коэффициентов преобразования является важной для сжатия изображений. Исследования показывают, что коэффициенты ортогонального преобразования телевизионных кадров имеют распределение, подчиняющееся либо нормальному, либо Лапласовому законам. Для этих случаев при большом количестве уровней квантования близким к оптимальному является равномерное квантование [1].

Возможен другой подход к выбору алгоритма квантования коэффициентов преобразований, связанный с учетом субъективной чувствительности глаза к различными пространственным частотам, учитывая, что при передаче более высокочастотных коэффициентов допустима большая погрешность [1]. Группой JPEG эмпирически получен ряд таблиц для квантования коэффи-

Данная статья посвящена исследованию и разработке методов квантования для вейвлет-видеокодека. В статье исследованы методы равномерного, нелинейного и энтропийного ограниченного квантования и их потенциальные применения для вейвлет-видеокодека Dirac. На основе анализа результатов обработки видео разных типов с помощью перечислительных методов квантования предложен оптимизированный метод квантования для вейвлет-видеокодека. Его применение в вейвлет-видеокодеке Dirac позволяет заметно снизить скорость выходного потока при заданном уровне искажений. Результаты обработки видео разных типов показывают, что по сравнению с методом равномерного квантования, реализованного в рассматриваемом видеокодеке, предложенный метод для режима внутрикадрового кодирования уменьшает битовую скорость до 4,2 % при низком уровне искажений, а для режима межкадрового кодирования уменьшает битовую скорость до 9,8 % при низком уровне искажений и до 11,2 % при среднем (приемлемом) уровне искажений.

циентов дискретного косинусного преобразования (ДКП), которые приняты в стандарте JPEG [1, 2].

В отличие от ДКП, применяемого на практике для квадратных блоков малого размера, что вызывает блокинг эффект на границе блоков, дискретное вейвлет-преобразование (ДВП) может применяться для всего кадра. В стандарте JPEG2000 [1, 3] для сжатия изображения коэффициенты вейвлет-преобразования разбиваются на частотные области. Для каждой области могут использоваться различные коэффициенты квантования [1].

В рассматриваемом ниже вейвлет-видеокодеке Dirac коэффициенты вейвлет-преобразования разделяются на диапазоны разных пространственных частот и квантуются простым равномерным квантованием [4, 5]. Однако, как ортогональные преобразования, коэффициенты ДВП могут квантоваться с учетом субъективной чувствительности глаза к различными пространствен-

ным частотам. Так что можно квантовать коэффициенты разных диапазонов по-разному, как в стандарте JPEG2000. Более того, имеются некоторые известные алгоритмы квантования [5-7], которые, в основном, используются в преобразовании аналогового сигнала в цифровой, откуда следует возможность их исследования для задачи сжатия видео. В связи с простотой метода квантования, реализованного в рассматриваемом видеокодеке, существует потенциальная возможность нахождения лучшего метода, который позволяет уменьшить скорость выходного потока при заданном уровне искажений, что объясняет актуальность и новизну исследуемой темы.

Цель работы – исследование и разработка оптимизированного метода квантования для вейвлет-видеокодека. Для достижения поставленных целей в работе исследованы метод равномерного квантования, реализованный в вейвлет-видеокодеке Dirac, а также методы нелинейного и энтропийного ограниченного квантования, их потенциальные применения для вейвлет-видеокодека. В этой работе предложены и реализованы некоторые методы улучшения метода квантования для видеокодека Dirac. На основе полученных результатов предложен оптимизированный метод квантования для рассматриваемого вейвлет-видеокодека.

Применение предложенного метода в вейвлет-видеокодеке Dirac позволяет заметно снизить скорость потока кодированных данных при сохранении качества восстановленного изображения для видео разных типов.

Постановка задачи

На рис. 1 показана схема вейвлет-видеокодера. В оригинальной открытой версии видеокодека Dirac, разработанного компанией BBC [4, 8], использовано двухканальное ДВП. В этот видеокодек внедрен ряд улучшений, одним из которых является замена двухканального ДВП на трехканальное ДВП [9]. Банки фильтров трехканального ДВП вычислены и протестированы для видео разных типов, и для этой работы используется оптимизированный для сжатия банк фильтров, обеспечивающий наибольшую степень сжатия при заданном качестве восстановленного видео. Однако, на данный момент рассматриваемый видеокодек использует простой метод равномерного квантования. Практической целью работы является разработка оптимизированного метода квантования в блок «Квантование» для модифицированного видеокодека Dirac (см. рис. 1).

Данная статья структурирована следующим образом. Сначала рассмотрена попытка использования особенности ДВП, заключающейся в том, что точности квантования вейвлет-коэффициентов в разных диапазонах имеют различные вклады в искажение восстановленного кадра. Далее рассмотрена возможность применения алгоритма Ллойда-Макса, обеспечивающего минимальную энергию остатка деквантования при заданном количестве уровней. В статье также рассмотрен модифицированный алгоритм Ллойда-Макса, так называемый энтропийным ограниченным квантованием. Затем, на основе анализа полученных результатов предложен оптимизированный метод квантования для рассматриваемого вейвлет-

видеокодека. Результаты обработки видео разных типов с предложенным методом квантования и сделанные выводы приведены в конце статьи.

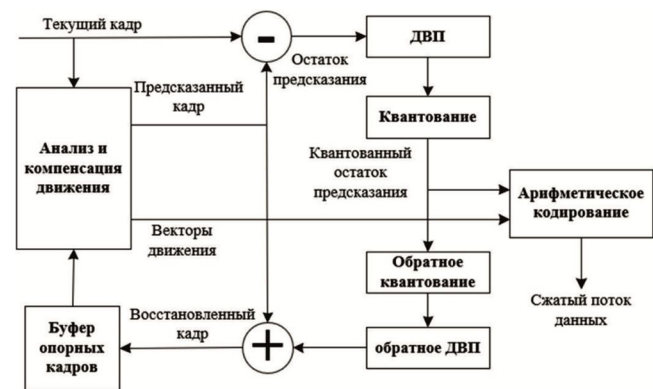


Рис. 1. Схема вейвлет-видеокодера

Использование особенности дискретного вейвлет-преобразования

Один уровень трехканального ДВП позволяет разложить одномерный сигнал на три диапазона, а двумерный сигнал – на девять диапазонов [9, 10]. На рис. 2 показано разделение двумерного сигнала на диапазоны для одного уровня трехканального вейвлет-разложения. Из рис. 2 видно, что после фильтрации большая часть энергии сигнала сосредоточится в низкочастотном диапазоне по горизонтали и по вертикали (9-LL), а оставшаяся энергия сигнала распределится между остальными диапазонами неравномерно, из чего следует различное влияние искажения вейвлет-коэффициентов разных диапазонов на восстановленный сигнал.

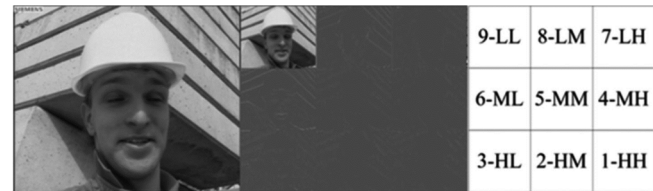


Рис. 2. Разделение сигнала на диапазоны с помощью трехканального вейвлет-разложения для первого уровня

Целью этого раздела является нахождение оптимального шага для каждого диапазона на каждом участке RD кривой (rate-distortion curve, кривая зависимости уровня искажений от скорости выходного потока). Для этого проводится один уровень трехканального вейвлет-разложения. Сначала диапазон (9-LL) не квантуется, так как далее этот диапазон может подвергаться трехканальному вейвлет-разложению, а остальные диапазоны квантуются равномерно с индексом QF (20, 16, 12, 8, 4, 0), соответствующими шагам квантования Q (32, 16, 8, 4, 2, 1). Таким образом, получится RD кривая, соответствующая равномерному квантованию, использованному в рассматриваемом видеокодеке, и являющаяся эталонной для оценки предложенного метода (см. REF на рис. 3).

Исследование состоит в том, что для каждого диапазона отдельно (для диапазона 5-ML, например) вместо QF ставится фиксированное значение QF-band-test (20, 16, 12, 8, 4, 0), а значение QF из набора (20, 16, 12, 8, 4, 0) – для всех остальных (кроме LL), тогда получатся новые RD кривые. Если для рассматриваемого диапазона,

найдется какая-то точка, находящаяся выше эталонной кривой, то такое значение QF-band-test для этого диапазона будет использовано на соответствующем участке RD кривой. Таким образом, можно получить оптимальный шаг линейного квантования для всех диапазонов на всех участках RD кривой. Проведенный анализ показал, что результаты для всех диапазонов имеют одинаковый характер для разных видео в разных режимах. В качестве примера на рис. 3 приведены RD кривые для диапазона 6-ML для видео «city_4cif» в режиме внутрикадрового кодирования.

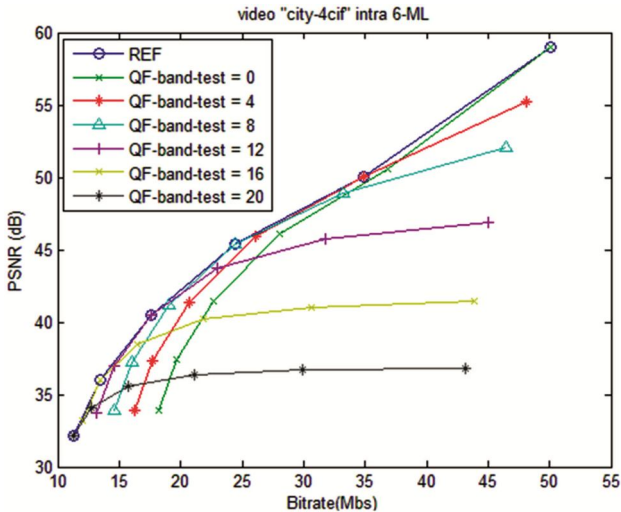


Рис. 3. RD кривые для диапазонов 6-ML для видео «city_4cif» в режиме внутрикадрового кодирования

Из рис. 3 видно, что полученные кривые всегда находятся ниже эталонной, что означает превосходство равномерного квантования по отношению к предложенному методу использования различных шагов линейного квантования для разных диапазонов. Это может быть связано с тем, что использованный банк фильтров специально вычислен с учетом минимизации ошибки равномерного квантования в разных диапазонах, т.е., использованный банк фильтров оптимизирован для метода равномерного квантования. Можно сделать вывод, что если приходится использовать линейное квантование для группы каких-либо диапазонов, то оптимальным вариантом для этих диапазонов является использование одинакового шага квантования.

Применение алгоритма Ллойда-Макса

Алгоритм Ллойда-Макса [5, 6] для заданного количества уровней (L) выполняется следующими шагами:

Шаг 1 – Задать начальный набор деквантованных значений

$$R_q, q = 0, 1, \dots, L-1$$

Шаг 2 – Вычислить уровни квантования

$$T_q = \frac{R_{q-1} + R_q}{2}, q = 1, 2, \dots, L-1$$

Шаг 3 – Вычислить новые деквантованные значения

$$R_q = \frac{\sum_{n=T_q}^{T_{q+1}} nP[n]}{\sum_{n=T_q}^{T_{q+1}} P[n]}, q = 0, 1, \dots, L-1.$$

Шаг 4 – Обновить фактор искажения

Шаг 4.1 – Обновить среднее квадратичное отклонение деквантованных и исходных данных MSE

Шаг 4.2 – Обновить фактор искажения

$$\varepsilon = \frac{MSE_{old} - MSE_{new}}{MSE_{old}}.$$

Шаг 5 – Повторять шаги 2, 3 и 4 до тех пор, пока не будет выполняться неравенство $\varepsilon < \varepsilon_{given}$.

Суть алгоритма заключается в том, что из статистики данных и заданного количества уровней квантования вычисляются оптимальные уровни квантования и деквантованные значения (центры тяжести), обеспечивающие минимальное среднее квадратичное отклонение деквантованных данных и исходных данных. Так что применение данного алгоритма гарантирует улучшение восстановленного кадра, однако при этом неизвестно, как меняется количество битов для сжатия. Целью этого раздела является нахождение RD кривой для случая с использованием алгоритма Ллойда-Макса.

Проведенный анализ показал, что для разных видео в разных режимах, результаты имеют общий характер. В качестве примера, приведены сравнения результатов применения алгоритма Ллойда-Макса (см. nonlinear) с результатами эталонного равномерного квантования (см. linear_ref) для видео «city_4cif» для режима внутрикадрового кодирования (см. рис. 4) и режима межкадрового кодирования (см. рис. 5). При этом для алгоритма Ллойда-Макса используется несколько итераций (см. 1 iter, 2 iter, 5 iter) и много итераций (см. Max PSNR), когда почти нет расхождения значений MSE между двумя последующими итерациями.

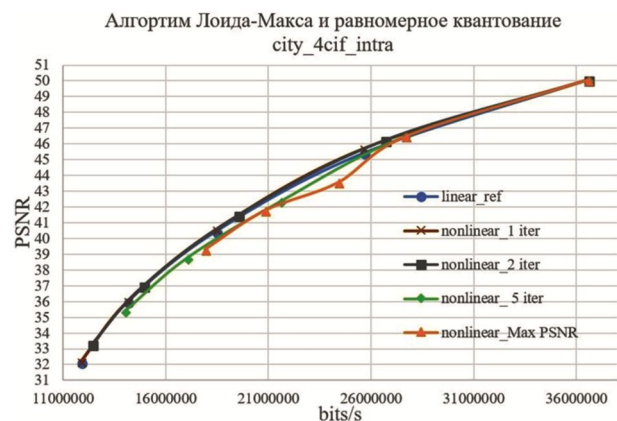


Рис. 4. Сравнение алгоритма Ллойда-Макса с равномерным квантованием для видео «city_4cif» в режиме внутрикадрового кодирования

Из рис. 4 видно, что чем больше количество итераций, тем лучше PSNR, но при этом также быстро растет количество битов, и полученные RD кривые находятся чуть ниже эталонной для режима внутрикадрового кодирования. Для режима межкадрового кодирования (см. рис. 5) получается выигрыш при нескольких первых итерациях. Для обоих режимов наблюдается нарушение монотонности RD кривой в точке, соответствующей шагу квантования $Q = 8$. Это может быть связано с тем, что для этой точки равномерное квантование настолько хорошо, что при использовании алгоритма Ллойда-Макса PSNR

мало увеличивается, однако при этом количество битов сильно увеличится, так что в итоге рассматриваемая точка сдвигается вправо много быстрее, чем вверх.

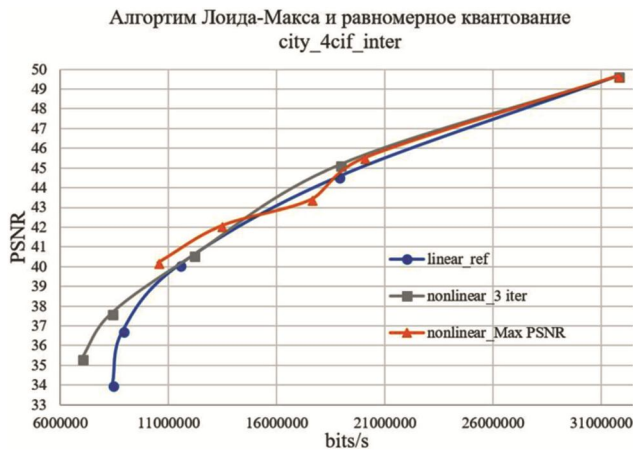


Рис. 5. Сравнение алгоритма Ллойда-Макса с равномерным квантованием для видео «city_4cif» в режиме межкадрового кодирования

Чтобы выяснить причины проявления этой ситуации, в работе проведено исследование, заключающее в том, что для каждого рассматриваемого диапазона применяется алгоритм Ллойда-Макса, а для остальных диапазонов применяется равномерное квантование. Проведенным анализом показано, что при $Q = 8$, для диапазонов (1-НН, 2-НМ, 4-МН) энтропия квантованных коэффициентов или количество битов для сжатия быстро увеличивается при использовании алгоритма Ллойда-Макса, при этом значение PSNR почти не меняется в связи с малым влиянием искажения коэффициентов в рассматриваемых диапазонах на качество восстановленного кадра. Таким образом, при $Q = 8$, наблюдается ситуация, которой можно избежать, если для рассматриваемых диапазонов применять не алгоритм Ллойда-Макса, а равномерное квантование. Аналогичный анализ для режима межкадрового сжатия также приводит к аналогичному выводу. Нужно отметить, что вывод второго раздела не позволяет квантовать коэффициенты диапазонов (1-НН, 2-НМ, 4-МН) по разным шагам линейного квантования. Таким образом, можно сделать общий вывод, что для любого видео и для обоих режимов работы лучше всего использовать равномерное квантование для диапазонов (1-НН, 2-НМ, 4-МН) и применять алгоритм нелинейного квантования Ллойда-Макса к другим диапазонам.

Применение алгоритма энтропийного ограниченного квантования

Недостаток алгоритма Ллойда-Макса заключается в том, что этот алгоритм дает оптимальный вариант квантования только со стороны энергии остатка деквантования, и не уделяет внимание объему данных, необходимому для хранения квантованных данных в сжатом виде. Для задачи сжатия данных более подходит модифицированный вариант алгоритма Ллойда-Макса, так называемый энтропийным ограниченным квантованием [7].

Алгоритм энтропийного ограниченного квантования для заданного количества уровней (L) выполняется следующими шагами:

Шаг 1 – Задать начальный набор деквантованных значений:

$$R_q, q = 0, 1, \dots, L-1.$$

Шаг 2 – Вычислить уровни квантования:

$$T_q = \frac{R_{q-1} + R_q}{2} - \lambda \frac{\log_2 P_{q-1} - \log_2 P_q}{R_{q-1} - R_q}, q = 1, 2, \dots, L-1.$$

Шаг 3 – Вычислить новые деквантованные значения:

$$R_q = \frac{\sum_{n=T_q}^{T_{q+1}} nP[n]}{\sum_{n=T_q}^{T_{q+1}} P[n]}, q = 0, 1, \dots, L-1.$$

Шаг 4 – Обновить фактор искажения:

Шаг 4.1 – Обновить среднеквадратичное отклонение деквантованных и исходных данных MSE.

Шаг 4.2 – Обновить энтропию деквантованных данных $H(R)$.

Шаг 4.3 – Обновить функцию стоимости $J = MSE + \lambda H(R)$.

Шаг 4.4 – Обновить фактор искажения

$$\varepsilon = \frac{J_{old} - J_{new}}{J_{old}}.$$

Шаг 5 – Повторять шаги 2, 3 и 4 до тех пор, пока не будет выполняться неравенство $\varepsilon < \varepsilon_{given}$.

В отличие от алгоритма Ллойда-Макса, в этом случае для контроля качества восстановленного кадра и количества нужных битов для хранения квантованных данных в сжатом виде добавляется Лагранжиан (λ) в функции стоимости (см. шаг 4.3). Тогда уровни квантования (см. шаг 2) определяются с учетом параметра λ . Трудностью в этом методе является выбор подходящего значения λ .

Для определения параметра λ при выполнении алгоритма Ллойда-Макса записывается в файл значение среднеквадратичного отклонения деквантованных и исходных данных MSE и значение энтропии деквантованных данных $H(R)$ после каждой итерации. Затем можно взять λ , равное отношению разности MSE к разности $H(R)$ при нескольких начальных итерациях алгоритма Ллойда-Макса.

Проведенный анализ показал, что алгоритм энтропийного ограниченного квантования дает примерно такой же результат, как алгоритм Ллойда-Макса для первой итерации. Кроме того, трудность с определением параметра λ трудно обойти, так что достаточно и целесообразно остановиться на использовании алгоритма Ллойда-Макса. Для применения алгоритма энтропийного ограниченного квантования в задаче сжатия видео нужны дополнительные исследования, ориентированные на выбор подходящего Лагранжиана (λ).

Предложенный метод оптимизированного квантования

На основе выводов предыдущих разделов для поставленной задачи предложен метод квантования, заключающийся в совместном использовании равномерного квантования для высокочастотных диапазонов (1-НН, 2-НМ, 4-МН) и алгоритма Ллойда-Макса для других диапазонов.

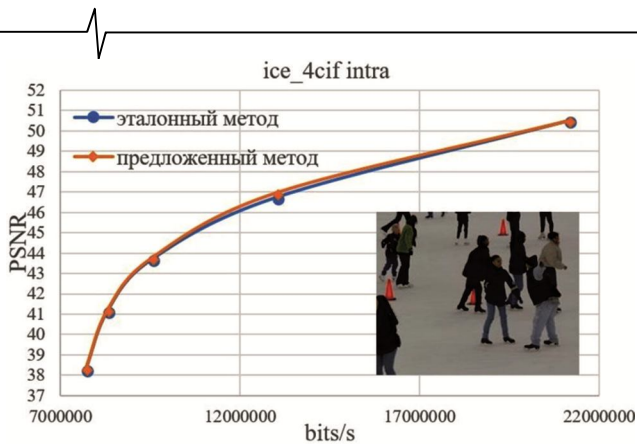


Рис. 6. Оценка предложенного метода для видео «ice_4cif» режим INTRA

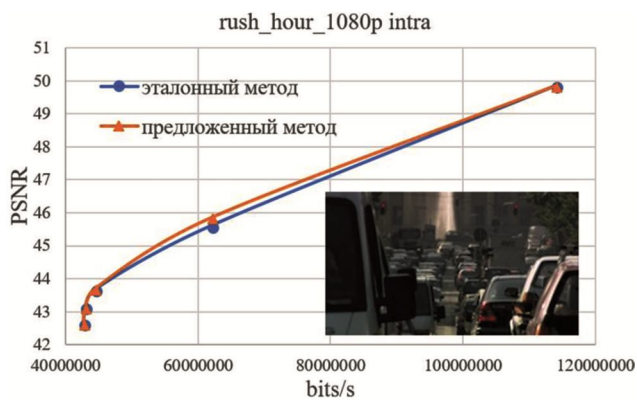


Рис. 7. Оценка предложенного метода для видео «rush_hour_1080p» режим INTRA

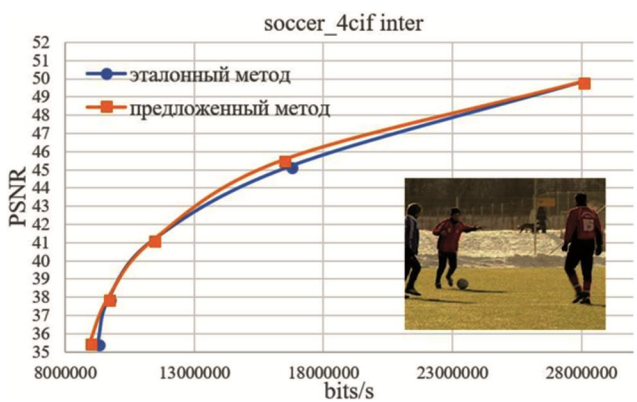


Рис. 8. Оценка предложенного метода для видео «soccer_4cif» режим INTER

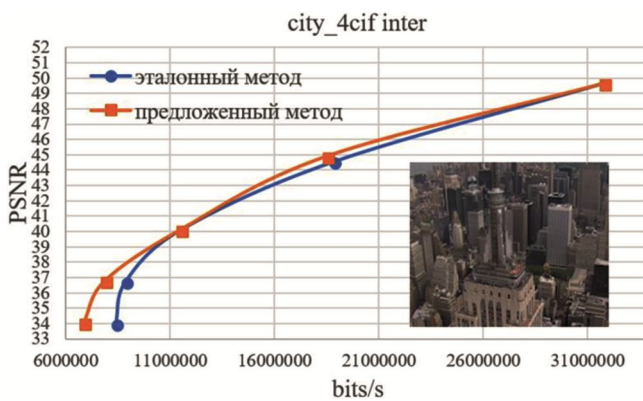


Рис. 9. Оценка предложенного метода для видео «city_4cif» режим INTER

На рис. 6-7 приведены результаты применения предложенного метода с различными видео разного типа (4cif и 1080p) для режима внутрикадрового кодирования (INTRA).

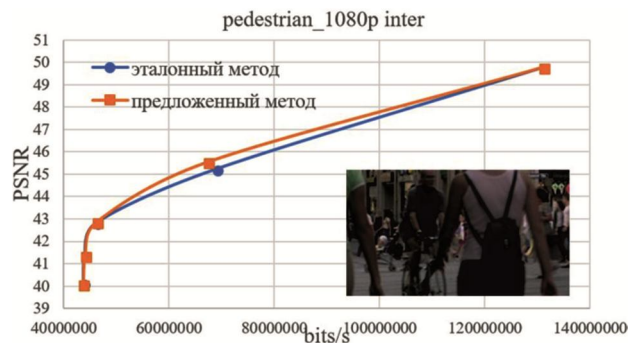


Рис. 10. Оценка предложенного метода для видео «pedestrian_1080p» режим INTER

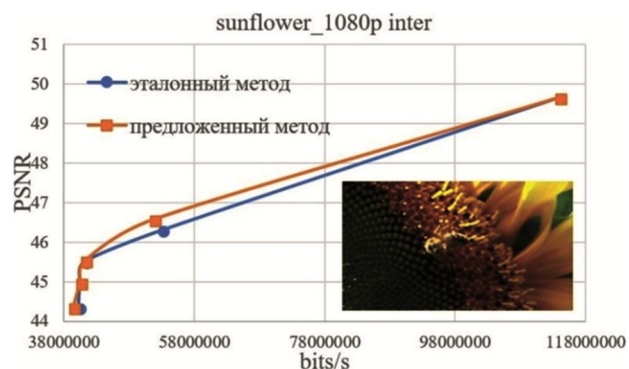


Рис. 11. Оценка предложенного метода для видео «sunflower_1080p» режим INTER

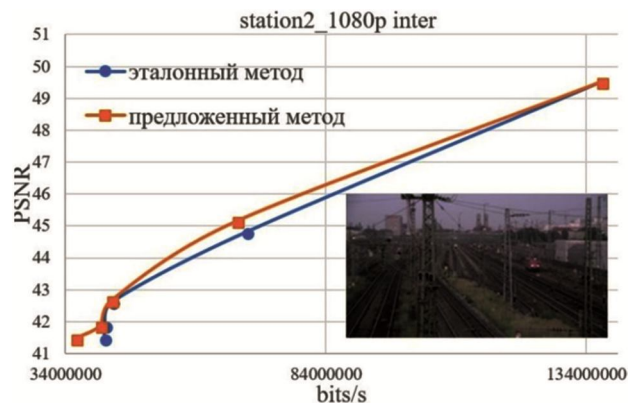


Рис. 12. Оценка предложенного метода для видео «station2_1080p» режим INTER

Из рис. 6-7 можно сделать вывод, что для режима внутрикадрового кодирования предложенный метод дает примерно такой же результат на областях высокого качества RD кривой и немного лучше для областей низкого качества RD кривой по сравнению с эталонным методом – методом равномерного квантования, реализованного в вейвлет-видеокодеке Dirac.

На рис. 8-12 приведены результаты применения предложенного метода с различными видео разного типа (4cif и 1080p) для режима межкадрового кодирования (INTER).

Из рис. 8-12 можно сделать вывод, что по сравнению с эталонным методом равномерного квантования, ре-

лизованного в вейвлет-видеокодеке Dirac, предложенный метод всегда дает заметно лучший результат и на областях низкого качества RD кривой, и для областей высокого качества RD кривой. При этом особенный интерес для приложения реального времени уделяется областям приемлемого качества. Если видео достаточно простое для кодирования и межкадровое предсказание хорошо работает, то остаточный кадр после трехканального преобразования и квантования с большим шагом состоит из много нулей, и число значимых битов составляет совсем маленький процент. Например, для видео «pedestrian_1080p» (см. рис. 10), это составляет 0,03 % для шага квантования $Q = 32$, 0,46 % для $Q = 16$, 2,35 % для $Q = 8$. Тогда в этих областях неважно, какой метод квантования использовать, предложенный метод там практически не отличается от эталонного метода (см. рис. 10, 11). Если видео сложное, то остаток предсказания будет больше и даже в областях низкого качества RD кривой, когда шаг квантования большой, предложенный метод в этом случае работает намного лучше эталонного. Из рис. 8, 9, 12 можно сделать вывод, что чем сложнее видео или чем менее точно работает межкадровое предсказание, тем лучше предложенный метод работает по сравнению с методом равномерного квантования.

Численным сравнением предложенного метода с эталонным получены следующие результаты:

- для режима внутрикадрового кодирования, на областях высокого качества RD кривой предложенный метод сэкономил до 4,2 % битовой скорости при качестве восстановленного кадра PSNR = 45 для видео «rush_hour_1080p».

- для режима межкадрового кодирования, на областях с приемлемым качеством RD кривой предложенный метод уменьшил 13,5 % битовой скорости при качестве восстановленного кадра PSNR = 41,7 для видео «station_2_1080p», 11,2 % битовой скорости при качестве восстановленного кадра PSNR = 37 для видео «city_4cif», а на областях высокого качества предложенный метод сэкономил до 9,8 % битовой скорости при качестве восстановленного кадра PSNR = 45 для видео «station_2_1080p».

Заключение

В работе исследованы разные методы квантования и их потенциальное применение для задачи сжатия видео. На основе результатов исследований предложен оптимизированный метод квантования для вейвлет-видеокодека Dirac. В ходе работы с разными видео разных типов получены следующие выводы:

- если приходится использовать линейное квантование для группы каких-то диапазонов, то наилучшим вариантом для этих диапазонов является использование равномерного квантования, т.е., использование линейного квантования с одинаковым шагом квантования для рассматриваемых диапазонов;

- алгоритм энтропийного ограниченного квантования дает примерно такой же результат, как алгоритм Ллойда-

Макса для первой итерации, так что целесообразно остановиться на использовании алгоритма Ллойда-Макса;

- предложен оптимизированный метод квантования на основе совместного использования известного метода равномерного квантования для высокочастотных диапазонов (1-НН, 2-НМ, 4-МН) и алгоритма Ллойда-Макса для других диапазонов;

- для режима внутрикадрового кодирования предложенный метод дает примерно такой же результат на областях низкого качества RD кривой и немного лучший результат для областей высокого качества RD кривой по сравнению с методом равномерного квантования, реализованного в рассматриваемом видеокодеке Dirac, конкретно, предложенный метод уменьшает до 4,2 % битовой скорости;

- для режима межкадрового кодирования предложенный метод всегда дает лучший результат по сравнению с равномерным квантованием, предложенный метод уменьшает до 11,2 % битовой скорости на участке с приемлемым качеством (PSNR = 37) RD кривой, и до 9,8 % на участке высокого качества RD кривой;

- для сложных видео, когда межкадровое предсказание не очень хорошо работает, предложенный метод намного лучше эталонного на областях с приемлемым PSNR, что показывает целесообразность использования предложенного метода по сравнению с эталонным методом.

Литература

1. Дворкович В.П., Дворкович А.В. Цифровые видеоинформационные системы (теория и практика). Москва: Техносфера, 2012. – 1008 с. ISBN 978-5-94836-336-3.
2. William B. Pennebaker, Joan L. Mitchell, JPEG still image data compression standard (3rd ed.), Springer, 1993, 291 p. ISBN 978-0-442-01272-4.
3. ITU-T Recommendation T.800 (2002-08) - Information technology – JPEG 2000 image coding system: Core coding system.
4. Dirac video codec // <https://sourceforge.net/projects/Dirac/>
5. Lloyd S. Least squares quantization in PCM, IEEE Transactions on Information Theory, IT-28, 129–137, March 1982.
6. Max J. Quantizing for minimum distortion, IRE Transactions on Information Theory, IT-6, 7–12, 1960.
7. Chou P.A., Lookabaugh T. and Gray R.M. «Entropy-constrained vector quantization». // IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. 37, pp. 31–42, Jan. 1989.
8. Jianguo Zhang Ling Shao Lei Zhang Graeme A. Jones. Intelligent video event analysis and understanding. Springer, 2010 edition. - 251 pages. ISBN 978-3-642-17554-1.
9. Gryzov G.Y., Dvorkovich A.V. «Three-Channel Wavelet Transform for Video Compression Applications». // 6th Mediterranean Conference on Embedded Computing MECO 2017, 11-15 June 2017, pp. 1-4.
10. Дворкович А.В., Дворкович В.П. Оконные функции для гармонического анализа сигналов. Москва: Техносфера, 2016. – 208 с. ISBN 987-5-94836-432-2.