

УДК 621.396.96

МИНИМИЗАЦИЯ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОГО УРОВНЯ БОКОВЫХ ЛЕПЕСТКОВ ВЗАИМНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ФАЗОКОДОМАНИПУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ В ДВУМЕРНОЙ ЗОНЕ

Зайцев Г.В., д.т.н., начальник СКБ ПАО «НПО «Алмаз», e-mail: gennady-zaytsev@yandex.ru;

Кондранина Н.С., начальник сектора ПАО «НПО «Алмаз», e-mail: kondranina.nataliya@gmail.com;

Литвинов Д.М., начальник отдела ПАО «НПО «Алмаз», e-mail: litvinov_dmitry@inbox.ru.

MISMATCHED FILTER SYNTHESIS, MINIMIZING ROOT-MEAN-SQUARE SIDELOBE LEVEL IN THE TWO-DIMENSIONAL ZONE FOR PHASE-CODED PULSE

Zaytsev G.V., Kondranina N.S., Litvinov D.M.

The paper presents method of mismatched filter synthesis, minimizing root-mean-square sidelobe level at the two-dimensional time-frequency zone for binary phase-coded pulse. Main characteristics of the filtering output are analyzed: root-mean-square and maximum sidelobe levels, loss in signal-to-noise ratio.

Key words: phase-coded pulse, mismatched filtering, minimization of sidelobe level, low correlation zone.

Ключевые слова: фазокодманипулированные сигналы, несогласованная фильтрация, минимум среднеквадратичного уровня боковых лепестков, зона с малой корреляцией

Введение

В работе рассматривается обработка фазокодманипулированных (ФКМ) сигналов с низким уровнем боковых лепестков непериодической корреляционной функции. Такие сигналы используются в радиолокации, физике, системах передачи информации, биомедицинских исследованиях и других областях науки и техники. Для определенности ниже рассматриваются радиолокационные приложения.

При использовании в радиолокации импульсный ФКМ сигнал формируется следующим образом. Прямоугольный импульс гармонического колебания разбивается на n сегментов одинаковой длительности η , а начальная фаза колебания в каждом сегменте устанавливается в соответствии с некоторым кодом (с некоторой модулирующей последовательностью). Для дальнейшего удобно ввести нормированные к длительности сегмента координаты времени и частоты:

$$t = t_0 / \eta, \quad f = f_0 \eta, \quad (1)$$

где параметры с нулевым индексом – это абсолютные координаты, а без индекса – нормированные. В нормированных координатах длительность сигнала равна n .

Во введенных обозначениях комплексная огибающая ФКМ сигнала [1,2] может быть описана следующим образом:

$$s(t) = \begin{cases} s_{i \text{ code}} & \text{при } i < t \leq i+1, \quad i = 0, 1 \dots n-1 \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}, \quad (2)$$

где $s_{i \text{ code}} = \exp(j\varphi_i)$, $-i$ -й член модулирующей последовательности $s_0 = \{s_{i \text{ code}}\}$, $i = 0, 1 \dots n-1$, φ_i – начальная фаза сигнала в i -том сегменте, $i = 0, 1 \dots n-1$.

Предложен метод синтеза оптимальной опорной последовательности для несогласованной фильтрации фазокодманипулированных сигналов, обеспечивающий минимизацию среднеквадратичного уровня боковых лепестков автокорреляционной функции в заданной двумерной зоне плоскости время – частота. Анализируются получаемые характеристики ВКФ: среднеквадратичный и максимальный уровень боковых лепестков, потери в отношении сигнал/шум.

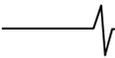
Наиболее часто в литературе рассматриваются двоичные последовательности, что обусловлено возможностями радиолокационного передатчика, однако в настоящее время появилась техническая возможность использовать более сложные виды фазовой модуляции при неизменной амплитуде. Поэтому в данной работе модулирующая последовательность считается комплексной. Условимся также, что модулирующая последовательность определена для всех индексов, при $i < 0$ и $i \geq n$ будем считать, что $s_{i \text{ code}} = 0$. Аналогичное соотношение примем и для других последовательностей. Для функций непрерывного времени аргумент будем записывать в скобках после обозначения функции, а для функций дискретного времени, или последовательностей, номер члена будем приводить в виде подстрочного индекса.

В приемной аппаратуре радиолокатора имеется заранее рассчитанная опорная функция с комплексной огибающей $x(t)$, которая также представляет собой сегментированную функцию с такой же длительностью сегмента и модулирующей последовательностью

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1}). \quad (3)$$

Однако, в отличие от излучаемого сигнала, элементы последовательности \mathbf{x} могут отличаться не только по фазе, но и по амплитуде, т.е. они могут быть произвольными комплексными числами. Их количество N может быть, вообще говоря, больше n : $N \geq n$.

Обработка сигнала в приемном устройстве сводится



к вычислению взаимной корреляционной функции (ВКФ) принимаемого и опорного сигналов в заданной области координат времени и частоты:

$$C(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)s^*(t + \tau) \exp(j 2\pi f t) dt, \quad (4)$$

где символ * означает операцию сопряжения (для векторов и матриц – сопряжение элементов и транспонирование), τ – относительный сдвиг (рассогласование) между сигналом и опорой по времени, а f – по частоте. В литературе для функции (4) используются также названия взаимная функция неопределенности, взаимная функция рассогласования и др.

Выбор опорного сигнала $x(t)$ при заданном зондирующем сигнале $s(t)$ зависит от решаемой задачи. В радиолокации общепринято максимизировать отношение сигнал/шум на выходе приемного устройства. При этом в случае аддитивного гауссовского шума оптимальный опорный сигнал определяется соотношением $x(t) = s(t)$, $N = n$, обработка сигнала называется согласованной фильтрацией, а взаимная корреляционная функция становится автокорреляционной (АКФ) [1, 2].

АКФ радиолокационных ФКМ сигналов имеет кнопочный вид: она содержит главный пик в начале координат, расположенный на пьедестале из боковых лепестков псевдослучайного уровня. Боковые лепестки АКФ являются паразитными, однако их величина не может быть сделана произвольно малой. Типовое значение имеет порядок 0,1 от величины главного пика, что не удовлетворяет требованиям многих прикладных задач. Отступая от согласованности, можно добиться снижения уровня боковых лепестков за счет уменьшения амплитуды главного лепестка и некоторого снижения выходного отношения сигнал/шум.

В данной работе рассматривается задача синтеза опорной функции, обеспечивающей подавление боковых лепестков ВКФ в заданной зоне плоскости время – частота. Подобная задача возникает, например, при сопровождении объектов на фоне мощных сосредоточенных мешающих отражений. При этом для простоты будем рассматривать, в основном, прямоугольную зону, хотя описываемый метод справедлив для зоны произвольной формы. Граничные координаты прямоугольной зоны обозначим символами $t_{beg}, t_{end}, f_{beg}, f_{end}$.

Критерием оптимальности опорной функции, используемым в данной работе, является максимум отношения энергии главного максимума ВКФ к средней энергии боковых лепестков в заданной зоне:

$$Q = \frac{|C(0, 0)|^2}{M \left\{ \int_{f_{beg}}^{f_{end}} \int_{t_{beg}}^{t_{end}} |C(\tau, f)|^2 dt df \right\}}, \quad (5)$$

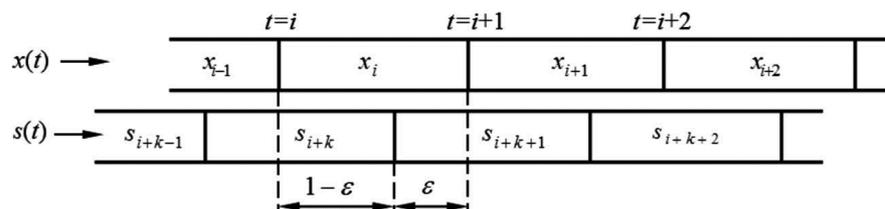


Рис. 1. Взаимное положение сигнала и опоры

где $M\{\}$ – оператор усреднения.

Проблема понижения уровня боковых лепестков ФКМ сигнала довольно часто обсуждается в литературе (см., например, [1, 2, 3, 6]). Однако в большинстве случаев рассматривается одномерная задача снижения лепестков на временной оси. Двумерная задача кратко описана в [3], где указан один из возможных методов ее решения. Однако результаты, получаемые с помощью этого метода, неудовлетворительны для радиолокационных применений в связи с возникающими энергетическими потерями значительной величины.

Синтез опорной последовательности

Рассмотрим выражение для ВКФ (4). На рис. 1 условно показаны сигнал $s(t)$ и опора $x(t)$, разделенные на сегменты и задержанные между собой на некоторое время τ . Выделим целую часть этой величины $\tau = k + \varepsilon$, где k – целое и $\varepsilon < 1$. Покажем, что ВКФ $C(\tau, f)$ при нецелом τ можно представить в виде комбинации ВКФ $C(k, f)$ и $C(k+1, f)$.

Представим $C(\tau, f)$ в виде суммы интегралов по отрезкам, на которых сигнал $s(t)$ и опора $x(t)$ являются постоянными:

$$C(\tau, f) = \sum_i x_i \left[s_{i+k}^* \int_i^{i+1-\varepsilon} \exp(j 2\pi f t) dt + s_{i+k+1}^* \int_{i+1-\varepsilon}^{i+1} \exp(j 2\pi f t) dt \right]. \quad (6)$$

Индекс суммирования в сумме пробегает все значения от ∞ до $-\infty$, при выходе за границы ненулевой области сигнал и опора по соглашению считаются нулевыми.

Интегралы, входящие в (6), легко вычисляются:

$$\int_a^b \exp(j 2\pi f t) dt = (b - a) \frac{\sin[\pi f (b - a)]}{\pi f (b - a)} \exp[j \pi f (a + b)]. \quad (7)$$

Используя (7), из (6) нетрудно получить

$$C(k + \varepsilon, f) = (1 - \varepsilon) \frac{\sin[\pi f (1 - \varepsilon)]}{\pi f (1 - \varepsilon)} \exp[j \pi f (1 - \varepsilon)] \times \sum_i x_i s_{i+k}^* \exp(j 2\pi f i) + \varepsilon \frac{\sin(\pi f \varepsilon)}{\pi f \varepsilon} \exp[j \pi f (2 - \varepsilon)] \sum_i x_i s_{i+k+1}^* \exp[j 2\pi f i]. \quad (8)$$

В частности, при $\varepsilon = 0$ из (8) получаем выражение для ВКФ при целочисленных сдвигах

$$C(k, f) = \frac{\sin[\pi f]}{\pi f} \exp[j\pi f] \sum_i x_i s_{i+k}^* \exp(j2\pi f i). \quad (9)$$

Введем обозначения для множителей перед суммами в (8):

$$\alpha(\varepsilon, f) = \frac{\sin[\pi f(1-\varepsilon)]}{\pi f(1-\varepsilon)} \exp[j\pi f(1-\varepsilon)],$$

$$\beta(\varepsilon, f) = \frac{\sin(\pi f \varepsilon)}{\pi f \varepsilon} \exp[j\pi f(2-\varepsilon)]. \quad (10)$$

Тогда выражение (8) можно представить в более компактном виде:

$$C(k+\varepsilon, f) = (1-\varepsilon)\alpha(\varepsilon, f) \sum_i x_i s_{i+k}^* \exp(j2\pi f i) + \varepsilon \beta(\varepsilon, f) \sum_i x_i s_{i+k+1}^* \exp(j2\pi f i). \quad (11)$$

Выделяя из первого и второго слагаемых формулы (11) множители $C(k, f)$ и $C(k+1, f)$ соответственно, получаем

$$C(k+\varepsilon, f) = (1-\varepsilon) \frac{\alpha(\varepsilon, f)}{\alpha(0, f)} C(k, f) + \varepsilon \frac{\beta(\varepsilon, f)}{\beta(1, f)} C(k+1, f), \quad f < 1. \quad (12)$$

Условие $f < 1$ в (12) необходимо для того, чтобы слагаемые в (12) имели конечное значение. На практике это условие, как правило, выполняется с большим запасом. Например, при работе в X диапазоне частот с сигналом, имеющим длительность сегмента $\eta = 0,5$ мкс доплеровская скорость, при которой $f = 1$ составляет 30 км/с, что в земных условиях не наблюдается. В связи с этим в дальнейшем будем считать, что $f \ll 1$, а максимальная частота на порядок меньше $f_{\max} = 0,1$. Такая частота для X диапазона соответствует доплеровской скорости 3 км/с, что существенно больше типовой скорости аэродинамических объектов.

Тогда для рассматриваемых частот диапазон изменения аргумента экспоненциальных множителей в (10) составляет не более $\pi/5$, а модуль функций $\alpha(\varepsilon, f)$ и $\beta(\varepsilon, f)$, как нетрудно проверить, изменяется в диапазоне 1-0,9. Следовательно, модуль дробей в (12) также изменяется незначительно:

$$1 < |\alpha(\varepsilon, f) / \alpha(0, f)|, |\beta(\varepsilon, f) / \beta(1, f)| < 1,11. \quad (13)$$

При $f = 0$ из (12) и (10) имеем

$$C(k+\varepsilon, 0) = (1-\varepsilon)C(k, 0) + \varepsilon C(k+1, 0), \quad (14)$$

откуда следует, что при нулевой частоте f ВКФ при нецелых сдвигах определяется прямой линией, соединяющей значения для ближайших целых сдвигов. Поэтому экстремумы модуля функции (14) достигаются при целых значениях сдвигов. Следовательно, при $f = 0$ уменьшение уровня боковых лепестков ВКФ для целочисленных сдвигов приводит к понижению лепестков и при нецелых сдвигах.

Этот вывод в первом приближении остается справедливым и для ненулевых f в рассматриваемом диапазоне, так как при этом к обоим слагаемым в формуле

(12) добавляются поправочные множители с небольшим значением фазы и амплитуды. Поэтому задача минимизация интеграла по времени $\int_{t_{beg}}^{t_{end}} |C(t, f)|^2 dt$ в (5) близка к задаче минимизации суммы квадратов модулей ВКФ для целочисленных точек на отрезке $[t_{beg}, t_{end}]$. Такая модификация задачи приводит к ее упрощению, не сильно сказываясь на результате, поэтому в дальнейшем будем вместо (5) минимизировать функцию

$$Q = \frac{|C(0, 0)|^2}{M \left\{ \sum_{k=k_1}^{k_2} \int_{f_{beg}}^{f_{end}} |C(k, f)|^2 df \right\}}, \quad (15)$$

где k_1, k_1+1, \dots, k_2 , – целочисленные значения времени на отрезке $[t_{beg}, t_{end}]$.

Наиболее простой способ оценки интеграла в (15) состоит в суммировании подынтегральной функции в ряде равноотстоящих точек с интервалом δ по частоте: $f_m = m\delta$. Пусть такие точки попадают в отрезок $f_m \in [f_{beg}, f_{end}]$ для индексов m_1, m_1+1, \dots, m_2 . Тогда вместо (15) получаем:

$$Q \approx \frac{|C(0, 0)|^2}{G \sum_{k=k_1}^{k_2} \sum_{m=m_1}^{m_2} |C(k, f_m)|^2}, \quad (16)$$

где $G = (m_2 - m_1 + 1)(k_2 - k_1 + 1)$ – число слагаемых в знаменателе (16).

Величина δ влияет на точность оценки интеграла. Чем меньше этот параметр, тем точнее оценка, и тем большего уровня подавления можно достичь. Однако чем меньше величина δ , тем больше число точек, контролируемых при синтезе опорной последовательности, и тем больше потери в отношении сигнал/шум.

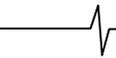
Преобразуем выражение (16). Так как в эту формулу входят значения ВКФ только при целочисленных сдвигах по времени, то вместо анализа непрерывных сигнала и опоры достаточно рассмотреть ВКФ дискретных последовательностей (2) и (3).

Для краткой записи вычислений в матричном виде дополним последовательность s_0 нулями до длины N . В данной работе будем использовать симметричное расположение дополнительных нулей относительно середины последовательности, так как асимметрия приводит к ухудшению исследуемых характеристик [3, 4]. Обозначим число нулей в начале и конце последовательности символом μ . Тогда общая длина равна $N = n + 2\mu$. Обозначим такую последовательность той же буквой, что и исходную, но без нулевого индекса:

$$s(\mu) = (0, 0, \dots, 0, s_{0 \text{ code}}, s_{1 \text{ code}}, \dots, s_{n-1 \text{ code}}, 0, 0, \dots, 0) = \{s_i\}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \quad (17)$$

Аргумент μ этой последовательности для краткости будем опускать, если приводимые выражения справедливы при любом μ или если значение индекса очевидно из контекста.

Запишем выражение для ВКФ (9) в точках, входящих в (16):



$$C(k, f_m) = \frac{\sin[\pi f_m]}{\pi f_m} \exp[j\pi f_m] \times \sum_{i=0}^{N-1} x_i \exp(j2\pi f_m i) s_{i+k}^* \quad (18)$$

Индекс k ненулевых элементов ВКФ (18) принадлежит множеству $\Omega = \{-(n+\mu-1), -(n+\mu-1)+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, n+\mu-1\}$.

Сумму в (18) можно представить в матричном виде:

$$\sum_{i=0}^{N-1} x_i \exp(j2\pi f_m i) s_{i+k}^* = \mathbf{x} \mathbf{E}(f_m) \mathbf{D}_k \mathbf{s}^*, \quad (19)$$

где $\mathbf{E}(f_m)$ – диагональная матрица с элементами на главной диагонали

$$e_{ii} = \exp(j2\pi f_m i), \quad (20)$$

а \mathbf{D}_k – $N \times N$ матрица сдвига последующего за ней вектор-столбца на k элементов вверх при неотрицательном k :

$$\mathbf{D}_k = \begin{pmatrix} \overbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}^{k+1} \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ \dots \ 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ \dots \ 0 \end{pmatrix}, \quad k \geq 0,$$

и на k элементов вниз при отрицательном k :

$$\mathbf{D}_{-k} = \mathbf{D}_k^T, \quad k > 0.$$

Тогда квадрат модуля ВКФ (18), входящий в (16), может быть представлен в виде

$$|C(k, f_m)|^2 = u(f_m) \mathbf{x} \mathbf{E}(f_m) \mathbf{D}_k \mathbf{s}^* \mathbf{s} \mathbf{D}_k^* \mathbf{E}^*(f_m) \mathbf{x}^*, \quad (21)$$

где $u(f_m) = \left[\frac{\sin[\pi f_m]}{2\pi f_m} \right]^2$, а сумма в знаменателе (16)

приобретает вид

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} \sum_{m=m_1}^{m_2} |C(k, f_m)|^2 = \mathbf{x} \mathbf{R} \mathbf{x}^*,$$

где матрица \mathbf{R} не зависит от опорной последовательности \mathbf{x} и определяется выражением

$$\mathbf{R} = \sum_{k=k_1}^{k_2} \sum_{m=m_1}^{m_2} u(f_m) \mathbf{E}(f_m) \mathbf{D}_k \mathbf{s}^* \mathbf{s} \mathbf{D}_k^* \mathbf{E}^*(f_m), \quad (22)$$

или, меняя порядок суммирования:

$$\mathbf{R} = \sum_{m=m_1}^{m_2} u(f_m) \mathbf{E}(f_m) \left\{ \sum_{k=k_1}^{k_2} \mathbf{D}_k \mathbf{s}^* \mathbf{s} \mathbf{D}_k^* \right\} \mathbf{E}^*(f_m). \quad (22 \text{ а})$$

Нетрудно показать, что при одновременной перестановке в (22) матриц $\mathbf{E}(f_m)$, \mathbf{D}_k и \mathbf{D}_k^* , $\mathbf{E}^*(f_m)$ результат не изменяется. Поэтому матрица (22) может быть также представлена в виде

$$\mathbf{R} = \sum_{k=k_1}^{k_2} \mathbf{D}_k \left\{ \sum_{m=m_1}^{m_2} u(f_m) \mathbf{E}(f_m) \mathbf{s}^* \mathbf{s} \mathbf{E}^*(f_m) \right\} \mathbf{D}_k^*. \quad (22 \text{ б})$$

При программном вычислении матрицы \mathbf{R} формула (22б) в некоторых случаях предпочтительнее.

Формулы (22) легко обобщаются на случай зоны подавления Z произвольной конфигурации. Будем рассматривать зону Z как произвольное множество точек

вида $(k, m\delta)$ в плоскости время-частота. Тогда, повторяя проведенные рассуждения, нетрудно показать, что в этом случае суммирование в (22) производится по всем точкам вида $(k, m\delta)$, входящим в зону Z :

$$\mathbf{R} = \sum_{(k, m\delta) \in Z} w(k, m) u(f_m) \mathbf{E}(f_m) \mathbf{D}_k \mathbf{s}^* \mathbf{s} \mathbf{D}_k^* \mathbf{E}^*(f_m). \quad (23)$$

В эту формулу для общности добавлен также положительный вес $w(k, m)$ точки $(k, m\delta)$, что позволяет при синтезе получать различные величины подавления в различных точках зоны.

При введенных обозначениях максимизируемая функция приобретает вид

$$Q = G \frac{|\mathbf{x} \mathbf{s}^*|^2}{\mathbf{x} \mathbf{R} \mathbf{x}^*}. \quad (24)$$

Для дальнейшего упрощения этой формулы необходимо, чтобы матрица \mathbf{R} была положительно определенной. Выполнение этого свойства можно обеспечить, например, следующим образом. Добавим в зону Z все точки вида $(k, 0)$, соответствующие ВКФ при нулевой частоте. Вес $w(k, 0)$ соответствующих точек в (23) примем малым, чтобы влияние этого добавления на матрицу \mathbf{R} было незначительным. Так как все добавленные боковые лепестки не могут быть равны нулю одновременно, то величина $\mathbf{x} \mathbf{R} \mathbf{x}^* > 0$ положительна для всех ненулевых векторов \mathbf{x} , и, следовательно, матрица \mathbf{R} является положительно определенной. Далее будем считать, что матрица \mathbf{R} всегда содержит с малым весом точки временной оси.

Тогда существует единственный положительно определенный квадратный корень $\mathbf{R}^{1/2}$ из матрицы \mathbf{R} ; матрицы \mathbf{R}^{-1} и $\mathbf{R}^{-1/2}$ также являются положительно определенными и удовлетворяют соотношению $\mathbf{U} = \mathbf{U}^*$ [5].

Представим числитель (16) в виде

$$|C(0, 0)|^2 = |\mathbf{x} \mathbf{s}^*|^2 = |(\mathbf{x} \mathbf{R}^{1/2})(\mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{s}^*)|^2. \quad (25)$$

Применяя к правой части (25) неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$|\mathbf{x} \mathbf{s}^*|^2 \leq (\mathbf{x} \mathbf{R} \mathbf{x}^*) (\mathbf{s} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}^*). \quad (26)$$

Подставляя это выражение в (24), имеем

$$Q \leq G \mathbf{s} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}^*. \quad (27)$$

Максимальное значение параметра (27) достигается при условии коллинеарности входящих в (25) векторов:

$$\mathbf{x} \mathbf{R}^{1/2} = a \mathbf{s} \mathbf{R}^{-1/2}, \quad (28)$$

где a – некоторый коэффициент. Так как масштабный коэффициент a в данной работе несущественен, то, полагая его равным единице, из последнего соотношения получаем формулу для вычисления оптимальной последовательности \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} = \mathbf{s} \mathbf{R}^{-1}. \quad (29)$$

В данной работе рассматриваются свойства решения (29) для прямоугольной зоны Z . Помимо граничных координат k_2, k_1, f_1, f_2 , использованных в (18), зону будем характеризовать также положением ее центра $z_0 = (z_t, z_f)$ и шириной $d_0 = (d_t, d_f)$ по координатам

время и частота. Эти параметры выражаются через граничные координаты следующим очевидным образом:

$$z_0 = [0, 5(k_2 + k_1); 0, 5(f_2 + f_1)],$$

$$d_0 = [(k_2 - k_1), (f_2 - f_1)]. \quad (30)$$

В качестве модулирующих последовательностей в данной работе рассматриваются последовательности Лежандра, являющиеся одним из лучших семейств с точки зрения параметров как АКФ, так и ВКФ [4, 6]. Последовательность Лежандра $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$ определена для простых длин $n = p$ и может быть построена следующим образом [6]. Символ z_i равен +1, если сравнение $x^2 \equiv i \pmod{p}$ имеет решение, и равен -1 в противном случае, $i = 1, 2, \dots, p-1$. Нулевой символ полагается равным +1. Модулирующая последовательность \mathbf{s}_0 получается циклическим сдвигом последовательности \mathbf{z} на $\lfloor rp \rfloor$ символов, где $r \in (0, 25; 0, 75)$, а выражение $\lfloor x \rfloor$ означает наибольшее целое, не превосходящее x . Таким образом

$$s_{i \text{ code}} = z_{(i + \lfloor rp \rfloor) \bmod p}. \quad (31)$$

Именно эти последовательности далее в тексте называются последовательностями Лежандра.

Выбор шага по частоте

Уменьшение шага по частоте δ , с одной стороны, приводит к увеличению точности оценки интеграла в (15) и уровня подавления, а с другой, – к возрастанию потерь в отношении сигнал/шум. Рассмотрим, как изменяются характеристики ВКФ при использовании оптимальной опорной последовательности (29) в зависимости от величины шага δ .

В приводимых ниже результатах используются следующие параметры ВКФ. Первый из них уже описан – это отношение Q (16) энергии главного лепестка к среднеквадратичной энергии боковых лепестков в рассматриваемой зоне подавления. Второй параметр, который будем называть подавлением, – аналогичное отношение P уровня главного лепестка к уровню максимального бокового в той же зоне. Так как эти параметры изменяются в широких пределах, то ниже они вычисляются в децибелах: $10 \log Q$ дБ и $10 \log P$ дБ.

Следующий параметр, весьма важный для радиолокационных применений, – отношение сигнал/шум на выходе алгоритма вычисления ВКФ. В случае аддитивного гауссовского шума со среднеквадратичным значением σ это отношение может быть вычислено по формуле

$$SNR(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = \frac{|c_M|^2}{\sigma^2 \sum_{k \in \Omega} |x_k|^2}. \quad (32)$$

Величина уменьшения этого отношения по сравнению со случаем согласованной фильтрации называется энергетическими потерями, или просто потерями, оценивается в децибелах и вычисляется по формуле

$$L = 10 \log[SNR(\mathbf{s}, \mathbf{s}) / SNR(\mathbf{s}, \mathbf{x})]. \quad (33)$$

Нетрудно видеть, что энергетические потери (33) не зависят от величины σ .

В приводимых ниже примерах и оценках перечисленных параметров рассматривается наиболее интересный случай, при котором длины сигнала и опоры совпадают: $n = N$.

На рис. 2 показан типичный пример поведения перечисленных параметров ВКФ как функций шага δ для сигнальной последовательности Лежандра длины $n = 139$. Расчеты выполнены для зоны с параметрами $z_0 = (20, 10/n)$, $d_0 = (6; 4/n)$. По оси абсцисс на графиках отложен двоичный логарифм шага по частоте, нормированного к характерному размеру $1/n$, на котором функция может измениться существенно. Оценка параметров подавления произведена путем вычисления ВКФ на прямоугольной сетке точек, плотность которых в 100 больше, чем при синтезе.

Параметры подавления P и Q быстро увеличиваются с уменьшением шага по частоте и достигают асимптотического уровня 120-160 дБ. Однако при этом потери в отношении сигнал/шум также значительно растут с 1 до 4 дБ. Существенно, что показанные на графике уровни подавления порядка 100 дБ и более технически недостижимы из-за различного рода неидеальностей в тракте обработки. Поэтому для снижения потерь целесообразно выбирать максимальную величину шага по частоте, обеспечивающую необходимый и реализуемый уровень подавления. В данной работе примем за целевой уровень подавления максимального бокового лепестка значение порядка 50 дБ, и все описываемые

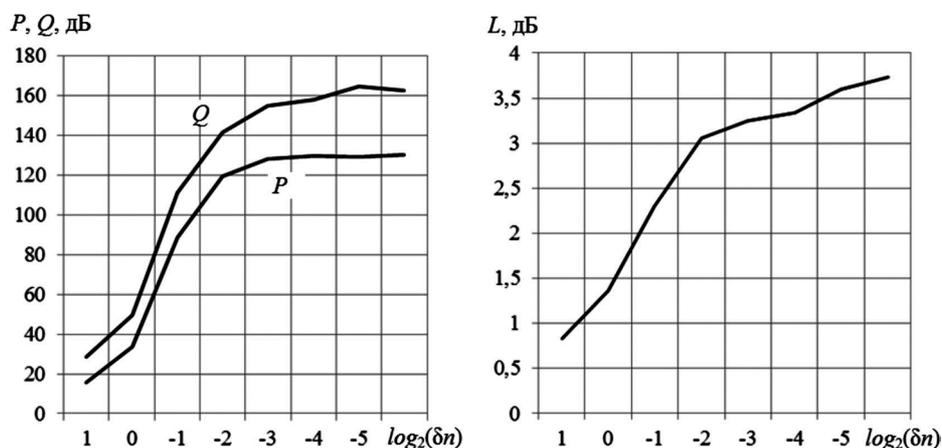


Рис. 2. Зависимость параметров ВКФ от шага по частоте

ниже результаты относятся к этому случаю. Таким образом, фактически ниже рассматриваются характеристики оптимальной ВКФ (в первую очередь, потери) при уровне лепестков в зоне подавления порядка 50 дБ. Для достижения такого уровня необходимая величина шага лежит в диапазоне $\delta = (0,5 \dots 1) / n$ (см. рис. 2).

Сделаем еще одно замечание. В работе [3] отмечено, что интеграл в (15) $\int_{f_{\text{beg}}}^{f_{\text{end}}} |C(k, f)|^2 df$ может быть вычислен аналитически. В описанном выше методе это соответствует пределу при стремлении шага по частоте к нулю $\delta \rightarrow 0$. Поэтому, как следует из приведенных выше результатов, аналитическое вычисление приводит к нереализуемому, излишне большому подавлению в зоне и неоправданно большим потерям. Более того, аналитическое вычисление интеграла не дает инструмента для изменения этих параметров. Поэтому в данной работе предлагается численная оценка интеграла, которая позволяет путем изменения величины шага по частоте δ найти компромисс между малым подавлением и большими потерями.

Зависимость потерь от площади зоны подавления

Количество переменных при синтезе опорной последовательности конечно и равно N . Поэтому очевидно, что подавить боковые лепестки возможно лишь в зоне конечной площади, в которой количество некоррелированных отсчетов не более N , а при условии малых потерь – еще меньше.

Результаты расчетов показывают, что основные параметры получаемой ВКФ слабо зависят от положения зоны подавления на плоскости и от ее конфигурации. Основным параметром, влияющим на характеристики ВКФ, является площадь зоны, которую в данной работе для случая рассмотренной выше прямоугольной зоны будем вычислять по следующей очевидной формуле:

$$S = d_t \cdot d_f = (k_2 - k_1) \cdot (f_2 - f_1). \quad (34)$$

Рассмотрим сначала зависимость потерь от площади зоны для небольших сдвигов центра зоны по оси времени относительно центра ВКФ. На рис. 3 показаны рассчитанные точки такой зависимости при $N = n$ для нескольких выбранных длин модулирующей последовательности в диапазоне $n = 70-500$, случайного положения зоны и ее ширине вдоль оси времени $z_t < 0,1N$.

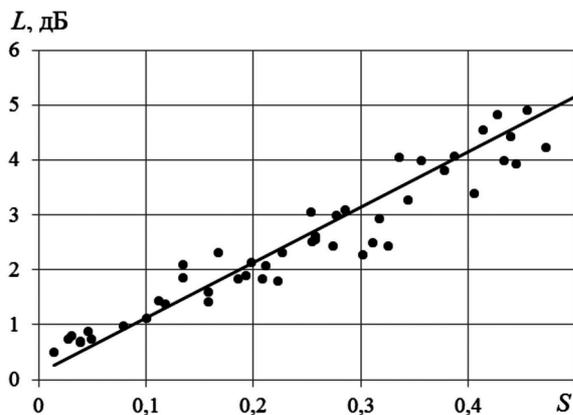


Рис. 3. Зависимость потерь от площади зоны

Опорные последовательности для рис. 3 синтезированы таким образом, чтобы уровень подавления максимального бокового лепестка ВКФ в зоне находился в диапазоне 50-60 дБ. Последовательности с таким уровнем получены путем итерационного вычисления по формуле (29) при варьировании шага δ по частоте.

Из рисунка следует, что чем больше площадь зоны, тем больше потери в отношении сигнал/шум, например, при площади $S = 0,1; 0,2; 0,3$ потери составляют примерно 1, 2 и 3 дБ соответственно. Прямая линия, соответствующая минимуму среднеквадратичного отклонения от рассчитанных точек, описывается уравнением $L = 10S + 0,1$.

Для многих практических задач такая площадь зоны в диапазоне 0,1-0,5 является вполне достаточной. Рассмотрим, например, сопровождение объекта на фоне мощной помехи от точечного помехового отражателя с известными координатами. Классическим способом сопровождения является формирование в каждом зондировании двух фильтровых каналов по каждому измерению, расставленных на величину разрешающей способности по соответствующей координате, которая составляет примерно 1 по оси времени и $1/n$ по оси частот. При обработке сигнала в описанной ситуации необходимо подавить боковые лепестки помехового отражателя в районе формируемых фильтров сопровождения рассматриваемого объекта. Площадь зоны, охватывающей эти фильтры, составляет $S = 1/n$, что при $n = 100$ соответствует величине 0,01. Ожидаемые потери при этом составляют всего 0,2 дБ.

Рассмотренный рисунок соответствует относительно малым сдвигам по времени центра зоны подавления относительно центра ВКФ. По мере увеличения этого сдвига характеристики улучшаются. Действительно, при этом уменьшается длительность отрезков сигнала и опоры, участвующих в формировании значений ВКФ в зоне подавления. Максимальная длительность такого отрезка реализуется на границе зоны, ближайшей к центру ВКФ, и имеет величину $t_{ef} = n - \min_{k_1 \leq k \leq k_2} |k|$, где k_1, k_2 – граничные координаты зоны по времени. Для зоны фиксированной ширины эта величина линейно уменьшается с ростом сдвига зоны вдоль оси времени. Следствием этого является расширение характерного размера по частоте, на котором ВКФ в зоне может измениться существенно, в соответствии с гиперболической зависимостью

$$f_{ef} = 1/t_{ef} = 1/(n - \min_{k_1 \leq k \leq k_2} k). \quad (35)$$

Поэтому число точек по частоте на фиксированном отрезке можно пропорционально уменьшить, а при фиксированном количестве точек – пропорционально увеличить площадь зоны.

Рис. 4 иллюстрирует расширение допустимой площади зоны при ее движении вдоль оси времени для последовательности Лежандра длины $n = 211$ при фиксированной ширине зоны вдоль оси времени $z_t = k_2 - k_1 = 6$ и примерно постоянных потерях. По оси абсцисс отложена величина сдвига центра зоны от середины ВКФ, по оси ординат – площадь зоны. Ширина зоны вдоль оси частот подбирается такой, чтобы уровень подавления

максимального бокового лепестка лежал в диапазоне 50-60 дБ. Наглядно видно, что до величины сдвига 160 площадь изменяется в соответствии с гиперболическим законом (35). Потери при этом остаются примерно постоянными в диапазоне 1,2-1,5 дБ.

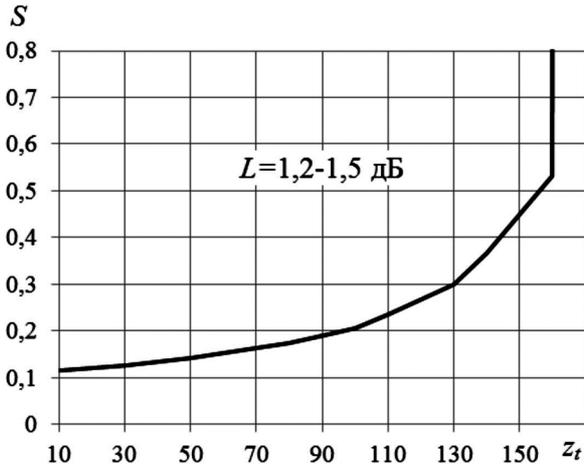


Рис. 4. Зависимость площади зоны от положения ее центра по оси времени

При дальнейшем увеличении величины сдвига синтез оптимальной опорной функции дает нулевое значение для отсчетов, участвующих в формировании членов ВКФ в зоне (на краю опорной функции). Это соответствует укорочению опоры таким образом, чтобы не было боковых лепестков в рассматриваемой зоне. При этом ширина зоны вдоль оси частот может быть расширена до произвольно большой величины, потери по-прежнему не увеличиваются, а величина подавления становится весьма значительной и ограничивается только выбранной величиной веса боковых лепестков на оси времени для регуляризации матрицы \mathbf{R} (22).

Ограничить эту величину подавления и несколько сократить потери возможно с помощью следующего искусственного приема. Большое подавление реализуется за счет того, что все боковые лепестки в знаменателе (16) близки к нулю. Чтобы этого не происходило, можно добавить к матрице \mathbf{R} (22) единичную матрицу с некоторым весом. Тогда знаменатель (24) не будет стремиться к нулю, и результирующая опорная функция будет иметь меньшее подавление и одновременно меньшие потери.

Две области подавления

Рассмотрим описанную в предыдущем пункте ситуацию сопровождения объекта на фоне мощного сигнала от точечного помехового отражателя с известными координатами. Описанная выше методика позволяет понизить боковые лепестки от мощной помехи в области сопровождаемого объекта. Однако при этом необходимо также, чтобы главный максимум ВКФ от этого объекта был хорошо различим на фоне его собственных боковых лепестков. Иными словами, боковые лепестки ВКФ вокруг главного максимума должны быть достаточно малыми.

Однако, описанная методика подавления лепестков в заданной зоне приводит к возрастанию боковых лепестков в других областях, причем тем больше, чем больше площадь зоны подавления. Например, для

$n = 211$ при возрастании площади зоны подавления от нуля до 0,5 уровень подавления боковых лепестков в зоне аналогичной конфигурации с центром в начале координат снижается от 23 до 10 дБ.

Получить необходимый уровень лепестков вокруг начала координат возможно путем добавления в зону подавления области вокруг начала координат. Рассмотрим случай, когда зона подавления содержит, как и ранее, прямоугольную область вокруг сопровождаемой цели с единичным весом, временную ось с малым весом для регуляризации матрицы \mathbf{R} (22), а также дополнительную прямоугольную область вокруг начала координат, конфигурация которой идентична конфигурации первой области подавления. Вес лепестков в этой области можно принять существенно меньшим, чем в основной области, так как обычно помеховый сигнал значительно превосходит сопровождаемый, и, следовательно, он требует большего подавления.

На рис. 5 показан пример характеристик для такого случая. Длины сигнальных последовательностей для рис. 5 выбирались случайным образом из простых чисел в диапазоне $n = 60-500$, положение зоны также выбиралось случайным образом при сдвиге центра от начала координат не более $0,5n$ и ширине $z_i \ll N$. Опорные последовательности синтезированы таким образом, чтобы уровень подавления максимального бокового лепестка ВКФ в основной зоне находился в диапазоне 50-60 дБ, а в дополнительной вокруг начала координат – 30-35 дБ. Такие последовательности получены, как и ранее, с помощью итерационного вычисления по формуле (25) путем варьирования шага между точками по частоте δ , а уровень подавления в дополнительной области – путем варьирования веса лепестков в дополнительной области.

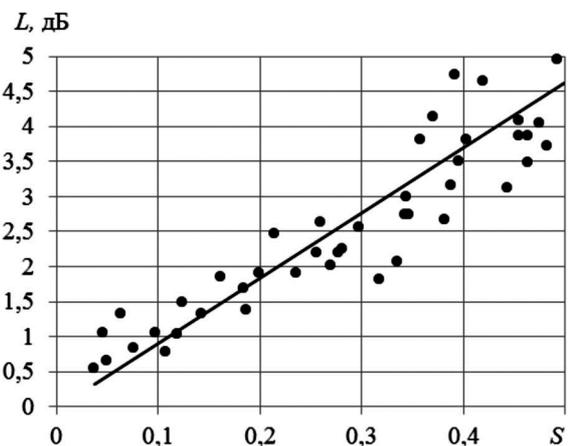


Рис. 5. Зависимость потерь от площади зоны (случай двух областей подавления)

Из рисунка следует, что, как и ранее, чем больше площадь зоны, тем больше потери в отношении сигнал/шум. Прямая линия, соответствующая минимуму среднеквадратичного отклонения от показанных точек, описывается уравнением $L = 9,3 S$, где S , как и ранее, площадь зоны, причем в данном случае зона содержит две области. Некоторое уменьшение величины коэффициента перед параметром S по сравнению со случаем одной области (рис. 3), связано с тем, что подавление в области вокруг начала координат снижено до 30-35 дБ.

Полученные характеристики удовлетворяют требованиям многих практических задач.

Заключение

В работе предложен метод синтеза оптимальных опорных последовательностей для несогласованной фильтрации ФКМ сигналов, позволяющий минимизировать среднеквадратичный уровень боковых лепестков ВКФ в заданной двумерной зоне плоскости время – частота. Метод является аналитически простым и без труда реализуется на персональном компьютере.

Фактически метод реализует минимизацию среднеквадратичного уровня лепестков на прямоугольной сетке точек в зоне подавления. Вместе с ростом плотности точек растет получаемое подавление лепестков, однако при этом растут и энергетические потери. Поэтому плотность расстановки этих точек является параметром алгоритма синтеза опорной последовательности, позволяющим найти компромисс между малым уровнем подавления лепестков и большими потерями.

В работе показано, что при увеличении площади зоны подавления лепестков энергетические потери растут. Варьирование параметров синтеза позволяет минимизировать эти потери при заданном уровне подавления боковых лепестков. При небольшой площади зоны $S = 0,1-0,3$ и уровне подавлении максимального бокового лепестка 50-60 дБ потери невелики и лежат в диапазоне 1-3 дБ. Указанная величина площади явля-

ется достаточной для решения многих практических задач.

Предложенный метод работоспособен при произвольной конфигурации зоны подавления. В частности, для зоны, содержащей две прямоугольные области подавления, основные соотношения параметров сохраняются.

Литература

1. Levanon N., Mozeson E. Radar Signals. John Wiley & Sons Inc. New Jersey. 2004. 412 p.
2. Трухачев А.А. Радиолокационные сигналы и их применения. М. Воениздат. 2005. 320 с.
3. Stoica P., Li J., and Xue M. Transmit codes and receive filters for radar. IEEE Signal Processing Magazine. Vol. 25. pp. 94–109. November 2008.
4. Зайцев Г.В., Кондранина Н.С., Литвинов Д.М. Оценка характеристик метода несогласованной фильтрации, минимизирующего интегральный уровень боковых лепестков фазокодированных сигналов. Цифровая обработка сигналов. № 1. 2017. с. 61-69.
5. Horn R.A., Johnson C.R. Matrix Analysis. Cambridge University Press. 1985. 652 p.
6. Jedwab J. A Survey of the Merit Factor Problem for Binary Sequences. Sequences and Their Applications. Proceedings of SETA 2004. ed. T. Hellesteth et al. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 3486. pp. 30–55. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. 2005.

ИНФОРМАЦИЯ

20-я Юбилейная Международная научно-техническая конференция «Цифровая обработка сигналов и её применение -DSPA'2018»

Отвечая поставленным целям и задачам консолидации отечественных ученых и специалистов, работающих в области передовых информационных технологий реального времени, расширения международных научных связей и содействия внедрению высоких наукоемких технологий XXI века, Российское научно-техническое общество радиотехники, электроники и связи имени А.С. Попова совместно с компанией «AUTEX.Ltd» при поддержке РФФИ и при участии Федерального агентства по промышленности РФ, Министерства образования и науки РФ, Российской секции IEEE Signal Processing Society, Института радиотехники и электроники РАН, Института проблем управления РАН, ЗАО «МНИТИ», МГТУ им. Н.Э. Баумана, МТУСИ, МАИ, МЭИ, РГРТУ и других ведущих российских вузов и организаций, провели 28-30 марта 2018 г. в ИПУ РАН 20-ю Международную научно-техническую конференцию: «Цифровая обработка сигналов и её применение- DSPA'2018». В работе конференции приняли участие свыше 250 человек из 23 городов России и стран СНГ, а также представители ряда стран дальнего зарубежья.

Показательна география участников. Это, помимо большинства городов Центрального региона России, такие регионы и крупные города как: Калининград, Мурманск, Красноярск, Нижний Новгород, Ульяновск, Самара, Смоленск и другие российские города.

Работа конференции проходила по восьми секциям: «Теория сигналов и систем» (30 докладов, руководители – д.т.н., профессор Ю.С. Шинаков, д.т.н., профессор Д.С. Чирин); «Теория и методы цифровой обработки сигналов» (26 докладов, руководители – д.т.н., профессор Ю.А. Брюханов, д.т.н., профессор В.И. Джиган); «Обработка сигналов в системах телекоммуникаций» (27 докладов, руководители - д.т.н., профессор Ю.Н. Прохоров, к.т.н., профессор Санников В.Г.); «Обработка сигналов в радиотехнических системах» (29 докладов, руководители – д.т.н., профессор В.Г. Бартнев, к.т.н., профессор В.С. Сперанский); «Обработка и передача изображений» (33 доклада, руководители – д.т.н., профессор В.П. Дворкович, д.т.н., профессор, член-корр. РАН А.В. Дворкович); «Проектирование и техническая реализация систем ЦОС» (14 докладов, руководители – д.т.н., профессор В.В. Витязев, к.т.н., доцент В.Б. Стешенко); «Системы технического зрения, искусственного интеллекта и робототехники» (26 докладов, руководители – д.т.н., доцент А.Л. Приоров, д.т.н., профессор Фаворская М.Н., д.т.н., профессор М.К. Чобану). На конференции было заслушано более 170 докладов, по материалам которых изданы «Труды Конференции» в 2-томах, общим объемом 868 страниц.

В своем приветствии участники конференции член международного Оргкомитета, академик РАН А.С. Бугаев, в частности, отметил: «Уверен, что успешная работа Конференции «DSPA'2018» станет новым весомым вкладом в эффективное решение проблем цифровых информационных технологий реального времени и даст новый толчок к широкому практическому использованию методов и техники DSP в таких областях, как связь и системы управления, радиотехника и электроника, акустика и сейсмология, радиовещание и телевидение, измерительная техника и приборостроение».

На пленарном заседании, в день открытия конференции, были заслушаны 6 докладов, в которых нашли отражение вопросы развития современных информационных технологий обработки сигналов в области радиолокационных и телекоммуникационных систем, мультимедийных приложений, теории кодирования, параллельных модульных вычислений, перспективной элементной базы радиоэлектроники.