

УДК 621.372.54

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ПРИ ЧИСЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ ФУНКЦИЙ

Сорока Е.З., к.т.н., главный научный сотрудник ЗАО «МНИТИ» (Московский научно-исследовательский телевизионный институт), e-mail: soroka@mniti.ru.

SOME SAMPLING THEORY APPLICATIONS TO NUMERICAL INTEGRATION OF E.Z. FUNCTIONS

Soroka E.Z.

The most popular numerical integration methods (rectangle rule, trapezoidal rule, parabolic rule, and 3/8 rule) have been examined by means of the sampling theory while the reconstruction of functions realized by low-pass filters with certain pulse responses. Verified that (under fixed number of samples) numerical integration gives exactly the same results on application of rectangle rule and trapezoidal rule, as well as under using pulse responses with some symmetry.

Key words: numerical integration, sampling theory, low-pass filter, pulse response.

Ключевые слова: дискретизация, восстановление функции по отсчетам, НЧ-фильтрация, импульсная характеристика.

Введение

Численное интегрирование функций позволяет получить значение определенного интеграла с требуемой степенью точности. Способы численного интегрирования основаны на замене интеграла конечной суммой [1–4]:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n c_k f(x_k), \quad (1)$$

где c_k – числовые коэффициенты, значения которых определяются выбранным методом интегрирования, а x_k – узлы интегрирования, причем

$$x_k \in [a, b], k = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Интервал интегрирования $[a, b]$ делится на n элементарных одинаковых отрезков, так что длина каждого (шаг отсчетов) составляет

$$h = (b - a) / k. \quad (3)$$

При этом $f(x_k)$ можно рассматривать как значения последовательных дискретных отсчетов функции $f(x)$, следующих с интервалом h , что иллюстрирует рис. 1. Здесь показана исходная функция (синим цветом) и k ее дискретных отсчетов.

Предлагается при изучении численного интегрирования использовать «радиотехнический» подход, при котором решение задачи фактически сводится к оптимальному восстановлению продискретизированной функции по отсчетам.

При этом можно использовать правила дискретизации, вытекающие из теоремы отсчетов Котельникова. В частности, восстановление функции по отсчетам, а, следовательно, и вычисление интеграла получается более точным при использовании:

– во-первых, большего числа отсчетов на заданном интервале;

Возможности численного интегрирования функций с применением наиболее популярных методов – прямоугольников, трапеций, парабол и метода 3/8 – рассмотрены с точки зрения теории дискретизации. Согласно этой теории восстановления функций по дискретным отсчетам выполняется с помощью фильтров низких частот с определенными импульсными характеристиками. Показано, что при одинаковом количестве отсчетов вычисление интеграла дает точно одинаковый результат при использовании методов прямоугольников и трапеций, а также при использовании импульсных характеристик, обладающих определенной симметрией.

– во-вторых, фильтров, восстанавливающих функцию по отсчетам, с оптимизированными характеристиками, которые приближаются к характеристикам идеального фильтра нижних частот.

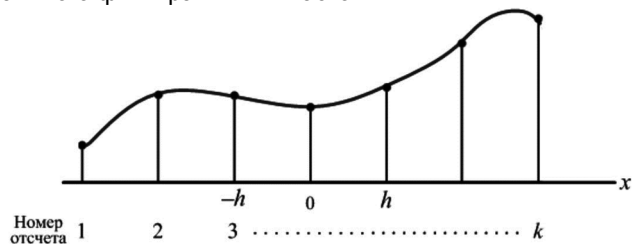


Рис. 1. Дискретизированная функция

Требуется найти оптимальное количество отсчетов и вид импульсной характеристики восстанавливающего фильтра, при которых для численного интегрирования будет достаточно минимального количества операций.

Для вычисления интеграла, т.е. для оценки площади под кривой $f(x)$, можно воспользоваться результатами теории дискретизации [5]. В соответствии с этой теорией дискретные отсчеты образуются путем перемножения исходной функции $f(x)$ на дискретизирующую функцию $D(x)$, которая представляет собой последовательность дельта-функций и записывается в виде

$$D(x) = h \sum_k \delta(x - kh). \quad (4)$$

Результат дискретизации выражается как

$$f^*(x) = f(x)D(x), \quad (5)$$

что с учетом свойства дельта-функции [6]

$$f(x)\delta(x - kh) = f(kh)\delta(x - kh) \quad (6)$$

дает

$$f^*(x) = hf(kh)\sum_k \delta(x - kh), \quad (7)$$

где k – номер отсчета, $k = 1, 2, \dots, k$.

Для восстановления исходной функции следует сгладить отсчеты с помощью фильтра нижних частот. Рассматриваемые преобразования отображаются эквивалентной схемой, показанной на рис. 2.

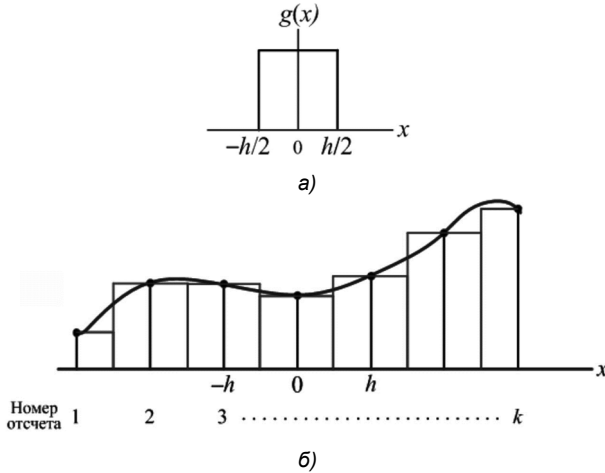


Рис. 2. Эквивалентная схема восстановления функции по отсчетам

Действие фильтра описывается операцией свертки

$$f_1(x) = f^*(x) * g(x), \quad (8)$$

где $f(x)$ – исходная функция; $g(x)$ – импульсная характеристика фильтра; $f^*(x)$ – дискретизированная (выраженная в отсчетах) исходная функция; $f_1(x)$ – функция, восстановленная по отсчетам.

Операция свертки выражается как

$$f^*(x) * g(x) = \int f(z)g(x - z)dz. \quad (9)$$

В частном случае свертки с дельта-функцией получаем

$$\delta(x - a) * g(x) = g(a). \quad (10)$$

Далее рассматриваются некоторые примеры восстановления функции по отсчетам с использованием различных фильтров.

Применение фильтра с импульсной характеристикой $\Pi(x)$

Метод с применением фильтра с прямоугольной импульсной характеристикой $g(x)=\Pi(x)$ в вычислительной технике называется методом прямоугольников. Функция $\Pi(x)$ выражается как

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } |x| < h/2; \\ 1/2, & \text{при } |x| = h/2; \\ 0, & \text{при } |x| > h/2. \end{cases} \quad (11)$$

что иллюстрирует рис. 3 а. Здесь h – шаг отсчетов.

Результат действия фильтра иллюстрирует рис. 3 б. Здесь каждый отсчет в результате свертки замещается прямоугольником $\Pi(x)$ с амплитудой, определяемой величиной отсчета.

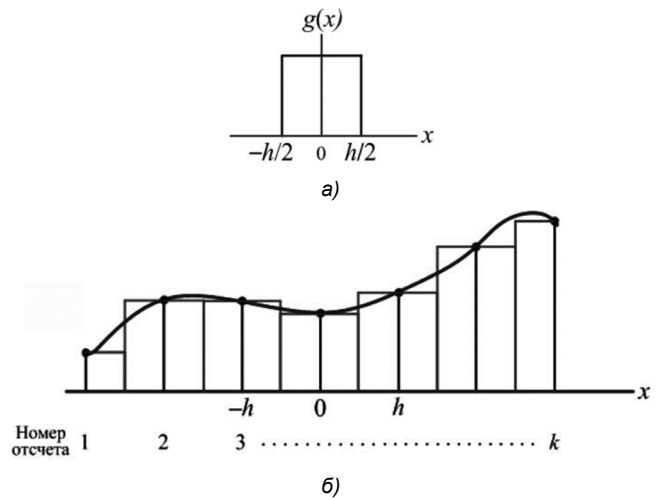


Рис. 3. Восстановление функции с помощью прямоугольников

В этом случае величина интеграла функции вычисляется как сумма площадей отсчетных прямоугольников, причем необходимо учитывать «краевой эффект», который сводится к тому, что левый и правый граничные прямоугольники имеют половинную площадь («краевые» отсчеты учитываются с половинным весом). В результате интеграл выражается как

$$\int_a^b f(x) dx = h \left[\frac{1}{2} f_1 + \sum_{i=2}^{k-1} f_i + \frac{1}{2} f_k \right]. \quad (12)$$

В области вычислительной техники рассмотренный вариант называют методом средних прямоугольников.

Понятно, что для уменьшения ошибки вычисления интеграла (как и для снижения ошибки восстановления функции) следует увеличивать число отсчетов k .

Применение фильтра с треугольной импульсной характеристикой

Метод с применением фильтра с треугольной импульсной характеристикой в вычислительной технике называется методом трапеций.

Треугольная импульсная характеристика, показанная на рис. 4 а, записывается как

$$g(x) = [1 - |x|/h] \times \Pi(x/2). \quad (13)$$

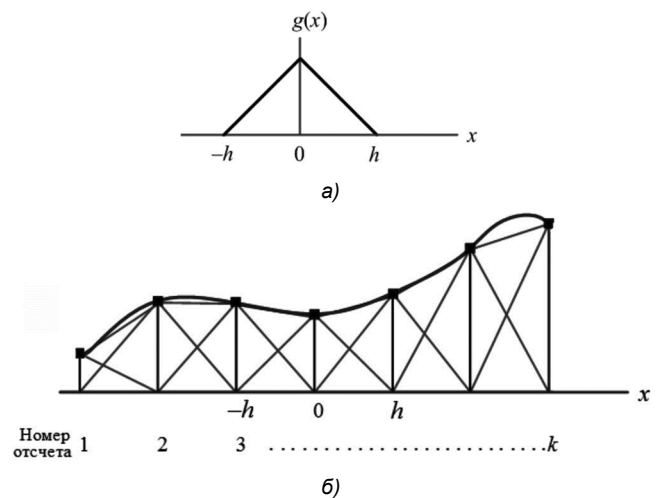


Рис. 4. Восстановление функции с помощью треугольников

Эта импульсная характеристика обеспечивает более высокую точность восстановления функции по отсчетам, что может быть подтверждено исследованием преобразования спектров исходной функции.

Как видно из рис. 4 б, величина интеграла функции выражается суммой площадей отсчетных треугольников, причем здесь также необходимо учитывать «краевой эффект» (использовать половинные веса для левой и правой граничных треугольников).

Таким образом, интеграл функции $f(x)$ выражается суммой площадей треугольников в виде

$$\int_a^b f(x) dx = h \left[\frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_k + \sum_{i=2}^{k-1} f_i \right], \quad (14)$$

что совпадает с выражением для прямоугольников (12).

Применение фильтра с косинусквадратичной импульсной характеристикой

Фильтр с косинусквадратичной импульсной характеристикой вида

$$g(x) = \cos^2(\pi x / 2h) \times \Pi(x / 2), \quad (15)$$

показанной на рис. 5 а, обеспечивает более точное восстановление функции по отсчетам, чем фильтр с треугольной импульсной характеристикой. Рис. 5 б иллюстрирует вычисление интеграла как суммы \cos^2 -импульсов.

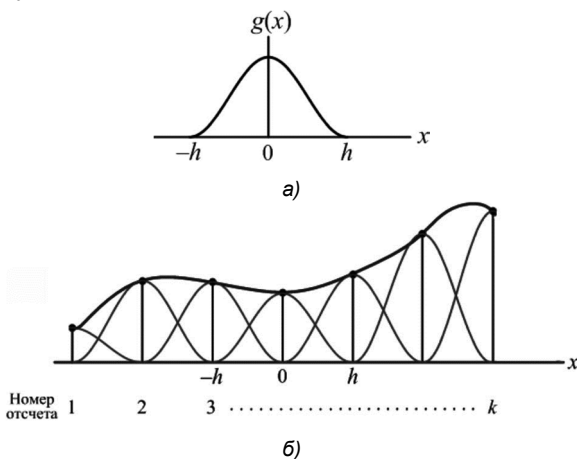


Рис. 5. Восстановление функции с помощью \cos^2 -импульсов

При вычислении интеграла здесь, также как в предыдущих вариантах, необходимо учитывать «краевой эффект».

С учетом значения интеграла [7]

$$\int \cos^2 ax dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4a} \sin 2ax \quad (16)$$

площадь импульсной характеристики $g(x)$ составляет

$$\int_{-h}^h g(x) dx = \int_{-h}^h \cos^2\left(\frac{\pi}{2h} x\right) dx = \frac{1}{2} x + \frac{2h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{h} x\right) \Big|_{-h}^h = h. \quad (17)$$

Таким образом, интеграл функции $f(x)$ выражается как сумма площадей косинусквадратичных отсчетных импульсов $g(x)$ в виде

$$\int_a^b f(x) dx = h \left[\frac{1}{2} f_1 + \sum_{i=2}^{k-1} f_i + \frac{1}{2} f_k \right], \quad (18)$$

т.е. совпадает с выражением для прямоугольников (12).

Отсюда нетрудно сделать вывод, что для определения значения интеграла импульсная характеристика используемого линейного фильтра нижних частот должна обладать осевой симметрией относительно оси ординат, а ее правая и левая граничные линии должны иметь центральную симметрию относительно точек с координатами $x = \pm h / 2$.

Интегрирование методом парабол Симпсона

Применение для интегрирования функций метода Симпсона означает переход к интерполяции второго порядка (с использованием парабол) [1].

В качестве исходной функции принимается $f(x)$, представленная на рис. 1. Согласно методу Симпсона для каждого фрагмента исходной функции, представленного тремя последовательными отсчетами, строится парабола, показанная коричневым цветом на рис. 6.

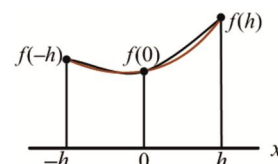


Рис. 6. Фрагмент функции $f(x)$ с тремя отсчетами и параболой

Парабола для трехотсчетного фрагмента функции записывается как

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C. \quad (19)$$

Используя координаты трех отсчетных точек, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} Ah^2 - Bh + C &= f(-h); \\ C &= f(0); \quad Ah^2 + Bh + C = f(h), \end{aligned} \quad (20)$$

откуда находятся коэффициенты

$$\begin{aligned} A &= \frac{[f(h) + f(-h)] - 2f(0)}{2h^2}; \\ B &= \frac{[f(h) - f(-h)]}{2h}; \quad C = f(0), \end{aligned} \quad (21)$$

что и определяет искомую параболу (19).

В результате интегрирования площадь фрагмента функции выражается как

$$\int_{-h}^h f(x) dx = \frac{h}{3} [f(-h) + 4f(0) + f(h)]. \quad (22)$$

Восстановление по Симпсону исходной функции $f(x)$, представленной в отсчетах, иллюстрирует рис. 7, где исходная функция обозначена синим, а аппроксимация исходной функции тремя трехотсчетными параболическими фрагментами – коричневым цветом.

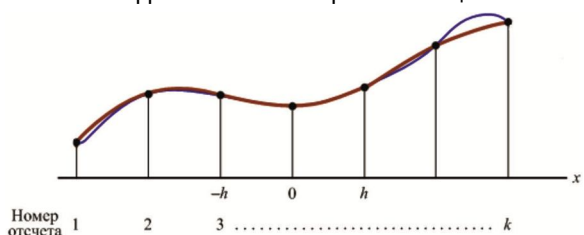
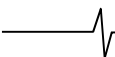


Рис. 7. Аппроксимация по методу Симпсона (параболами)



Как следует из выражения (22), граничные отсчеты парабол (с нечетными номерами $2i+1$) должны учитываться с весом 2, первый и последний отсчеты (с номерами 1 и k) – с весом 1, а отсчеты с четными номерами $2i$ – с весом 4). Таким образом, значение интеграла при использовании метода парабол Симпсона вычисляется по формуле

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[f_1 + 4 \sum_{i=1}^n f_{2i} + 2 \sum_{i=1}^n f_{2i+1} + f_k \right], \quad (23)$$

где $i = 1, 2, 3, \dots, k; k = 2n + 1; n = 0, 1, 2, \dots$

Из выражения (23) следует, что площадь под кривой $f(x)$ на интервале $(a; b)$ является суммой площадей прямоугольников, высота которых определяется значениями задействованных отсчетов, а ширина – их положением в последовательности отсчетов, как показано на рис. 8.

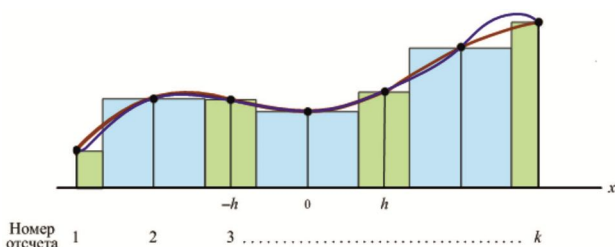


Рис. 8. Прямоугольники, определяющие значение интеграла от $f(x)$

Здесь прямоугольники, соответствующие нечетным отсчетам, показаны зеленым цветом, а соответствующие четным отсчетам – голубым цветом. Краевые прямоугольники, как и ранее, имеют половинную площадь нечетных отсчетов. Для проверки можно воспользоваться простым примером прификсированной $f(x)=1$, тогда площадь под кривой, очевидно, составит $(k-1)h$.

Описанные операции могут быть реализованы эквивалентной схемой, представленной на рис. 9.

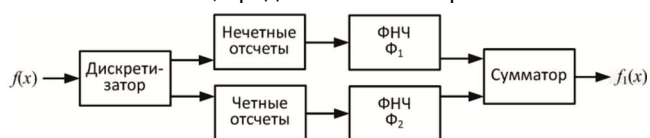


Рис. 9. Восстановление функции с помощью парабол

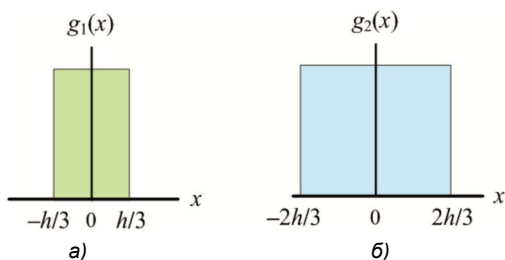


Рис. 10. Импульсные характеристики фильтров Φ_1 и Φ_2



Рис. 11. Упрощенная эквивалентная схема интегрирования по Симпсону

Отсчеты функции $f(x)$ разделяются на четные и нечетные. Затем производится фильтрация последовательностей отсчетов с помощью фильтров, имеющих прямоугольные импульсные характеристики

$$g_1(x) = \Pi(3x/2), \quad g_2(x) = \Pi(3x/4), \quad (24)$$

показанные на рис. 10. Прямоугольная функция $\Pi(x)$ определена выражением (11). Краевые нечетные отсчеты здесь также учитываются с половинным весом.

В результате действия фильтров и сумматора получается функция $f_1(x)$, представленная в виде последовательности зеленых и голубых прямоугольников на рис. 8.

Показанная на рис. 9 эквивалентная схема может быть несколько упрощена за счет введения дискретного фильтра, обеспечивающего сдвигивание четных отсчетов (рис. 11).

В этой схеме четные отсчеты подвергаются дискретной фильтрации с использованием импульсной характеристики

$$g_0(x) = \delta(x - h/3) + \delta(x + h/3), \quad (25)$$

представленной графически на рис. 12.

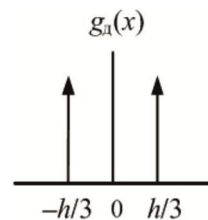


Рис. 12. Импульсная характеристика дискретного фильтра Φ_0

После суммирования образуется последовательность отсчетов, которая на рис. 13 представлена черным (исходные нечетные отсчеты) и красным цветом (четные отсчеты после дискретной фильтрации).

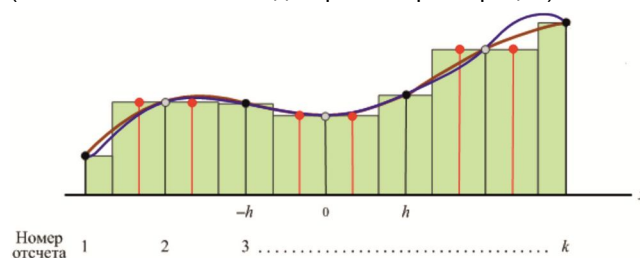


Рис. 13. Прямоугольники, определяющие значение интеграла от $f(x)$ при упрощенной схеме интегрирования по Симпсону

Объединенная последовательность отсчетов подвергается фильтрации с помощью единого фильтра нижних частот Φ_1 с прямоугольной импульсной характеристикой $g_1(x)$, и в результате образуется функция $f_1(x)$, представленная в виде последовательности зеленых прямоугольников на рис. 13.

Таким образом, интегрирование по Симпсону (по методу парабол) сводится к суммированию площадей прямоугольников с использованием дополнительной обработки – удвоения числа четных отсчетов с помощью дискретного фильтра.

Для удобства сравнения с методом Симпсона в исходном методе прямоугольников можно принять общее число отсчетов $k_H = 2n+1$. Общее число исходных отсчетов для метода Симпсона также составит $k_C = 2n+1$. Но полное число отсчетов (с учетом удвоения четных отсчетов при дискретной фильтрации) для метода Симпсона составит $k_{CN} = 3n+1$.

Отсюда можно сделать вывод, что метод Симпсона обеспечивает точность интегрирования в 1,5 раза выше, чем метод прямоугольников (по крайней мере, при достаточно больших k). Но возможно, что метод прямоугольников при числе отсчетов $3k/2$ даст более высокую точность, чем метод Симпсона, поскольку импульсные характеристики не будут попарно повторяться, как для четных отсчетов в методе Симпсона. Для проверки требуется моделирование, например, в среде Matlab.

Интегрирование функции с использованием метода 3/8

Применение для интегрирования функций «метода 3/8» означает переход к интерполяции третьего порядка [1, 4]. По-прежнему, в качестве исходной принимается функция $f(x)$, представленная на рис. 1. При использовании метода 3/8 функция разбивается на фрагменты, каждый из которых содержит четыре отсчета. Площадь под фрагментом функции выражается через отсчеты как

$$\int_0^{3h} f(x) dx \approx \frac{3h}{8} [f_1 + 3f_2 + 3f_3 + f_4] = h \left[\frac{3}{8} f_1 + \frac{9}{8} f_2 + \frac{9}{8} f_3 + \frac{3}{8} f_4 \right], \tag{22}$$

где h – шаг отсчетов. (При $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 1$ площадь составляет $3h$.)

Для каждого фрагмента, представленного четырьмя последовательными отсчетами, строится кривая третьего порядка, как показано на рис. 14.

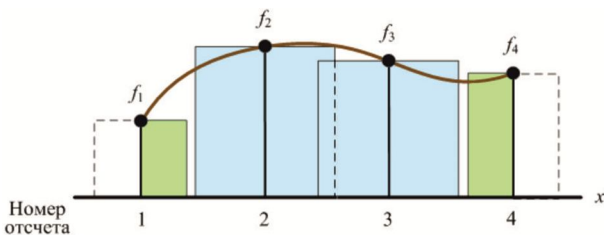


Рис. 14. Фрагмент функции $f(x)$ с четырьмя отсчетами – фильтры с симметричными импульсными характеристиками

При этом весовые коэффициенты отсчетов различаются в три раза. Интегрирование здесь также можно свести к фильтрации отсчетов с использованием прямоугольных импульсных характеристик $g_1(x) = \Pi(4x/3)$ и $g_2(x) = \Pi(4x/9)$, показанных на рисунке зеленым и голубым цветом (с учетом краевого эффекта).

Небольшая модификация прямоугольных фильтров позволяет перейти к «стандартной» диаграмме восстановления функции, где Π -образные импульсные харак-

теристики не пересекаются. В частности, для отсчетов с номерами $(3n+2)$ и $(3n+3)$ можно использовать соответственно фильтры с несимметричными импульсными характеристиками $g_{2L}(x)$ и $g_{2R}(x)$ той же длительности, что $g_2(x)$. Восстановление функции по этому варианту иллюстрирует рисунок 15.

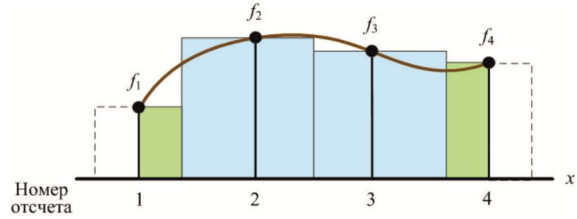


Рис. 15. Фрагмент функции $f(x)$ с четырьмя отсчетами – Π -фильтры с несимметричными импульсными характеристиками

Несимметричные импульсные характеристики выражаются как

$$g_{2L}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } -5h/8 < x < h/2; \\ 1/2 & \text{при } x = -5h/8; \\ 1/2 & \text{при } x = h/2; \\ 0 & \text{при } -5h/8 > x > h/2; \end{cases}$$

$$g_{2R}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } -h/2 < x < 5h/8; \\ 1/2 & \text{при } x = -h/2; \\ 1/2 & \text{при } x = 5h/8; \\ 0 & \text{при } -h/2 > x > 5h/8. \end{cases}$$

Таким образом, восстановление функции с интерполяцией по методу 3/8 может быть реализовано эквивалентной схемой, представленной на рис. 16. Отсчеты с выхода дискретизатора распределяются на три потока – с номерами $(3n+1)$, $(3n+2)$ и $(3n+3)$ и обрабатываются тремя «согласованными» фильтрами с импульсными характеристиками $g_1(x)$, $g_{2L}(x)$ и $g_{2R}(x)$, после чего суммируются, образуя последовательность импульсов, представленную на рис. 15. Здесь $n = 0, 1, 2, \dots$

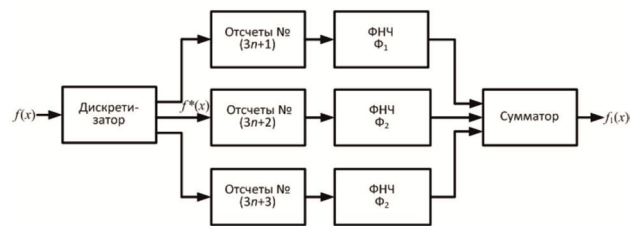


Рис. 16. Эквивалентная схема обработки отсчетов при использовании метода 3/8 и несимметричных фильтров

Общевыражение для интегрирования по «правилу 3/8» получается путем «сцепки» последовательности выражений для фрагментов (22) и имеет следующий вид:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3h}{8} \left[f_1 + 2 \sum_{i=1}^n f_{3i+1} + 3 \sum_{i=0}^{n-1} f_{3i+2} + 3 \sum_{i=0}^{n-1} f_{3i+3} + f_k \right], \tag{23}$$

где $k = 1, 2, 3, \dots, (3n+1)$; $i = 0, 1, 2, \dots, n$.