УДК 621.396.96: 519.61

ОЦЕНКА РАЗРЯДНОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА, ТРЕБУЕМОЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОБРАБОТКИ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Ратынский М.В., *д.т.н., начальник сектора АО «ВНИИРТ», e-mail: m3v5r7@inbox.ru;*
Кирякмасов А.К., *инженер 1-й категории АО «ВНИИРТ», e-mail: brain.nutro2012@gmail.com.*

EVALUATION OF PROCESSOR WORD LENGTH REQUIRED FOR SOLVING STOCHASTIC SIGNALS PROCESSING PROBLEMS

Ratynsky M.V., Kiryakmasov A.K.

Processor word length (the number of mantissa bits for floating-point calculations), required for solving four stochastic signals processing problems (detection, enumeration and directions of arrival estimation of signal sources and adaptive space filtering) is evaluated by computer simulation. Critical values of word length are from 10...12 (for directions of arrival estimation) to 19...21 (for enumeration problem).

Key words: word length, estimation, stochastic signals, detection, critical values.

Методом цифрового моделирования оценена разрядность вычислительного устройства (число разрядов мантиссы при вычислениях с плавающей запятой), необходимая для решения четырех задач обработки стохастических сигналов в РЛС с цифровой ФАР: обнаружение, оценка числа и пеленгация источников сигналов, адаптивная пространственная фильтрация. Критические значения разрядности составляют от 10...12 (в задаче пеленгации) до 19...21 (в задаче оценки числа).

Ключевые слова: разрядность вычислительного устройства, стохастические сигналы, обработка сигналов.

Введение

Решение задач обработки стохастических сигналов представляет интерес для ряда приложений – радиолокации, гидролокации, сейсмологии, связи, радиоастрономии и даже биомедицины [1]. В некоторых приложениях, в частности в радиолокации, ситуация усложняется необходимостью обработки информации в реальном масштабе времени, что во многих случаях требует использования специализированных вычислительных средств на базе сигнальных процессоров, которые могут иметь существенно ограниченную разрядность представления чисел [2]. Насколько нам известно, более или менее обстоятельных оценок требуемой разрядности для рассматриваемого класса задач до настоящего времени получено не было.

Мы рассмотрим четыре задачи в предположении, что узкополосные стохастические сигналы, для которых применимо понятие комплексной огибающей (КО), обрабатываются в РЛС с цифровой ФАР, а именно:

– обнаружение сигналов;
– оценка числа источников сигналов;
– пеленгация источников сигналов;
– адаптивная пространственная фильтрация (АПФ).

Исходная информация для решения задач – прямоугольная матрица $\mathbf{Y}$ размера $N \times K$ (обучающий пакет), столбцами которой являются N-мерные комплексные векторы $\mathbf{Y}_k$, k = 1, ... K, сигналов (КО) с выходов элементов ФАР в K последовательных моментов времени, отстоящих один от другого на интервал дискретизации, соответствующий теореме Котельникова. Для решения задач сигнальной обработки обучающий пакет подвергается последующим преобразованиям, вообще говоря различным для разных задач, что подробнее поясняется в последующих разделах статьи. Для первой и третьей задач вычисления выполняются в действительной арифметике [3], для четвертой – в комплексной, для второй задачи – частично в комплексной, и частично в действительной. Все числа в процессе вычислений представляются в формате с плавающей запятой.

Методика оценки

Оценка требуемой разрядности произведена методом цифрового моделирования с усечением мантисс промежуточных результатов вычислений (для каждой из квадратур в случае комплексных чисел) до требуемого числа разрядов после каждой арифметической операции используемого для решения задачи алгоритма, с перебором числа разрядов в заведомо достаточно широких пределах. Моделирование выполнено на языке VBA в среде Excel, при числе элементов решетки N = 50...200, числе обучающих выборок K = (1,5...5)N и интенсивности сигналов от – ∞ (отсутствие сигналов) до 30...40 дБ относительно собственных шумов в элементе решетки, с расширением в случае необходимости пределов изменения этих параметров. Процедура, реализующая ограничение разрядности мантиссы, приведена в приложении.

В последующих разделах для каждой из рассматриваемых задач дана краткая характеристика используемого для решения задачи алгоритма, определен критерий оценки требуемой разрядности и приведены полученные результаты.

Обнаружение источников сигналов

Задача обнаружения [4] решается посредством сравнения с порогом максимального собственного значения (СЗ) выборочной оценки корреляционной матрицы (КМ), равной (без учета нормировки; верхний индекс H – знак эрмитовой сопряженности)

$$\mathbf{R} = \mathbf{Y}\mathbf{Y}^{H}. \qquad (1)$$

Максимальное СЗ КМ находится степенным методом непосредственно по обучающему пакету $\mathbf{Y}$ без явного формирования КМ [5]. Величина порога рассчитывается по следу КМ (порог пропорционален следу), причем след КМ также находится непосредственно по обучающему пакету $\mathbf{Y}$.

Критическая разрядность мантиссы для задачи обнаружения оказывается равной 16...18. При меньшей разрядности уменьшается рассчитываемая величина следа КМ и, следовательно, значение порога, что ведет к росту вероятности ложной тревоги при отсутствии источников сигналов. Для корректной оценки величины максимального СЗ оказывается достаточно 8 разрядов мантиссы, а вероятность правильного обнаружения (при наличии источников сигналов) практически неизменна при числе разрядов 4...6 и более.

Полученные результаты практически не зависят от числа источников сигналов, их интенсивности, а также от вида решетки (одномерная или двумерная), числа ее элементов и числа обучающих выборок.

Оценка числа источников сигналов

Оценка числа источников получается путем сравнения с порогом СЗ КМ $\mathbf{R}$ по (1) [6]. Для нахождения СЗ комплексная эрмитова матрица $\mathbf{R}$ приводится к действительному треугольному виду унитарными преобразованиями подобия (отражениями Хаусхолдера), сохраняющими спектр матрицы [7], после чего нужное число СЗ находится в соответствии с алгоритмом бисекции (итерационной процедурой деления отрезка пополам) [8]. Оценка порога в вычислительном плане тривиальна и потому не критична к разрядности вычислителя.

Критическая разрядность мантиссы для задачи оценки числа составляет 19...21, причем требования по разрядности существенны для всех трех используемых процедур – формирования КМ, приведения к треугольному виду и бисекции. Уменьшение разрядности ниже критического предела вызывает искажение СЗ, что ведет к ошибкам в оценке числа источников. Наиболее критична ситуация, когда при наличии нескольких источников сигналов имеются сравнительно небольшие сигнальные СЗ, ненамного превышающие шумовые, а также СЗ большей величины: в этих условиях при малой разрядности возрастают старшие шумовые СЗ и снижаются младшие сигнальные, так что никакой выбор порога не позволяет корректно их разделить. В более простых ситуациях (один источник или несколько разрешенных источников примерно одинаковой интенсивности) критическая разрядность составляет 16...18.

В остальном полученные результаты также не зависят от вида решетки, числа ее элементов и числа обучающих выборок.

Пеленгация источников сигналов

Для пеленгации источников сигналов в соответствии с алгоритмом Кейпона [3, 6] производится построение пеленгационного рельефа (ПР) для достаточно густой сетки гипотез, с последующим нахождением его экстремумов (максимумов), координаты которых соответствуют искомым пеленгам. Элементы ПР получаются в результате фильтрации векторов-гипотез настроенным фильтром-ортогонализатором, который формируется при ортогонализации строк обучающего пакета, например, в соответствии с алгоритмом Грама-Шмидта.

К разрядности вычислителя оказываются критичны практически в равной мере процедуры ортогонализации строк пакета и построения ПР (фильтрации векторов-гипотез); критическая разрядность мантиссы равна 10...12 при числе источников сигналов до 10 % от числа элементов решетки и интенсивности до 40...50 дБ относительно собственных шумов в элементе решетки. При меньшей разрядности возрастает «шероховатость» шумового фона ПР, что приводит к появлению ложных пиков ПР, т.е. к появлению ложных пеленгов, не соответствующих реальному положению источников сигналов. По мере уменьшения числа источников и снижения их интенсивности требования к разрядности снижаются, но даже при отсутствии источников требуется не менее 6 разрядов.

Приведенные результаты практически не зависят от вида решетки и числа обучающих выборок.

Адаптивная пространственная фильтрация

Решение задачи АПФ заключается в нахождении адаптивного весового вектора $\mathbf{W}$, равного (без учета нормировки) произведению матрицы, обратной $\mathbf{R}$ по (1), на стандартный опорный вектор $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{W} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}. \qquad (2)$$

Практически явного формирования и обращения КМ $\mathbf{R}$ не производится, и задача сводится к ортогонализации строк пакета $\mathbf{Y}$ (например, по Граму-Шмидту) с последующей фильтрацией опорного вектора фильтром-биортогонализатором [6].

Критическая разрядность мантиссы для задачи АПФ в худших случаях не превышает 14...16 (для большинства вариантов взаимного расположения источников она на 2...3 разряда меньше) при интенсивности источников порядка 40 дБ относительно собственных шумов в элементе решетки, причем эта разрядность необходима как для ортогонализации строк обучающего пакета, так и для фильтрации опорного вектора. При уменьшении разрядности ниже критической снижается глубина подавления стохастических сигналов, которая при достаточно большой разрядности ограничивается коэффициентом накопления (числом обучающих выборок – числом K столбцов обучающего пакета) [9].

Требуемая разрядность практически не зависит от вида решетки, числа ее элементов, числа обучающих выборок и числа источников сигналов, но зависит от интенсивности источников, изменяясь на единицу при изменении интенсивности на 6 дБ (чем меньше интенсивность, тем меньше требуемая разрядность, но в любом случае нужно не менее 8..10 разрядов).

Дополнительные замечания

В трех задачах из четырех рассмотренных (а именно – в задачах обнаружения, пеленгации и АПФ) решение выполняется без явного формирования и обращения КМ $\mathbf{R}$, с заменой этих шагов принципиально эквивалентным им нахождением фильтра-ортогонализатора строк обучающего пакета. Такое решение обладает более высокой численной устойчивостью, т.е. требует меньшей разрядности вычислителя, по сравнению с прямым формированием и обращением КМ.

Например, для решения задачи АПФ можно сформировать оценку КМ по (1), найти ее разложение по Холецкому

$$\mathbf{R} = \mathbf{L}\mathbf{L}^{H}, \tag{3}$$

где $\mathbf{L}$ – нижняя треугольная матрица, и затем найти весовой вектор $\mathbf{W}$, равный в соответствии с (2) и (3)

$$\mathbf{W} = (\mathbf{L}^{H})^{-1}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{S}, \tag{4}$$

причем $\mathbf{W}$ находится следующим образом. Если ввести обозначение $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{S} = \mathbf{X}$, откуда следует $\mathbf{LX} = \mathbf{S}$, из последнего равенства вектор $\mathbf{X}$ получается прямой подстановкой по известным $\mathbf{L}$ и $\mathbf{S}$, и затем аналогично, в соответствии с вытекающим из (4) соотношением $\mathbf{W} = (\mathbf{L}^{H})^{-1}\mathbf{X}$, которому соответствует $\mathbf{L}^{H}\mathbf{W} = \mathbf{X}$, искомый вектор $\mathbf{W}$ получается обратной подстановкой по известным $\mathbf{L}$ и $\mathbf{X}$.

При этом критическая разрядность мантиссы оказывается в полтора – два раза больше, чем в описанном выше алгоритме с ортогонализацией строк пакета $\mathbf{Y}$, при практически одинаковом объеме вычислений. Этот результат согласуется с известными характеристиками точности матричных вычислений [1, 7], и можно полагать, что аналогичная ситуация имеет место и для задач обнаружения и пеленгации.

Заключение

Требуемая разрядность вычислителя в общем случае оказывается зависящей от ряда параметров – числа и мощности источников сигналов, размеров (числа элементов) ФАР, числа обучающих выборок (числа столбцов обучающего пакета $\mathbf{Y}$), хотя в разных задачах влияние этих факторов различно, и в среднем сравнительно невелико, о чем более конкретно сказано в предшествующих разделах статьи.

В качестве ориентировочных оценок требуемой разрядности (числа разрядов мантиссы при вычислениях с плавающей запятой) в первом приближении могут быть использованы значения, приведенные в следующей табл. 1.

Таблица 1. Разрядность вычислителя, требуемая для решения задач обработки стохастических сигналов

Задача	Критическая разрядность мантиссы	Фактор, ограничивающий снизу требуемую разрядность
Обнаружение	16 ... 18	Рост вероятности ложной тревоги
Оценка числа	19 ... 21	Появление ошибок в оценке числа источников
Пеленгация	10 ... 12	Появление ложных пеленгов
АПФ	14 ... 16	Снижение глубины подавления стохастических сигналов

Подчеркнем, что приведенные результаты для задач обнаружения, пеленгации и АПФ соответствуют алгоритмам, использующим ортогонализацию строк обучающих пакетов и отличающимся высокой численной устойчивостью, которые требуют в полтора – два раза меньшей разрядности по сравнению с алгоритмами, основанными на прямом формировании и обращении выборочных оценок КМ.

Приложение

Усечение (ограничение разрядности) мантиссы реализуется следующей процедурой:

```
     Function Trunc (A As Single, T As Integer)
As Single
         ' A – число, требующее усечения мантиссы
         ' T – число двоичных разрядов мантиссы
после усечения
         Dim L As Integer, Ab As Single  ' Буфер-
ные переменные
         If A = 0 Then
            A = 0
         Else
            L = Int ((Log(Abs(A))) / (Log(2))) + 1
            Ab = Int (Abs(A) * 2^(T – L) + 0.5)
            Trunc = Sgn(A) * (Ab / 2^(T – L))
         End If
     End Function
```

Литература

1. Van Trees H.L. Detection, estimation and modulation theory. Part IV. Optimum array processing. New York: Wiley, 2002.

2. Смит С. Цифровая обработка сигналов. М.: Додэка-XXI, 2012.

3. Ратынский М.В., Петров С.В. Реализация алгоритмов обработки стохастических сигналов в действительной арифметике. Цифровая обработка сигналов, 2013, № 4, – с. 22 – 24.

4. Петров С.В. Синтез и анализ алгоритмов обнаруже-ния стохастических сигналов в системах с многоэлемент-ной антенной решеткой. Антенны, 2015, вып.7 (218), – с. 29-36.

5. Ратынский М.В., Петров С.В. Экономичный алгоритм нахождения максимального сингулярного числа в задаче обнаружения случайного сигнала. Цифровая обработка сигналов, 2013, № 2, – с. 35-38.

6. Ратынский М.В. Адаптация и сверхразрешение в антенных решетках. М.: Радио и связь, 2003.

7. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999.

8. Уилкинсон Дж., Райнш К. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. М.: Машиностроение, 1976.

9. Ратынский М.В. Выбор регуляризатора в задаче адаптивной пространственной фильтрации. Успехи современной радиоэлектроники, 2016, № 7, с. 53-63.