

УДК 519.642

## РАЗРАБОТКА СГЛАЖИВАЮЩИХ ФИЛЬТРОВ ПРОЕКЦИОННЫХ ДАННЫХ В ЗАДАЧАХ ДВУМЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ

*Лихачёв А.В., д.т.н., старший научный сотрудник Института автоматизации и электрометрии Сибирского отделения РАН, e-mail: ipm1@iae.nsk.su.*

### DESIGN OF PROJECTION DATA SMOOTHING FILTERS FOR TWO-DIMENSIONAL TOMOGRAPHY

*Likhachov A.V.*

*A new method for calculation of the projection data smoothing filter coefficients is proposed. It is based on a previous study of the effect of the distortion type on the reconstruction accuracy. The coefficients are determined by means of minimization on the specified set of the deviation between the correlation function of the smoothed noise and the given Gauss curve. A computational experiment shows, in particular, that the developed algorithm provides a reconstruction error of one and a half times less than the moving average filter.*

**Key words:** Two-dimensional tomography, correlation function of noise, projection data smoothing.

**Ключевые слова:** двумерная томография, корреляционная функция шума, сглаживание проекционных данных.

#### Введение

В работе рассматривается задача двумерной лучевой томографии [1, 2]. С математической точки зрения она сводится к реконструкции функции двух переменных  $g(x, y)$  по набору интегралов от неё вдоль прямых линий. Ниже он будет обозначаться через  $f(p, \varphi)$ , где  $p$  – расстояние от прямой до начала координат,  $\varphi$  – угол наклона её нормали к оси  $X$ . Для определённости возьмём параллельную схему сканирования [1]. В этом случае искомая функция вычисляется по формуле обращения преобразования Радона, [2]:

$$g(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| \tilde{f}(\omega, \varphi) \exp(i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)) d\omega d\varphi, \quad (1)$$

Знак «тильда» сверху означает преобразование Фурье по первой переменной. При алгоритмической реализации выражения (1) исходные данные целесообразно представлять в виде множества одномерных проекций  $f_\varphi(p)$ , каждая из которых получается из  $f(p, \varphi)$  если зафиксировать угол  $\varphi$ .

Известно, что описанная задача является некорректно поставленной [2, 3]. Как видно из (1), спектр каждой проекции умножается на модуль частоты (в англоязычной литературе эта операция называется гамп-фильтрацией). Тем самым усиливается высокочастотная составляющая шума, который неизбежно присутствует в зарегистрированных сигналах. Согласно теореме Винера-Хинчина [4], спектральная плотность мощности  $W_\xi(\omega)$  стационарного случайного процесса представляет собой Фурье-образ его корреляционной функции  $R_\xi(p)$ , в связи с чем последняя оказывает суще-

*Предложен новый метод определения коэффициентов сглаживающего фильтра проекционных данных в задачах томографии. В его основе лежит выполненное ранее исследование влияния различных типов помех на точность восстановления. Расчёт ведётся, исходя из минимизации на определённом множестве отклонения корреляционной функции сглаженного шума от гауссовой кривой с заданными параметрами. Проведён вычислительный эксперимент, в котором, в частности, получено, что разработанный алгоритм обеспечивает ошибку реконструкции в полтора раза меньшую, чем фильтр скользящего среднего.*

ственное влияние на результат реконструкции. Этот вопрос рассматривался в [5]. В частности, там было выведено выражение для дисперсии централизованного шума после гамп-фильтрации:

$$D_\xi^{\text{ramp}} = R_\xi^{\text{ramp}}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Omega}^2(\omega) \tilde{R}_\xi(\omega) d\omega. \quad (2)$$

Через  $\tilde{\Omega}(\omega)$  в (2) обозначена частотная характеристика некоторой аппроксимации гамп-фильтра. Методы их проектирования и соответствующие исследования изложены в [1, 2, 6 – 10].

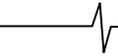
В работе [5] получен следующий важный результат. Для шума с корреляционной функцией в форме кривой Гаусса (гауссов шум) значение правой части (2) оказалось более чем в четыре раза ниже по сравнению с другими рассмотренными случайными сигналами (при одинаковой дисперсии помехи в исходных данных). Это легло в основу предлагаемого метода сглаживания.

#### Теоретическая часть

Будем считать, что статистические свойства помех не зависят от ракурса наблюдения. Примем аддитивную модель, согласно которой каждая зарегистрированная проекция представляет собой следующую сумму:

$$f_\varphi(p) = f_{0,\varphi}(p) + \xi(p). \quad (3)$$

Здесь  $f_{0,\varphi}(p)$  – точные данные, которые в рассмат-



риваемом приближении являются преобразованием Радона от  $g(x, y)$ ; через  $\xi(p)$  обозначена случайная функция с равным нулю математическим ожиданием.

Зададим нерекурсивный симметричный цифровой фильтр посредством выражения

$$f_\varphi^F(ih) = w_0 f_\varphi(ih) + \sum_{j=1}^n w_j f_\varphi((i-j)h) + \sum_{j=1}^n w_j f_\varphi((i+j)h), \quad (4)$$

где  $w_j$  – вещественные числа (коэффициенты фильтра),  $h$  – шаг дискретизации одномерных проекций. Ставится задача найти значения  $w_j$ , такие чтобы  $R_\xi^F(p)$  – корреляционная функция шума после фильтрации (4) – была близка к заданной функции  $G(p)$ . Учитывая результаты работы [5], положим

$$G(ih) = D_\xi^F \exp(-\lambda^2 (ih)^2). \quad (5)$$

Параметры  $D_\xi^F$  и  $\lambda$  в (5) не фиксированы, путём их варьирования производится регуляция степени сглаживания.

Пусть проекционные данные (3) содержат центрированный белый шум, для которого, как известно,

$$R_\xi((i-j)h) = D_\xi \delta_{ij}, \quad (6)$$

где  $D_\xi$  – дисперсия,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Проиллюстрируем разработанный метод вычисления коэффициентов  $w_j$  для нескольких значений  $n$ . Прежде всего, отметим, что поскольку фильтрация подвергается также и полезный сигнал, для того, чтобы его энергия сохранялась, должно выполняться условие

$$w_0 + 2 \sum_{j=1}^n w_j = 1. \quad (7)$$

При  $n = 1$  уравнение (4), записанное отдельно для шумовой составляющей, принимает вид

$$\xi^F(ih) = w_0 \xi(ih) + w_1 \xi((i-1)h) + w_1 \xi((i+1)h) \quad (8)$$

Возведём (8) в квадрат и возьмём математическое ожидание:

$$M \{ \xi^F(ih) \cdot \xi^F(ih) \} = M \{ (w_0 \xi(ih) + w_1 \xi((i-1)h) + w_1 \xi((i+1)h))^2 \}. \quad (9)$$

По определению левая часть (9) есть  $R_\xi^F(p)$  при нулевом значении аргумента. Приравняем её к  $G(0)$ . Преобразуя правую часть, с учётом (6), в конечном итоге получаем

$$G(0) = D_\xi^F = D_\xi (w_0^2 + 2w_1^2) \quad (10)$$

Решая систему, состоящую из уравнений (7) и (10), имеем

$$\begin{cases} w_0 = 1 - \frac{2}{3} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{2}(1-\beta)} \right) \\ w_1 = \frac{1}{3} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{2}(1-\beta)} \right) \end{cases}. \quad (11)$$

Через  $\beta$  обозначено отношение  $D_\xi^F / D_\xi$ .

Будем рассматривать параметр  $D_\xi^F$  как дисперсию шума после фильтрации (4). Чтобы числа  $w_0$  и  $w_1$  были

вещественными должно выполняться неравенство  $\beta \geq 1/3$ . Если  $\beta = 1/3$ , то  $w_0 = w_1 = 1/3$ , что соответствует усреднению в скользящем окне. Таким образом, именно оно обеспечивает наименьшую величину дисперсии. Однако значение  $n = 1$  является слишком малым, для того чтобы можно было учитывать форму корреляционной функции.

Перейдём к случаю  $n = 2$ . Аналогично тому, как было получено (10), находим

$$D_\xi^F = D_\xi (w_0^2 + 2w_1^2 + 2w_2^2). \quad (12)$$

Для определения трёх коэффициентов  $w_0, w_1, w_2$  нужно ещё одно уравнение. Запишем выражение для  $\xi^F((i+1)h)$ :

$$\begin{aligned} \xi^F((i+1)h) &= w_0 \xi((i+1)h) + \\ &+ w_1 \xi(ih) + w_2 \xi((i-1)h) + \\ &+ w_1 \xi((i+2)h) + w_2 \xi((i+3)h). \end{aligned} \quad (13)$$

Умножим (4) при  $n = 2$  на (13) и возьмём математическое ожидание. Заменяя, как и ранее,  $R_\xi^F(h)$  на  $G(h)$ , приходим к равенству

$$G(h) = D_\xi^F \exp(-\lambda^2 h^2) = 2D_\xi (w_0 w_1 + w_1 w_2). \quad (14)$$

В итоге имеем нелинейную систему, состоящую из (7), (12), (14), откуда выводится уравнение четвёртой степени для  $w_1$ :

$$\begin{aligned} 14w_1^4 - 12w_1^3 + \left( 3 + \frac{2G(h)}{D_\xi} - \beta \right) w_1^2 - \\ - \frac{6G(h)}{D_\xi} w_1 + \frac{3(G(h))^2}{2D_\xi^2} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Если брать  $n > 2$ , то получение алгебраических уравнений, подобных (15), но более высокой степени, также возможно. Однако поиск их аналитических решений сопряжён со значительными трудностями. Поэтому был разработан приближённый метод, который мы поясним на примере  $n = 3$ . Умножая (4) на  $\xi^F((i+j)h)$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ , по аналогии с (10) и (14) получаем

$$G(0) = D_\xi (w_0^2 + 2(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)), \quad (16)$$

$$G(h) = 2D_\xi (w_0 w_1 + w_1 w_2 + w_2 w_3), \quad (17)$$

$$G(2h) = D_\xi (w_1^2 + 2(w_0 w_2 + w_1 w_3)), \quad (18)$$

$$G(3h) = 2D_\xi (w_0 w_3 + w_1 w_2). \quad (19)$$

Из последнего равенства следует

$$w_3 = \frac{G(3h)}{2D_\xi w_0} - \frac{w_1 w_2}{w_0}. \quad (20)$$

Подставляем (20) в (18) и выражаем отсюда  $w_2$ :

$$w_2 = \frac{G(2h) - D_\xi w_1^2 w_0 - G(3h) w_1}{2D_\xi (w_0^2 - w_1)}. \quad (21)$$

Далее производится перебор значений  $w_0$  и  $w_1$  с шагом  $dw$ : коэффициент  $w_0$  меняется в интервале  $[1/7 + d_w; 1 - d_w]$ , а  $w_1$  при заданном  $w_0$  – в интервале  $[d_w; w_0 - d_w]$ . Для каждой пары  $w_0, w_1$  коэффициенты  $w_2, w_3$  вычисляются по уравнениям (21), (20) соответ-

ственно. Если имеет место  $0 < w_2, 0 < w_3, w_3 \leq w_2 \leq w_1$ , то рассчитывается невязка между правой и левой частями системы (16) – (19), и выбирается то решение, для которого она минимальна. Определённые путём описанной процедуры  $w_0, w_1, w_2, w_3$  умножаются на нормировочную константу с целью обеспечить равенство (7). Отметим, что при этом будет выполняться условие  $w_3 \leq w_2 \leq w_1 \leq w_0$ . Такое требование объясняется тем, что помимо шума сглаживаются также и проекционные данные. Поэтому представляется разумным, чтобы в результат фильтрации функций  $f_{0,\varphi}(p)$  в некоторой точке с наибольшими весами входили значения из неё самой и её ближайшего окружения.

Если имеются решения  $\vec{w} \in R^4$ , обладающие приведёнными выше свойствами, то данным методом будет получено приближение (с точностью порядка  $d_w$ ) к одному из них. В противном случае он приведёт к псевдо решению, минимизирующему на заданном множестве невязку. Сходным образом в работе были вычислены коэффициенты  $w_j$  до  $n = 7$  включительно. Перебирались значения двух – четырёх неизвестных, остальные же выражались через них посредством относительно простых соотношений.

Рассматриваемая задача также может быть решена, исходя из минимизации среднеквадратичного отклонения корреляционной функции шума после фильтрации от функции (5). Однако в работе он не применялся по следующим причинам. Во-первых, условия, накладываемые на  $w_j$ , затрудняют применение этого подхода. Во-вторых, учитывая возможные приложения метода, можно заключить, что число  $n$  не может быть большим. Действительно, уже при  $n = 7$  усреднение происходит по  $2n + 1 = 15$  точкам. При такой ширине окна фильтра мелкомасштабная структура изображения оказывается существенно размытой. В то же время, для  $n \leq 7$  разработанный алгоритм оказался достаточно эффективным.

### Экспериментальная часть

При численном моделировании использовался математический фантом, показанный на рис. 1. Число ракурсов наблюдения, равномерно распределённых по углу в интервале от 0 до  $\pi$ , составляло 180. На каждом из них было 1025 отсчётов. На квадратной области реконструкции задавалась сетка 1025x1025 узлов. Благодаря выбранной форме фантома, максимальное значение на всех проекциях было примерно одинаковым и приблизительно равнялось 1,67. Некоррелированная шумовая составляющая  $\xi(p)$  в каждой точке представляла собой нормально распределённую случайную величину с нулевым средним и дисперсией  $D_\xi = \sigma^2 (f_{\max})^2$ , где  $f_{\max} = 1,67$ . Параметр  $\sigma$  варьировался в вычислительном эксперименте.

Алгоритмическая, реализация формулы обращения (1), проводилась при помощи одной из часто применяемых аппроксимаций *ramp*-фильтра, предложенной Шеппом и Логаном, [7]. Точность реконструкции оценивалась посредством нормированной среднеквадратичной ошиб-

ки  $\Delta$ , которая рассчитывалась как

$$\Delta = \sqrt{\frac{\sum_j (g_{0,j} - g_j)^2}{\sum_j (g_{0,j})^2}}, \tag{22}$$

где  $g_{0,j}$  и  $g_j$  – значения математического фантома и его томограммы в  $j$ -м узле. Суммирование ведётся по всем узлам сетки.

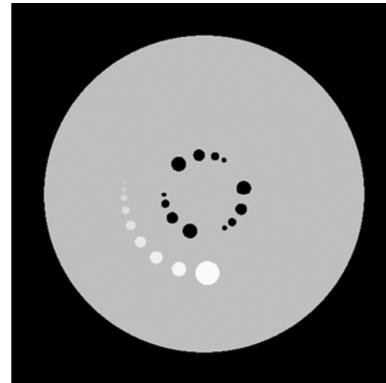


Рис. 1. Математический фантом

Далее приводятся результаты, полученные при  $n = 4$ . В этом случае для сглаживания используются пять коэффициентов  $w_0, w_1, w_2, w_3, w_4$  и значения проекции в девяти точках. На рис. 2,а,б представлены зависимости ошибки  $\Delta$  от отношения  $\beta = D_\xi^F / D_\xi$ . Для рис. 2,а величина параметра  $\sigma$  составляет 0,05, а для рис. 2,б – 0,15. Кривым 1, 2 и 3 отвечают  $\lambda = 7,894, \lambda = 8,881$  и  $\lambda = 10,149$ . Такой выбор объясняется следующим образом. Амплитуда функции (5) падает вдвое, когда аргумент меняется от нуля до  $\ln 2$ . Число  $\gamma = \sqrt{\ln 2} / (\lambda h)$  принимается за её полуширину (выраженную в шагах сетки). Указанным  $\lambda$  соответствуют  $\gamma$ , равные 3,5, 4 и 4,5. В свою очередь,  $\gamma = 4$  согласуется с рассматриваемым количеством коэффициентов в том смысле, что они вычисляются по пяти значениям  $G(ih)$  в точках, равномерно расположенных на отрезке длиной  $4h$ .

Для построения графиков, изображённых на рис. 2, отношение  $\beta$  бралось из интервала  $]1/9; 1[$ . Если  $\beta = 1/9$ , то имеется решение  $w_j = 1/9, \forall j$ , для которого преобразование (4) сводится к фильтру скользящего среднего. При  $\beta = 1$  дисперсия шума после сглаживания не изменяется. В частности, такое получается когда  $w_0 = 1$ , а все остальные коэффициенты равны нулю. В данном контексте оба эти случая интереса не представляют. На рис. 2 минимальное значение  $\beta$  равно 0,125, а максимальное – 0,99.

Как видно из рис. 2, все зависимости  $\Delta(\beta)$  имеют неглубокие минимумы. Для  $\sigma = 0,05$ , они достигаются при  $\beta$  порядка 0,9 ÷ 0,95, а при увеличении  $\sigma$  до 0,15 смещаются к  $\beta \approx 0,3$ . Это означает, что для шума низкой интенсивности нецелесообразно сильно (в несколько раз) понижать его дисперсию, поскольку при этом полезный сигнал (точные проекции) претерпит большие искажения. Желаемый эффект – повышение качества томограммы – может быть достигнут посредством увеличения ширины корреляционной функции помехи в процессе сглажива-

ния. Если же шум значительный, то добиться уменьшения ошибки реконструкции исключительно этим способом нельзя, нужно также подавлять его амплитуду.

Зависимости  $\Delta(\lambda)$  изображены рис. 3,а,б. Кривые 1, получены при  $\beta = 0,3$ , кривые 2 – при  $\beta = 0,6$ , кривые 3 – при  $\beta = 0,9$ ; рис. 3,а соответствует  $\sigma = 0,05$ , а рис. 3,б –  $\sigma = 0,15$ . Рис. 3 показывает, что для любых  $\beta$  и  $\gamma$  минимум ошибки реконструкции достигается при  $\lambda \approx 9$ . Это согласуется с данными, приведёнными на рис. 2.

Рис. 3 также подтверждает наблюдение, сделанное в связи с рис. 2: если уровень шума невысокий, то, применяя рассматриваемый подход, не следует стремиться существенно уменьшать его дисперсию. В частности, на рис. 3,а кривая с  $\beta = 0,9$  проходит ниже остальных, а на рис. 3,б, для которого  $\sigma$  в три раза больше, она располагается выше, чем другие кривые.

В целом по вычислительному эксперименту был сделан вывод о том, что лучший результат получается, когда полуширина функции  $G(ih)$  близка к  $\gamma_{opt} = nh$ . Этому можно дать следующее объяснение. Поскольку исходный шум некоррелированный, и сглаживание проводится по  $2n+1$  точкам (при этом фильтрация является не рекурсивной), эффективный радиус корреляции должен быть порядка

$(2n+1)h/2 = nh$ , т.е. именно  $\gamma_{opt}$ . Далее, если веса  $w_j$  вычисляются в предположении, что  $\gamma > \gamma_{opt}$  задача оказывается не согласованной: фильтр не может обеспечить заявленной величины  $\gamma$ . Если же, наоборот, берётся  $\gamma < \gamma_{opt}$ , то корреляционная функция помех после сглаживания получается более узкой, что, как было показано в работе [5], ведёт к росту ошибки реконструкции.

Посредством численного моделирования предлагаемый метод сравнивался с другими известными процедурами подавления шума. На рис. 4 приведены зависимости  $\Delta$  от величины параметра  $\sigma$ . Для кривой 1 проецировались согласно (4), для кривых 2 и 3 – соответственно средним и медианой в скользящем окне, содержащем девять точек, для кривой 4 – регуляризующими сплайнами [11]. Как следует из рис. 4, разработанный алгоритм обеспечивает более высокую точность, чем усреднение и медиана (в частности, при  $\sigma = 0,05$  ошибка реконструкции уменьшается приблизительно в 1,5 и 2,6 раза), но несколько уступает сплайнам. Однако последние значительно сильнее остальных фильтров сглаживают также и точные данные, что приводит к размытию мелких структур на изображении, как это хорошо заметно на рис. 7,д, см. ниже.

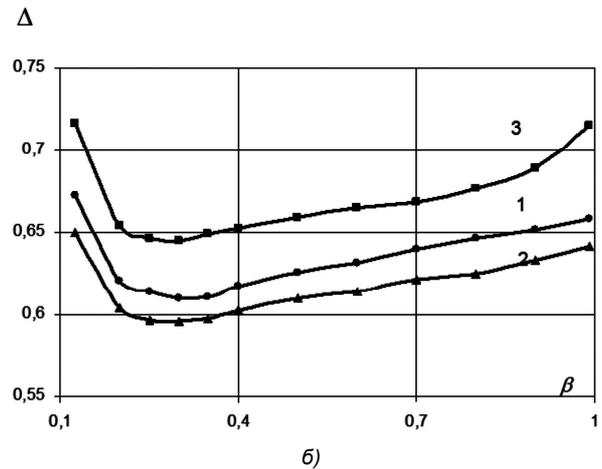
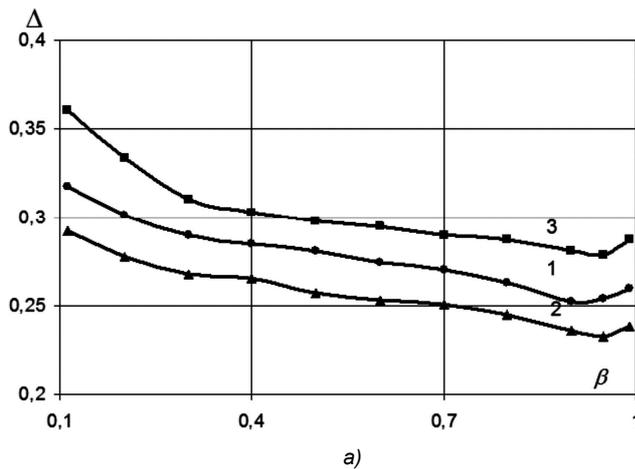


Рис. 2. Зависимости ошибки реконструкции от отношения дисперсии шума после сглаживания к дисперсии исходного шума:

а)  $\sigma = 0,05$ ; б)  $\sigma = 0,15$ . Кривые 1 –  $\gamma = 3,5$ ; 2 –  $\gamma = 4$ ; 3 –  $\gamma = 4,5$  шагов сетки

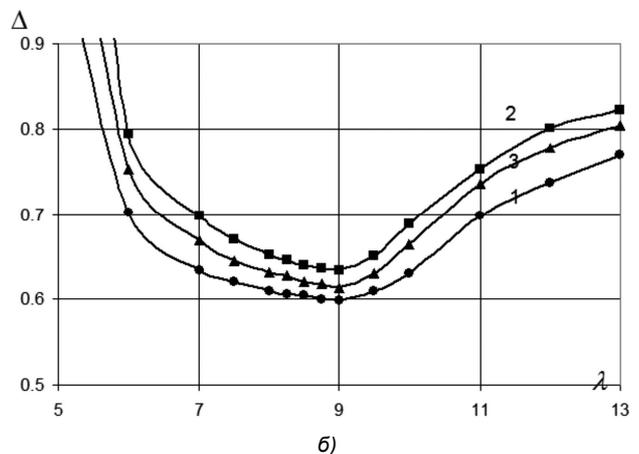
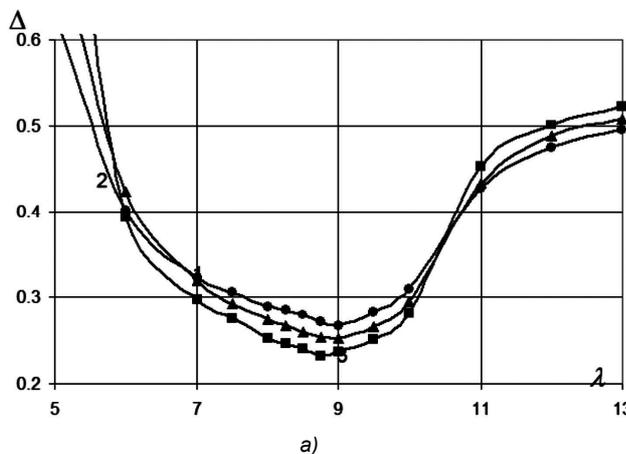


Рис. 3. Зависимости ошибки реконструкции от параметра  $\lambda$ , определяющего ширину корреляционной функции после сглаживания:

а)  $\sigma = 0,05$ ; б)  $\sigma = 0,15$ . Кривые 1 –  $\beta = 0,3$ ; 2 –  $\beta = 0,6$ ; 3 –  $\beta = 0,9$

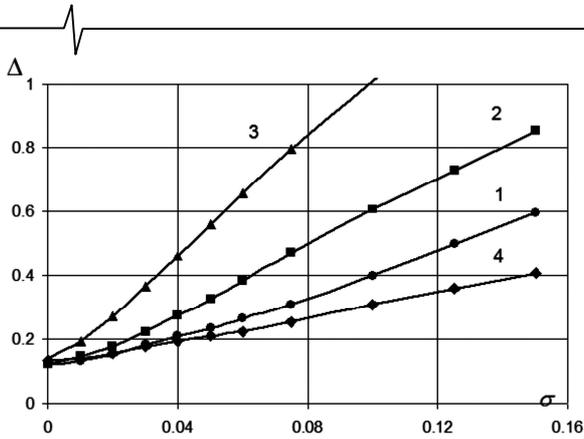


Рис. 4. Зависимости ошибки реконструкции от уровня шума. Кривая 1 – предлагаемый метод, 2 – усреднение, 3 – медиана, 4 – сплайны

Некоторые из полученных томограмм представлены на рис. 5 – рис. 7. Для рис. 5,а и рис. 6 параметр  $\sigma$  равен 0,01, а для рис. 5,б и рис. 7 он составляет 0,05. Известно, что без применения стабилизирующих процедур, реконструкция алгоритмом Шеппа-Логана является неустойчивой [2, 3]. Это иллюстрирует рис. 5, по которому видно, что в отсутствие предварительной обработки данных уже при относительно невысоком уровне шума качество восстановления становится неудовлетворительным.

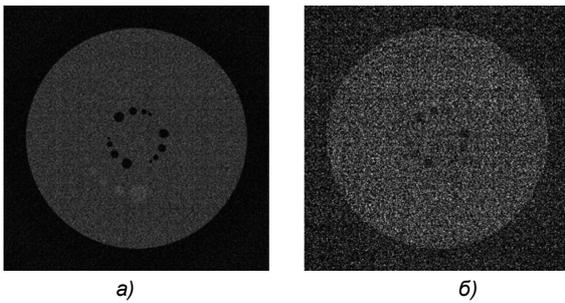


Рис. 5. Томограммы, полученные по зашумлённым данным без сглаживания: а)  $\sigma = 0,01$ ,  $\Delta = 0,553$ ; б)  $\sigma = 0,05$ ,  $\Delta = 2,218$

Для рис. 6, рис. 7 варианты а), б), с) и д) соответствуют сглаживанию проекций фильтром (4), усреднению

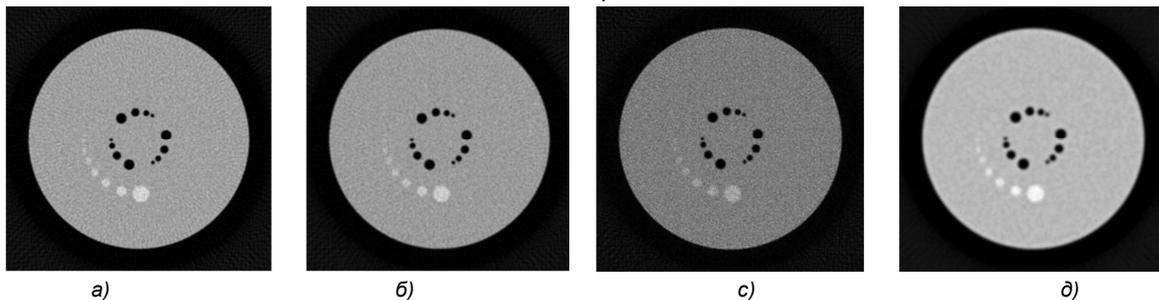


Рис. 6. Томограммы, шум в данных соответствует  $\sigma = 0,01$ : а) предлагаемый метод,  $\Delta = 0,132$ ; б) усреднение,  $\Delta = 0,145$ ; в) медианный фильтр  $\Delta = 0,193$ ; г) сплайны  $\Delta = 0,138$

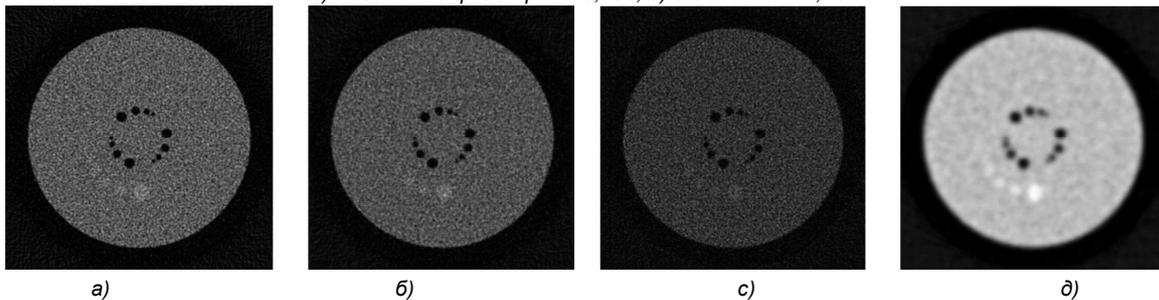


Рис. 7. Томограммы, шум в данных соответствует  $\sigma = 0,05$ : а) предлагаемый метод,  $\Delta = 0,232$ ; б) усреднение,  $\Delta = 0,326$ ; в) медианный фильтр  $\Delta = 0,558$ ; г) сплайны  $\Delta = 0,209$

ем, медианой и сплайнами. Коэффициенты  $w_j$ , определённые описанным в разделе 2 способом, имеют следующие значения  $w_0 = 0,168$ ,  $w_1 = 0,152$ ,  $w_2 = 0,119$ ,  $w_3 = 0,073$ ,  $w_4 = 0,072$  для  $\sigma = 0,01$  и  $w_0 = 0,172$ ,  $w_1 = 0,156$ ,  $w_2 = 0,108$ ,  $w_3 = 0,076$ ,  $w_4 = 0,074$  для  $\sigma = 0,05$ . Небольшое различие объясняется тем, что для  $\sigma = 0,01$  отношение  $\beta$  бралось равным 0,95, а для  $\sigma = 0,05$  оно равнялось 0,9.

**Заключение**

Работа посвящена актуальной проблеме повышения устойчивости решений в задачах томографии. Для этой цели применяется предварительная обработка одномерных проекций посредством симметричного цифрового фильтра. Вычисление его коэффициентов  $w_j$  основывается на предыдущих исследованиях автора [5], где было получено, что среди рассмотренных искажений данных, имеющих одинаковую дисперсию, наиболее высокая точность восстановления достигается для гауссового шума. Исходя из этого, был разработан алгоритм, включающий процедуру перебора, для нахождения набора  $w_j$ , обеспечивающего минимум невязки между заданной кривой Гаусса и корреляционной функцией сглаженной помехи.

В процессе численного моделирования показано преимущество предлагаемого метода перед скользящими средним и медианой. В частности, когда стандартное отклонение шума находится в интервале от 5 до 15% от максимальной величины проекции, он приводит к ошибке в 1,4 ÷ 1,5 раза меньше, чем та, которую даёт усреднение (при одинаковом размере окна обоих фильтров, составляющем девять точек). Кроме того из серии экспериментов, в которых длина фильтра  $2n+1$  варьировалась от пяти до пятнадцати точек, установлено, что лучший результат реконструкции получается, когда полуширина кривой Гаусса, используемой при расчете  $w_j$ , равна  $n$  шагов сетки.



### Литература

1. Хермен Г.Т. Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии. Пер. с англ. М.: Мир, 1983. – 342 с.
2. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии: Пер. с англ. М.: Мир, 1990. – 279 с.
3. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Тимонов А. А. Математические задачи компьютерной томографии. М: Наука, 1987. – 158 с.
4. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1. Случайные процессы. М.: Наука, 1976.– 484 с.
5. Лихачев А. В. Шibaева Ю. А. Зависимость точности томографической реконструкции от корреляционной функции шума в проекционных данных // Цифровая обработка сигналов. 2015. № 2. – С. 28-34.
6. Ramachandran G.N., Lakshminarayanan A.V. Three-dimensional reconstruction from radiographs and electron micrographs: application of convolutions instead of Fourier transforms. // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. 1971. V. 68. – P. 2236-2240.
7. Shepp L. A., Logan B. F. The Fourier reconstruction of a head section. // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1974. V. 21, No. 3. – P. 21-43.
8. Ерохин В.А., Шнейдеров В.С. Трехмерная реконструкция (машинная томография). Моделирование на ЭВМ. // Препринт No.23, ЛНИВЦ; Ленинград, 1981.
9. Лихачёв А. В. Исследование  $1/z^2$  фильтрации в алгоритмах томографии. // Автометрия. 2007. Т. 43, № 3. – С. 57-64.
10. Лихачёв А.В. Алгоритм двойной фильтрации для двумерной томографии. // Математическое моделирование. 2009. Т. 21, № 8. – С. 21-29.
11. Василенко В. А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. Новосибирск: Наука, 1983. – 214 с.