

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОГО БИПОЛЯРНОГО СИГНАЛА

Нефедов В.И., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой телекоммуникационных систем (ТС) Московского государственного технического университета радиотехники, электроники и автоматики (МИРЭА), e-mail: nefedov@mirea.ru;

Решетняк С.А., д.ф.-м.н., профессор кафедры ТС МИРЭА, e-mail: reshets@bk.ru;

Третьяков Г.Н., к.т.н., доцент кафедры ТС МИРЭА, e-mail: gennady.tretyakov@rambler.ru.

Ключевые слова: биполярный сигнал, метод Эйлера-Коши, фильтрация, нелинейный фильтр, цифровое моделирование.

Введение

При прохождении сигнала и внешнего шума через нелинейную систему возникают процессы их взаимодействия, которые описываются уравнением, аналогичным уравнению движения броуновской частицы в определённом потенциальном поле при действии на неё гармонического сигнала и практически белого шума в виде стационарного гауссовского случайного процесса со временем корреляции, существенно меньшим других характерных времён задачи. В нелинейных системах с потенциальной функцией, имеющей два устойчивых положения равновесия и потенциальный барьер между ними, наблюдается рост выходного отношения сигнал/шум (S/N) с увеличением дисперсии шума в определённой области её изменения. Процесс сопровождается передачей энергии шума в слабый сигнал. Такое усиление сигнала вызвано совпадением его частоты со средней частотой Крамерса переходов через потенциальный барьер в результате действия шума. Этот эффект получил название стохастического резонанса и в настоящее время детально исследован [1-3].

В случае, когда мощность сигнала соизмерима с дисперсией шума в нелинейных системах возникает эффект стохастической фильтрации (СФ) сигнала, в результате которого отношение S/N на выходе нелинейной системы превышает аналогичное отношение на её входе. Данный эффект впервые был обнаружен в результате численного анализа [4] следующего уравнения:

$$\tau \frac{du}{dt} + W'(u) = a(t) + \xi(t), \quad (1)$$

где u – реакция на выходе системы, $W(u) = bu^4/4$ – потенциальная функция критического вида. Внешнее воздействие на систему определялось суммой гармонического сигнала $a(t) = a_0 \cos(\omega_0 t)$ и практически белого шума $\xi(t)$, $W'(u)$ – производная потенциальной функции, τ – постоянная времени системы. Теоретический анализ этого эффекта представлен в [5] и показывает, что СФ возникает в результате подавления шума сигналом.

Поскольку входной сигнал имеет в спектре всего одну гармонику, то отношение S/N определялось как отношение

Проведено цифровое моделирование процесса прохождения слабого сигнала и шума через нелинейный активный фильтр низкой частоты. Сигнал представлял собой периодическую последовательность биполярных импульсов с одинаковыми амплитудами. Были найдены области параметров нелинейного фильтра и сигнала, в которых коэффициент передачи по отношению сигнал/шум существенно выше, чем у линейного фильтра. Показано, что наилучшие условия фильтрации реализуются для сигналов типа меандра, амплитуда которых соизмерима со среднеквадратическим значением мощности шума.

квадрата амплитуды сигнала (мощности гармоники) к спектральной плотности шума на частоте ω_0 сигнала. Фильтрующие свойства системы оценивались на основе коэффициента передачи $q = (S/N)_{\text{вых}} / (S/N)_{\text{вх}}$. Очевидно, что для линейной системы $q = 1$. В [4] были найдены области параметров системы и сигнала, где $q = 1.3 \dots 1.4$. Эффект СФ наблюдался [6-8] также в результате аналогового моделирования (1) для акустических сигналов прямоугольной формы.

Результаты численного моделирования [4] были экспериментально подтверждены в [9] для нелинейного фильтра низкой частоты первого порядка, построенного на основе двух одинаковых туннельных диодов с постоянными напряжениями смещения. Отметим, что порядок фильтра совпадает с порядком стохастического дифференциального уравнения, описывающего прохождение сигнала и шума через систему. В [9] было установлено, что уравнению (1) подчиняется напряжение u на ёмкости фильтра с потенциальной функцией

$$W(u) = (1 - R_n A)u^2 / 2 + R_n B u^4 / 4, \quad (2)$$

где R_n – сопротивление нагрузки, A и B – параметры результирующей вольт-амперной характеристики системы диодов, $\tau = R_n C$ – постоянная времени, C – величина ёмкости в фильтре. Исследования [9] показали, что эффект СФ носит пороговый характер и реализуется, если мощность сигнала соизмерима с дисперсией шума. В [10] СФ была обнаружена также в нелинейном фильтре второго порядка. Так как аналитические методы исследования указанных эффектов достаточно трудоёмки, то большое значение в их анализе имеют численные методы. В последнее время в [11] разработан метод, показавший, что СФ имеет место не только в фильтрах низких, но и высоких частот сигнала, схемы которых представлены в [11].

Цель данной работы – на основе разработанного в [11] подхода проанализировать эффект СФ в случае сигнала, который в спектре имеет не одну, а большое число гармоник. Локальное по спектру определение отношения S/N , используемое в случае сигнала с одной гармоникой, здесь неприемлемо. Фильтрующие свойства системы, на наш взгляд, удобнее оценивать на основе интегрального по спектру отношения S/N :

$$S/N = \sum_n |A_n|^2 / \sigma^2,$$

где $\sigma^2 = \sum_n |\xi_n|^2$ – дисперсия шума с комплексными амплитудами его гармоник ξ_n , A_n – амплитуды гармоник сигнала. Данное определение S/N , применяемое как на входе, так и на выходе фильтра, есть отношение мощностей сигнала и шума. Сразу отметим, что при данном определении S/N коэффициент передачи q может принимать значения, существенно превышающие единицу даже для линейной системы, поэтому полученные результаты сравнивались с данными для линейного фильтра.

Параметры нелинейного фильтра и сигнала

Для исследования в настоящей работе был рассмотрен нелинейный фильтр низких частот первого порядка с потенциалом (2) критического вида, что и в эксперименте [9] со следующими параметрами:

$R_n = A^{-1} = 65 \text{ Ом}$ и $C = 15 \text{ нФ}$. После введения масштабов по напряжению $u_M = (BR_n)^{-1/2} = 0.5 \text{ В}$ и времени $t_M = \tau = 10^{-6} \text{ с}$ безразмерное уравнение (1) для напряжения на ёмкости принимает вид

$$\frac{du}{dt} + u^3 = h(t) + \zeta(t), \quad (3)$$

где $h(t) = a(t)/u_M$ и $\zeta(t) = \xi(t)/u_M$ – соответственно безразмерные сигнал и шум. В уравнении (3) напряжение u также является безразмерным.

В качестве входного сигнала рассматривалась периодическая последовательность биполярных прямоугольных импульсов одинаковой амплитуды h , длительности τ_u и периодом T_c . Вид входного сигнала представлен на рис. 1. На каждом периоде сигнал имеет нулевое среднее значение. На первом периоде

$$h(t) = \begin{cases} h, & 0 < t < \tau_u, \\ -h, & T_c/2 < t < T_c/2 + \tau_u. \end{cases} \quad (4)$$

Шаг решения уравнения (3) по времени Δt выбирался равным времени корреляции шума $\tau_k = 10^{-7} \text{ с}$ [9]. Поскольку τ_k есть величина на порядок меньшая постоянной τ времени фильтра, то шум можно считать практически белым. При этом использовалась модель шума, в которой не детализируется его поведение на интервале времени τ_k . В каждой точке отсчёта времени $t_n = n\Delta t$ включался датчик случайных чисел, распределённых по нормальному закону с нулевым средним значением и дисперсией $\sigma^2 = \xi^2$, где черта обозначает среднее зна-

чение по времени. Очевидно, что после усреднения по большому числу реализаций шума, его корреляционная функция имеет вид $\langle \zeta(t_n)\zeta(t_k) \rangle = \sigma^2 \delta_{nk}$. Полное число N отсчётов по времени определялось длительностью T исследуемых процессов: $N = T / \Delta t$.

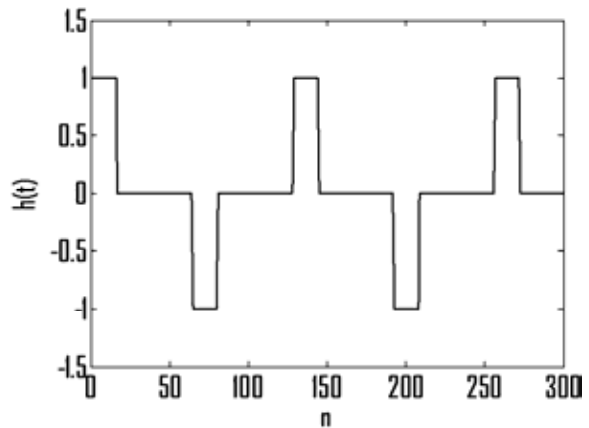


Рис. 1. Форма сигнала на входе фильтра в зависимости от числа n отсчётов моментов времени $t_n = \Delta t n$.

Параметры сигнала: $h = 1$, $\eta = 0.125$ и $f_c = s\Delta f = 78 \text{ кГц}$

В случае детерминированной правой части уравнения (3) его решение находится с помощью общепринятого метода Рунге-Кутты. Для исследуемого стохастического дифференциального уравнения и выбранной модели шума, с нашей точки зрения, наиболее корректным методом решения (3) является численный метод Эйлера-Коши [11].

Предварительный анализ спектров сигналов. Отношение сигнал/шум

Спектры входных и выходных процессов находились на основе дискретного преобразования Фурье (ДПФ), которое содержит полное число N отсчетов времени наблюдения. При этом амплитудный спектр является симметричным относительно гармоники с номером $N/2$, частота которой соответствует теореме отсчетов: $f_{\max} = \Delta f N / 2 = 1 / (2\tau_k)$, где $\Delta f = 1/T$ – разность между соседними частотами. Отметим, что при $N = 2^m$ ДПФ требует меньшее число вычислений, поэтому в работе полагалось $N = 2^{14}$, что соответствует экспериментальному значению $T = 1.6 \text{ мс}$, которое несколько превышает длительность сигналов в [9].

Простые вычисления показывают, что отличные от нуля амплитуды входного сигнала (4) имеют вид

$$|h_{(2k-1)s}| = \frac{h}{\pi(2k-1)} \left[2(1 - \cos(2\pi(2k-1)\eta)) \right]^{1/2}, \quad (5)$$

где $\eta = \tau_u / T_c$ – безразмерная длительность импульса, $s = f_c / \Delta f$ – число, определяющее частоту сигнала f_c или число периодов сигнала на интервале времени рассмотрения T .

Сопоставление точных значений (5) с расчетными величинами амплитуд на основе ДПФ показало, что метод ДПФ приводит к правильным результатам практически во всей области спектра кроме малой области вбли-

зи его границы, где погрешность вычислений не превышала 50 %. Анализ спектра выходного сигнала в отсутствие шума показал, что кроме частот основных гармоник с номерами $n = (2k - 1)s = s, 3s, 5s, \dots$ он содержит гармоники с комбинационными частотами, амплитуды которых малы. На рис. 2 изображены два выходных сигнала, один из которых является точным, так как построен с учётом всех гармоник и удовлетворяет начальному условию $u(0) = 0$, а второй построен только с учётом основных гармоник. Видно, что эти два решения незначительно отличаются между собой только на начальной стадии первого периода сигнала. На остальных периодах эти решения совпадают.

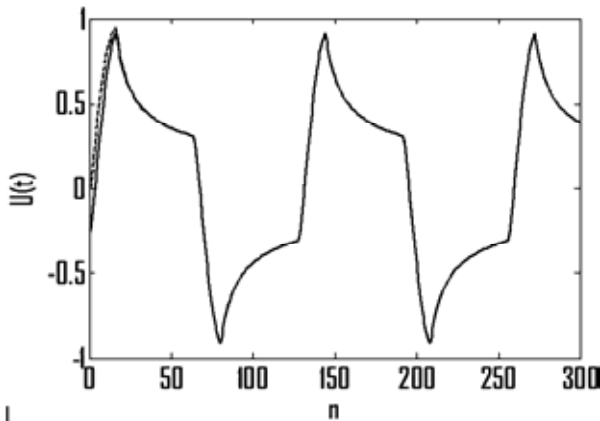


Рис. 2. Сигнал на выходе фильтра в зависимости от числа n отсчётов моментов времени $t_n = \Delta t n$,

соответствующий входному сигналу на рис. 1. Пунктирная кривая построена с учётом всех частот выходного сигнала, а сплошная кривая – с учётом только его основных гармоник

После установления номеров $n = (2k - 1)s$ сигнальных гармоник было использовано следующее интегральное по спектру отношение S/N :

$$S/N = \sum_{k=1}^{(2k-1)s \leq N} |A_{(2k-1)s}|^2 / \sigma^2, \quad (6)$$

где $|A_n|$ – амплитуды гармоник сигнала с частотами $\omega_n = 2\pi\Delta f n$, которые соответственно для сигналов на входе и выходе фильтра имеют вид

$$A_n^{(вх)} = \sum_n [h(t) + \zeta(t)] \exp(j\omega_n t),$$

$$A_n^{(вых)} = \sum_n u(t) \exp(j\omega_n t).$$

В расчёте дисперсии шума σ^2 сигнальные гармоники во внимание не принимались.

Результаты вычислений для различных реализаций входного шума незначительно отличались друг от друга, поэтому полученные ниже данные усреднялись по количеству пусков K . Для определения числа K проверялось свойство эргодичности шума, т.е. равенство его следующих средних значений по времени и по ансамблю реализаций:

$$\overline{\zeta^2} = \frac{1}{T} \int_0^T \zeta^2(t) dt = \sum_{n=0}^{N-1} |\zeta_n|^2 \cong \langle \zeta^2 \rangle = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K |\zeta^{(i)}|^2,$$

где ζ_n – амплитуды гармоник шума, $\zeta^{(i)}$ – значение

шума в фиксированный момент времени на его i -ой реализации. Как показали вычисления, это равенство при $K = 200$ выполняется с относительной погрешностью не более 1 %. Отсюда все полученные результаты усреднялись по 200 реализациям входного случайного процесса.

Основные результаты цифрового моделирования

Исследуемая нелинейная система является низкочастотным фильтром и в силу определения (8) выходное интегральное отношение S/N может существенно превышать входное отношение даже для линейной системы. Поэтому в работе проводилось сравнение коэффициента $q = (S/N)_{вых} / (S/N)_{вх}$ передачи отношения S/N с аналогичным коэффициентом для линейной системы или RC-фильтра, который реализуется при замене в уравнении (3) u^3 на u .

На рис. 3 представлена зависимость коэффициента передачи q от безразмерной длительности импульса η . Из неё следует, что при $\eta > 0.3$ нелинейная фильтрация преобладает над линейной, а для сигналов типа меандра ($\eta \cong 0.5$) коэффициент передачи q существенно превышает значение, соответствующее линейной системе. Эта зависимость объясняется тем, что с ростом длительности импульса большое число сигнальных гармоник расположено в области низких частот и не подавляются при фильтрации.

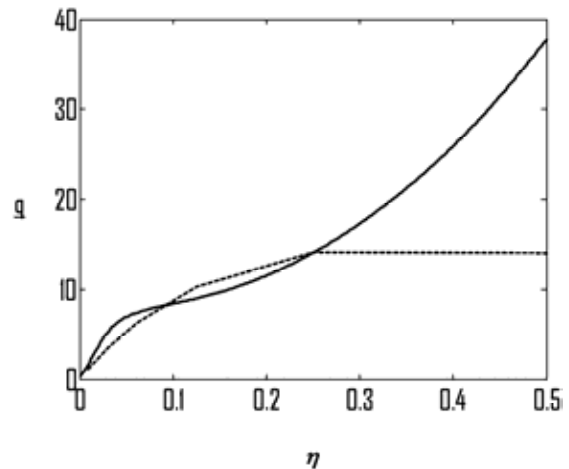


Рис. 3. Зависимость коэффициента передачи q от нормированной длительности импульса $\eta = \tau_u / T_c$ для частоты $f_c = 78 \text{ кГц}$ сигнала. Сплошная кривая – результаты в случае нелинейного фильтра, пунктирная кривая – данные для линейного RC-фильтра

Ниже основные результаты анализа приводятся для сигнала – меандра. На рис. 4 для двух значений параметра τ , определяемого величиной ёмкости C , представлены зависимости q от частоты сигнала f_c . Из них следует, что в максимуме частотной зависимости, которая наблюдается в области 5...10 кГц, коэффициент передачи q для нелинейного фильтра в 4 раза выше, чем у линейного фильтра. Падение q с ростом f_c является стандартной зависимостью для низкочастотного фильтра. С уменьшением f_c сигнальный спектр сдвига-

ется в низкочастотную область, в которой мощность выходного шума возрастает, в результате этого происходит падение q . С ростом параметра τ диапазон подавления высоких частот увеличивается, что приводит к увеличению выходного отношения S/N и q . Однако дальнейшее увеличение τ может привести к подавлению амплитуд гармоник сигнала и уменьшению коэффициента передачи q .

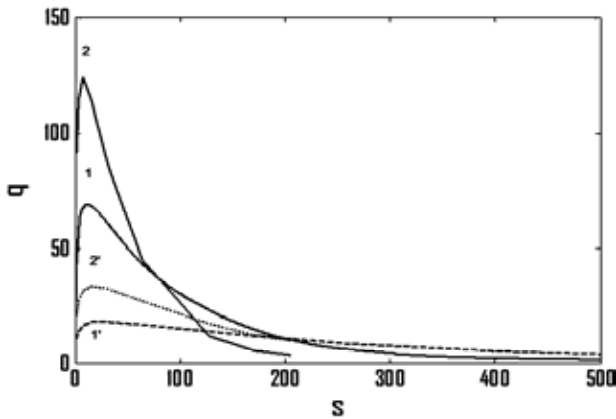


Рис. 4. Зависимость q от числа s , определяющего частоту $f_c = \Delta f s$ Гц сигнала. Сплошные кривые – результаты для нелинейного фильтра, пунктирные кривые – данные для линейного RC-фильтра при $h = 0.4$. Кривые 1 и 1' соответствуют $C = 15$ нФ, а кривые 2 и 2' – ёмкости $C = 30$ нФ

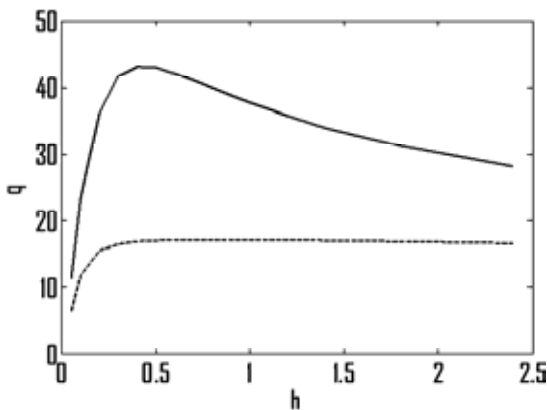


Рис. 5. Зависимость коэффициента передачи q от амплитуды h меандра для его частоты $f_c = 39$ кГц. Сплошная кривая – результаты в случае нелинейного фильтра, пунктирная кривая – данные для линейного RC-фильтра

Для фиксированных значений мощности шума, частоты и длительности импульса получена зависимость q от амплитуды h импульса, которая изображена на рис. 5. Как и в случае [9] гармонического сигнала, эта кривая указывает на пороговый характер возникновения эффекта СФ. Увеличение q с ростом h объясняется подавлением шума сигналом. При больших амплитудах h , как и в отсутствие шума, коэффициент передачи падает. На рис. 6 представлена зависимость q от среднеквадратичной интенсивности шума σ при фиксированных остальных параметрах фильтра и сигнала.

Отметим, что с ростом σ выходное отношение S/N монотонно убывает. Однако скорости убывания входного и выходного отношений S/N с ростом σ отличаются, поэтому кривая $q(\sigma)$ имеет максимум. Приведённые результаты численного моделирования практически не изменялись при варьировании начального условия и уменьшении в два раза времени корреляции шума.

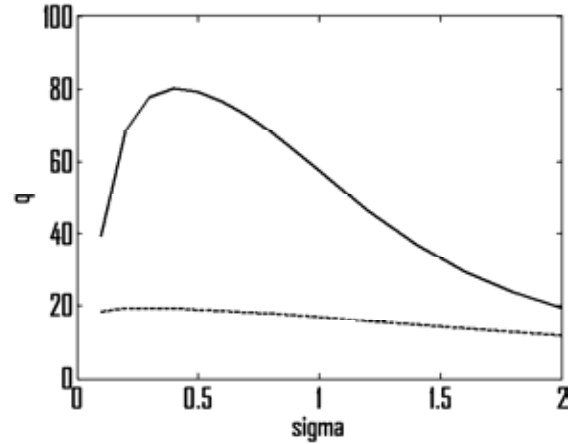


Рис. 6. Коэффициент передачи q в зависимости от среднеквадратичной интенсивности шума $\sigma = \sigma / u_m$ для меандра с высотой импульсов $h = 0.4$ и частотой $f_c \cong 10$ кГц

Заключение

Проведённое исследование позволяет сделать следующие выводы. Основные закономерности, присущие эффекту СФ в случае гармонического сигнала, сохраняются и в случае сигналов типа меандра. Численный анализ низкочастотного нелинейного активного фильтра позволил установить область параметров сигнала и фильтра, в которой его фильтрующие способности существенно выше, чем у аналогичного линейного фильтра. Зависимости коэффициента передачи q по отношению сигнал/шум указывают на наличие оптимальных частот сигнала, его амплитуды и мощности шума для достижения наибольших значений q . Оптимальные условия нелинейной фильтрации реализуются при мощностях указанных сигналов соизмеримых с дисперсией шума. Вполне возможно, что существуют другие формы сигналов, в случае которых их стохастическая фильтрация будет наблюдаться более ярко. Однако, на наш взгляд, оптимальные формы сигналов в основном определяются типом нелинейного фильтра.

Литература

1. Gammaitoni L., Hanggi P., Jung P., Marchesoni F. Stochastic resonance. Rev. of Mod. Phys., 1998, v.70, №1, p. 223-287.
2. Анищенко В.С., Нейман А.Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л. Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка. УФН, 1999, т.169, №1, с. 7-38.
3. Климонтович Ю.Л. Что такое стохастическая фильтрация и стохастический резонанс? УФН, 1999, т.169, №1, с. 39-47.

4. Hanggi P., Inghiosa M.E., Fogliatti D., Bulsara A.R. Non-linear stochastic resonance: The saga of anomalous output-input gain. Phys. Rev. E., 2000. v.62, №5, p. 6155-6163.

5. Решетняк С.А., Третьяков Г.Н. Теоретическое исследование эффекта стохастической фильтрации. Радиотехника и электроника, 2013, т. 58, №4, с. 360-366.

6. Gingl Z., Makra P., Vajtai R. High signal-to-noise ratio gain by stochastic resonance in a double well. Fluctuation and Noise Lett., 2001, v.1, No.3, p. L181-L188.

7. Makra P., Gingl Z., Kish L.B. Signal-to-noise ratio gain in non-dynamical and dynamical bistable stochastic resonator. Fluctuation and Noise Lett., 2002, v.2, No.3, – p. L147-L155.

8. Makra P., Gingl Z., Fulei T. Signal-to-noise ratio gain in stochastic resonators driven by coloured noises. Phys. Lett., 2003, v.317, No.3-4, p. L228-L232.

9. Домбровский А.Н., Решетняк С.А. Стохастический резонанс и фильтрация сигналов в нелинейной электрической системе второго порядка. Радиотехника, 2007, №9, с. 19-25.

10. Домбровский А.Н., Решетняк С.А. О стохастической фильтрации сигналов в нелинейных электрических

системах. Радиотехника и электроника, 2009, т.54, №11, с. 1369-1371.

11. Абоелазм М.А., Мельчаков В.Н., Решетняк С.А., Третьяков Г.Н. Исследование цифровой модели нелинейного активного фильтра первого порядка. Цифровая обработка сигналов, 2014, №4, с. 62-64.

IC FILTERING OF PERIODIC BIPOLAR SIGNAL

Nefedov V.I., Reshetnyak S.A., Tret'yakov G.N.

The process of passing a weak signal and noise through non-linear active low frequency filter was numerically investigated. The signal was a periodic sequence of bipolar pulses with the same amplitudes. Optimal areas of nonlinear filter and signal were found in which the signal/noise ratio is substantially higher than that of a linear filter. Shows that the best conditions are for signals like meandering, the amplitude of which is comparable with the value of root mean-square of the noise power.



«РАДИОЭЛЕКТРОННЫЕ СРЕДСТВА ПОЛУЧЕНИЯ, ОБРАБОТКИ И ВИЗУАЛИЗАЦИИ ИНФОРМАЦИИ» (РСПОВИ-2015)

28 - 30 октября 2015 г. Москва

All-Russian conference (with the international participation)

«RADIO-ELECTRONIC MEANS OF RECEIVING, PROCESSINGS AND INFORMATION VISUALIZATION» (RMRPIV-2015)



Уважаемые коллеги!

ПРИГЛАШАЕМ ВАС ПРИНЯТЬ УЧАСТИЕ В РАБОТЕ КОНФЕРЕНЦИИ

ОРГАНИЗАТОРЫ:

- Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН
- Российское научно-техническое общество радиотехники, электроники и связи им. А.С. Попова
- Министерство образования и науки РФ
- ОАО «Конструкторское бюро – 1»
- Вневедомственный экспертный совет по проблемам воздушно-космической обороны

ПРИ УЧАСТИИ:

- Федеральное агентство по промышленности РФ
- ОАО «Концерн радиостроения «Вега»
- ОАО «Корпорация «Комета»
- ФГУП «НИИР»
- Академия инженерных наук имени академика А.М. Прохорова
- Владимирский государственный университет
- Московский авиационный институт
- Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
- Московский институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет)
- Московский технический университет связи и информатики
- Московский институт электронной техники
- Московский энергетический институт
- Рязанский государственный радиотехнический университет
- Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. А.М. Бонч-Бруевича
- Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
- Ульяновский государственный технический университет
- Ярославский государственный университет

Подробная информация на сайте: www.rntores.ru