

УДК 621.391

МЕТОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ СИНТЕЗА АПЕРИОДИЧЕСКИХ БИНАРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И МНОГОФАЗНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ БАРКЕРА

*Потехин Е.Н., аспирант Поволжского государственного технологического университета,
e-mail: potegor@yandex.ru*

*Шувалов А.С., аспирант Поволжского государственного технологического университета,
e-mail: shuvalov.as@gmail.com*

Леухин А.Н., д.ф.-м.н., профессор кафедры информационной безопасности Поволжского государственного технологического университета

Ключевые слова: бинарные последовательности, код Баркера, автокорреляционная функция, боковые лепестки, многофазные последовательности.

Введение

Бинарные апериодические последовательности с хорошими корреляционными свойствами представляют большой интерес для разработчиков радиолокационных систем. Одним из критериев качества таких последовательностей является минимаксный критерий, когда максимальный боковой лепесток автокорреляционной функции принимает наименьшее возможное значение (MPS – minimum peak sidelobe). На сегодняшний день не существует регулярного метода построения оптимальных минимаксных бинарных последовательностей. Поэтому основным методом построения минимаксных бинарных последовательностей является метод компьютерного перебора, использующий стратегию локальной, глобальной и смешанной оптимизации.

В 1975 году Линдер в работе [1] осуществил полный поиск бинарных MPS последовательностей до длины $N = 40$. Кохен и др. в работе [2] в 1990 году нашли все последовательности до длины $N = 48$. Коксон и Руссо в работе [3] описали алгоритм полного поиска и показали результаты его работы для последовательностей длины $N = 64$. Таким образом, на сегодняшний день, полный поиск бинарных MPS последовательностей был осуществлен для длин $N = 2...48$ и $N = 64$.

Алгоритм поиска

С целью расширения диапазона известных бинарных MPS последовательностей была разработана программа, где в качестве базового метода используется алгоритм, описанный в работе [3]. Данный метод носит название *branch and bound*, который заключается в последовательном «наращивании» последовательности, начиная с ее краев. Бинарная последовательность представляется в виде двух частей кода одной длины $N/2$ – левого и правого полукодов. На начальном этапе поиска $N = 2$, т.е. устанавливаются крайний левый бит левого полукода x_0 и крайний правый бит правого полукода x_{N-1} . Они образуют своеобразную пару бит x_0x_{N-1} . Эта пара может принимать четыре возможных варианта

значений: «00», «01», «10» и «11». На первом этапе последовательность выглядит как: $a = 0, x_1, x_2, \dots, x_{N-3}, x_{N-2}, 0$. Затем находится первый боковой лепесток импульсной автокорреляционной функции последовательности. Если $|r_\tau| \leq k$, где k – заданный максимально возможный уровень бокового лепестка, тогда можно продолжить построение последовательности и добавить второй слева бит левого полукода x_1 и второй справа бит правого полукода x_{N-2} . Тогда последовательность примет вид $a = 00, x_2, \dots, x_{N-3}, 00$. Если $|r_\tau| > k$, тогда необходимо паре x_0x_{N-1} присвоить следующее возможное значение бит: «01». В этом случае последовательность примет вид $a = 00, x_2, \dots, x_{N-3}, 10$. Подобный алгоритм легко представить в виде графа, где вершинами графа являются все возможные значения пар (рис. 1). В таком случае поиск последовательностей осуществляется обходом графа в глубину.

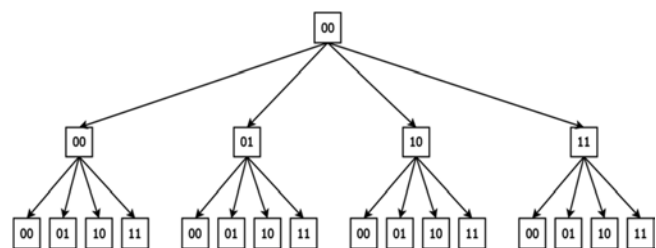


Рис. 1. Представление алгоритма полного поиска в виде графа

Проверка бокового лепестка при каждом изменении значения какой-либо пары значительно сокращает время поиска. Аналогичный подход применяется для исключения веток графа, которые порождают эквивалентные решения. Например, пусть на начальном этапе поиска четной последовательности крайние биты последовательности равны $x_0 = 0, x_{N-1} = 0$. Тогда исходная последовательность примет вид $a_0 = 0, x_1, \dots, x_{N-2}, 0$.

Построим эквивалентные решения для исходной последовательности. Преобразование инверсии даст последовательность $a_1 = 1, -x_1, \dots, -x_{N-2}, 1$. Преобразование реверса от каждой последовательности приведет в двум решениям: $a_2 = 0, x_{N-2}, \dots, x_1, 0$ и $a_3 = 1, -x_{N-2}, \dots, -x_1, 1$. И преобразование фазового набега породит еще 4 решения: $a_4 = 0, -x_1, \dots, x_{N-2}, 1$, $a_5 = 1, x_1, \dots, -x_{N-2}, 0$, $a_6 = 0, -x_{N-2}, \dots, x_1, 1$ и $a_7 = 1, x_{N-2}, \dots, -x_1, 0$. В итоге одна неэквивалентная последовательность порождает еще 7 эквивалентных.

Начальная последовательность длины $N = 2$ с заданными значениями $x_0 = 0$, $x_{N-1} = 0$ порождает все остальные возможные значения пар $x_0 x_{N-1}$. Таким образом, из четырех возможных веток графа для обхода остается лишь одна. Аналогичным образом, на следующем уровне при длине последовательности $N = 4$ останется лишь 3 ветки для обхода и т.д.:

$$a0 = 0, 0, x_2, \dots, x_{N-3}, 0, 0;$$

$$a1 = 0, 0, x_2, \dots, x_{N-3}, 1, 0;$$

$$a2 = 0, 1, x_2, \dots, x_{N-3}, 1, 0.$$

Исключения наглядно демонстрирует граф обхода (рис. 2).

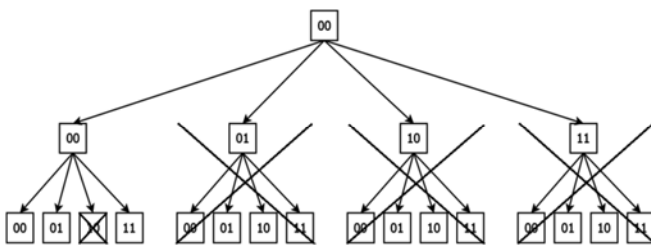


Рис. 2. Графическое представление исключения эквивалентных решений на графе

Данный алгоритм известен уже давно, однако благодаря современной элементной базе и некоторым аналитическим выводам удалось значительно увеличить скорость поиска (рис. 3). Методом аппроксимации результатов работы алгоритма были получены следующие значения линейной сложности алгоритма в зависимости от максимально допустимого значения бокового лепестка (табл. 1).

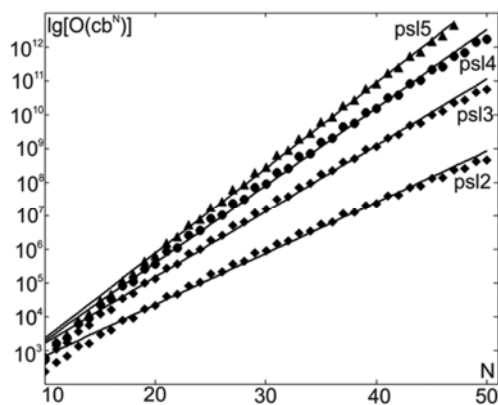


Рис. 3. Линейная логарифмическая сложность алгоритма для разных уровней PSL

Таблица 1. Линейная сложность алгоритма при различных уровнях PSL

Уровень PSL	Линейная сложность
PSL = 2	$O(20.7 \cdot 1.42^N)$
PSL = 3	$O(18.3 \cdot 1.57^N)$
PSL = 4	$O(9.9 \cdot 1.7^N)$
PSL = 5	$O(6.9 \cdot 1.79^N)$

Таким образом, реализованный алгоритм исчерпывающего поиска имеет линейную сложность, сопоставимую со сложностью алгоритмов локального поиска [5-17].

Алгоритм поиска многофазных последовательностей Баркера

Для поиска последовательностей Баркера определим математическую модель системы уравнений, решениями которой непосредственно будут коды Баркера. Фазокодированную импульсную последовательность запишем на основании выражения

$$\gamma_n = \exp(i\phi_n), n = 0, \dots, N-1,$$

где значение фазы ϕ_n на каждом кодовом интервале определяется из диапазона $[0, 2\pi]$, N – длина дискретной фазокодированной последовательности, i – мнимая единица.

При этом $\phi_0 = \phi_1 = 0$, так как исходную последовательность можно поворачивать на заданный угол [18]. Импульсная АКФ дискретной последовательности представляет собой меру схожести последовательности со своими сдвинутыми копиями:

$$r_\tau = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1-r} \gamma_{n+r} \cdot \gamma_n^*, & r = 0, 1, \dots, N-1; \\ \sum_{n=0}^{N-1-|r|} \gamma_{n+r} \cdot \gamma_{n+|r|}^*, & r = 1-N, 2-N, \dots, -1; \\ 0, & |r| \geq N \end{cases}$$

где r_i – отчет автокорреляционной функции, γ_i^* – комплексно-сопряженный кодовый элемент, r – сдвиг. Определим равномерную импульсную последовательность, как последовательность у которой боковые отчеты АКФ равны.

На основе автокорреляционной функции запишем систему нелинейных уравнений для длины N :

$$\begin{cases} \left| \sum_{n=0}^{N-k-1} (\exp(-i\phi_n) \cdot \exp(i\phi_{n+k})) \right| = a, & \text{где } k = 1; \\ \vdots \\ \left| \sum_{n=0}^{N-k-1} (\exp(-i\phi_n) \cdot \exp(i\phi_{n+k})) \right| = a, & \text{где } k = 2 \dots N-2 \end{cases}$$

С учетом того, что модули боковых лепестков ИАКФ обладают свойством симметрии, т.е. $|r_r| = |r_{-r}|$, для построения импульсных многофазных последовательностей запишем следующую систему уравнений

$$\left[\sum_{n=0}^{N-1-r} \cos(\phi_n - \phi_{n+r}) \right]^2 + \left[\sum_{n=0}^{N-1-r} \sin(\phi_n - \phi_{n+r}) \right]^2 = a^2, \quad r = 1, \dots, N-1$$

В результате преобразований системы уравнений получим систему уравнений вида

$$2 \sum_{n=0}^{N-1-r} \cos(\phi_n - \phi_{n+r}) * \left[\sum_{n1=0}^{N-1-r} \cos(\phi_{n1} - \phi_{n1+r}) \right] + 2 \sum_{n=0}^{N-1-r} \sin(\phi_n - \phi_{n+r}) * \left[\sum_{n1=0}^{N-1-r} \sin(\phi_{n1} - \phi_{n1+r}) \right] = a^2 + 1 + r - N, \quad r = 1, \dots, N-1.$$

При $a = 1$ получим систему нелинейных уравнений для построения многофазных последовательностей с равномерной единичной ИАКФ вида

$$2 \sum_{n=0}^{N-1-r} \cos(\phi_n - \phi_{n+r}) * \left[\sum_{n1=0}^{N-1-r} \cos(\phi_{n1} - \phi_{n1+r}) \right] + 2 \sum_{n=0}^{N-1-r} \sin(\phi_n - \phi_{n+r}) * \left[\sum_{n1=0}^{N-1-r} \sin(\phi_{n1} - \phi_{n1+r}) \right] = 2 + r - N, \quad r = 1, \dots, N-1$$

В результате анализа уравнения можно получить следующие аналитические зависимости.

Первое уравнение имеет вид $2 \cos(\phi_{N-2} - \phi_{N-1}) + 2 = 1$, устанавливающий связь между элементами последовательности, которую можно представить в виде

$$\phi_{N-2} = \phi_{N-1} \pm \frac{2\pi}{3}.$$

Второе уравнение всегда принимает вид

$$\cos(\phi_{N-3} - \phi_{N-2}) + \cos(\phi_{N-3} - \phi_{N-1} + \phi_2) + \cos(\phi_{N-2} - \phi_{N-1} + \phi_2) = -1.$$

С учетом полученных выражений, можно записать аналитические зависимости между корнями равномерных импульсных последовательностей:

$$a) \phi_2 - \text{любое}, \phi_{N-2} = \phi_{N-1} \pm \pm \frac{2\pi}{3}, \phi_{N-3} = \phi_{N-2} + \pi = \phi_{N-1} \mp \frac{\pi}{3};$$

$$б) \phi_2 - \text{любое}, \phi_{N-2} = \phi_{N-1} \pm \frac{2\pi}{3},$$

$$\phi_{N-3} = \phi_{N-1} - \phi_2 + \pi;$$

$$в) \phi_2 = \pm \frac{\pi}{3}, \phi_{N-2} = \phi_{N-1} \pm \frac{2\pi}{3}, \phi_{N-3} - \text{любое}.$$

Следующие зависимости между корнями имеют более сложные записи, что увеличивает сложность вывода конечных систем уравнений, но однако может служить опорой для поиска. При поиске импульсных последовательностей можно устанавливать связь между половиной фаз. Каждое из начальных аналитических решений распадается на бинарное дерево зависимостей корней.

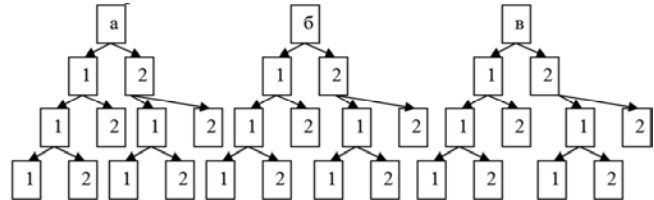


Рис. 4. Дерево аналитических решений ФКП Баркера

Таким образом, мы можем выражать часть фаз последовательности через оставшуюся часть фаз. Аналитически (начиная с шага а-1, а-2 и далее) это довольно трудоемкая задача, но такие зависимости значительно повышают сходимость численных методов.

Выполним численные решения методом Левенберга-Марквардта полученной системы уравнений. Метод Левенберга-Марквардта заключается в градиентном спуске, где каждое приближение определяется из системы

$$[J^T(\vec{x}_k)J(\vec{x}_k) + \lambda_k I] \vec{p}_k = -J^T(\vec{x}_k) \vec{f}(\vec{x}_k),$$

где λ_k – неотрицательная константа, своя для каждого шага, I – единичная матрица, J – якобиан, рассчитанный от вектора решений, f – значение функции, определяющей точность.

С учетом аналитических выражений выполним следующие итерационные решения.

1. Поиск равномерных импульсных последовательностей с единичным уровнем боковых уровней. При этом $\vec{f}(\vec{x}_k)$ задает следующую невязку $\sum f_k^2$, где f_k – значения k -ой функции, что является классическим вариантом для численных решений. Для ускорения вычисления якобиана следует рассчитать значение частных производных.

2. Поиск неравномерных импульсных последовательностей Баркера. В отличие от предыдущего решения, необходимо изменить вычисление функции, где каждое ее значение будет определяться из следующего выражения

$$\sum f_k^2, \text{ если } f_k \leq \beta; \alpha, \text{ если } f_k > \beta,$$

где α – некоторая величина, превышающая квадрат точности по невязке (обычно порядка $1e-5$), β – уровень, при котором считается, что данные уравнения являются оптимальными (уровень k -го бокового лепестка).

Отметим, что если α является константой, то уровень β необходимо подбирать в зависимости от длины; не-

значительное изменение этого параметра кардинально изменяет ход решения системы уравнений.

При численном решении системы уравнений необходимо учитывать аналитические выражения; для этого необходимо выбрать одно из решений (к примеру: а-1-2-1-2-2), а на каждом шаге итерационного цикла нормировать полученные решения (т.е. одну часть фаз относительно другой в зависимости от решений). Более того некоторые аналитические зависимости накладывают ограничения на возможные значения фаз.

На следующем шаге выполним операции понижения уровня боковых лепестков. Примерно половину найденных последовательностей можно свести к многофазным кодам Баркера. Это достигается путем итерационного приближения, при котором необходимо решать исходную систему уравнений со следующими условиями.

1. Начальное значение исходного вектора x_k задается из полученного решения.

2. Выбирается направление решения (к примеру: а-1-2-1-2-2), и вычисляется часть фаз, согласно зависимостям; при этом вычисление фаз необходимо производить на каждой внутренней итерации алгоритма численной оптимизации.

3. Выполняется решение системы уравнений или неравенства с уровнем боковых лепестков равным $\tau_k = \beta - \Delta$.

4. В случае успеха уменьшаем уровень боковых лепестков $\tau_k = \beta - \Delta$ и повторяем решение (d в том числе согласно пункту 2) до тех пор пока последовательность не будет удовлетворять заданным параметрам (начальное значение для итерационного метода выбираем из пункта 2 и 3).

5. В случае неудачи увеличиваем уровень на половину предыдущего значения $\tau_k = \beta + \frac{\Delta}{2}$; начальное значение вектора оставляем неизменным.

Начальное приращение Δ следует выбирать из соотношения $\Delta = \frac{|r - \beta|}{2}$.

Результаты поиска и статистического анализа бинарных PSL последовательностей

В результате продолжительных вычислений были получены значения полного перебора бинарных MPS последовательностей, а также рассчитаны их статистические параметры, которые приведены ниже. Для полного понимания значений необходимо дать пояснение, по каким признакам проводился статистический анализ.

Последовательность $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-3}, x_{N-2}, x_{N-1}$ является *балансной*, если количество 1 в последовательности равно количеству 0 для четных длин и отличается не больше, чем на единицу – для нечетных длин.

Meritfactor – это характеристика, вычисляемая по формуле

$$F(A) = \frac{N^2}{2 \sum_{\tau=1}^{N-1} (C_A(\tau))^2},$$

где $C_A(\tau)$ – боковой лепесток аperiodической автокорреляционной функции на позиции τ . Данная характеристика тем больше, чем меньше общий уровень всех боковых лепестков.

Линейная сложность – характеристика, являющаяся одной из основных в криптографии, равная минимальному регистру сдвига с линейной обратной связью, необходимого для воссоздания последовательности.

Обобщенные характеристики последовательностей, найденных в результате полного перебора, приведены в табл. 2, где N – длина последовательностей; PSL – оптимальный уровень боковых лепестков на длине N ; N_{ne} – количество неэквивалентных последовательностей; Nb_{ne} – количество балансных неэквивалентных последовательностей; N_{all} – общее количество последовательностей; Nb_{all} – общее количество балансных последовательностей; MF_{min} – минимальное значение Merit factor; MF_{max} – максимальное значение Merit factor; MF_{opt} – оптимальность последовательности по Merit factor; $LFSR_{min}$ – минимальное значение линейной сложности; $LFSR_{max}$ – максимальное значение линейной сложности.

В результате проведенного поиска удалось получить все возможные бинарные аperiodические MPS последовательности длин $N = 2...68, 70, 72$, а также некоторые последовательности на длинах $N = 69, 71, 73, 74, 76$, которые находятся в процессе поиска. Для всех найденных последовательностей были вычислены их основные характеристики. Более подробную информацию о последовательностях и их характеристиках можно получить на нашем тематическом сайте [4].

Результаты численных оптимизаций поиска многофазных последовательностей Баркера

Вычисления производились на кластере из 4-х двухпроцессорных вычислительных узлов Quad-Core Intel Xeon E5520, 3-х компьютеров Core i7 и 10-ти компьютеров Core2Duo.

Поиск равномерных последовательностей останавливался только после того, как в течении продолжительного времени (3 и более недель) не было получено новых решений. Поиск неравномерных решений не полный, т.к. число решений постепенно растет, вероятность правильного обнаружения падает, что затрудняет полный поиск и делает его неопределенным.

В ходе поиска импульсных последовательностей Баркера были получены следующие результаты: равномерные последовательности Баркера обнаружены до длин 34 включительно, при этом на длинах 30-34 высока вероятность обнаружения новых последовательностей. Количественные результаты представлены в табл. 3.

Таблица 2. Обобщенные характеристики последовательностей

N	PSL	N_{ne}	Nb_{ne}	N_{all}	Nb_{all}	MF_{min}	MF_{max}	MF_{opt}	$LFSR_{min}$	$LFSR_{max}$
2	1	1	1	4	2	2	2	yes	1	2
3	1	1	1	4	4	4.5	4.5	yes	1	3
4	1	1	0	8	0	4	4	yes	1	4
5	1	1	0	4	0	6.25	6.25	yes	2	4
6	2	4	2	28	6	2.57143	2.57143	yes	2	5
7	1	1	1	4	4	8.16667	8.16667	yes	3	4
8	2	8	1	64	8	2	4	yes	3	6
9	2	10	8	80	36	2.025	3.375	yes	3	6
10	2	5	1	40	4	3.84615	3.84615	yes	4	7
11	1	1	1	4	4	12.1	12.1	yes	5	7
12	2	16	2	128	16	2.76923	7.2	yes	4	8
13	1	1	0	4	0	14.0833	14.0833	yes	6	8
14	2	9	0	72	0	5.15789	5.15789	yes	5	9
15	2	13	0	104	0	3.21429	4.8913	no	6	10
16	2	10	0	80	0	3.55556	4.57143	no	7	10
17	2	4	0	32	0	4.51563	4.51563	yes	7	10
18	2	2	2	16	8	6.48	6.48	yes	8	12
19	2	1	0	8	0	4.87838	4.87838	no	8	10
20	2	3	0	24	0	4.34783	5.26316	no	8	11
21	2	3	1	24	4	5.80263	6.48529	no	9	13
22	3	378	76	3024	304	2.54737	6.20513	yes	5	17
23	3	515	169	4084	772	2.38288	5.62766	yes	7	16
24	3	858	66	6864	276	2.32258	8	yes	7	18
25	2	1	0	8	0	7.10227	7.10227	no	12	14
26	3	242	34	1936	136	3.10092	7.51111	no	9	18
27	3	388	124	3096	572	2.82558	9.85135	yes	9	19
28	2	2	0	16	0	6.75862	7.84	yes	14	15
29	3	284	56	2244	232	3.13806	6.78226	yes	10	19
30	3	86	4	688	16	3.43511	7.62712	yes	11	20
31	3	251	106	2008	484	3.26871	7.17164	yes	12	20
32	3	422	38	3376	156	3.04762	7.11111	no	7	22
33	3	139	18	1112	76	3.78125	8.50781	yes	12	22
34	3	51	5	408	20	4.21898	8.89231	yes	13	22
35	3	111	28	888	120	3.80435	7.56173	no	14	21
36	3	161	20	1288	80	3.56044	6.89362	no	13	24
37	3	55	3	440	12	4.02647	6.98469	no	16	22
38	3	17	1	136	4	5.34815	8.29885	yes	17	21
39	3	30	8	240	32	4.44737	6.39076	no	16	25
40	3	57	0	456	0	4.25532	7.40741	yes	17	23
41	3	15	1	120	4	5.125	7.50446	no	17	25
42	3	4	0	32	0	5.91946	8.73267	yes	17	24
43	3	12	7	96	36	4.9973	6.74818	no	20	24
44	3	15	3	120	12	4.98969	6.28571	no	18	27
45	3	4	0	32	0	5.32895	6.57468	no	21	25

46	3	1	0	8	0	6.4908	6.4908	no	23	24
47	3	1	0	8	0	7.12581	7.12581	no	23	25
48	3	4	1	32	4	4.8	6.12766	no	23	26
49	4	49088	11179	392704	46892	2.85833	8.82721	yes	16	33
50	4	25169	2179	201352	8716	3.11721	8.16993	yes	18	33
51	3	1	0	8	0	7.51734	7.51734	no	24	24
52	4	33058	2306	264464	9896	2.75918	8.14458	yes	18	34
53	4	23673	5065	189384	21044	3.09361	7.89045	no	19	35
54	4	10808	936	86464	3744	3.32118	7.32663	no	20	35
55	4	11987	1417	95896	5772	3.26674	7.45074	no	20	35
56	4	15289	1513	122312	6452	3.03876	8.16667	yes	21	35
57	4	9476	1879	75808	7760	3.19783	7.96324	no	22	36
58	4	4026	303	32208	1212	3.58635	8.53807	yes	23	36
59	4	4624	426	36992	1732	3.5593	8.32775	no	23	36
60	4	5542	333	44336	1452	3.34572	8.10811	no	23	38
61	4	3246	543	25968	2232	3.61965	7.56301	no	25	37
62	4	1212	97	9696	388	4.11563	8.17872	yes	26	37
63	4	1422	133	11376	536	3.8534	9.58696	yes	27	37
64	4	1859	142	14872	600	3.65714	9.84615	yes	27	38
65	4	1003	158	8024	652	4.00095	8.25195	no	25	39
66	4	324	17	2592	68	4.60465	7.75089	no	29	38
67	4	381	32	3048	132	4.34139	7.76644	no	29	38
68	4	489	17	3912	72	4.14337	8.43796	no	28	40
69	4	≥ 241	≥ 33	≥ 1928	≥ 132	≤ 4.11851	≥ 7.98826	no	≤ 29	≥ 39
70	4	72	4	576	16	4.64896	7.31343	no	31	40
71	4	≥ 115	≥ 10	≥ 920	≥ 40	≤ 4.57441	≥ 8.1045	no	≤ 30	≥ 41
72	4	107	9	856	36	4.72993	7.2	no	31	40
73	4	≥ 43	≥ 5	≥ 344	≥ 20	≤ 4.93426	≥ 8.32656	no	≤ 34	≥ 40
74	4	≥ 18	≥ 0	≥ 144	≥ 0	≤ 5.64536	≥ 7.03856	no	≤ 33	≥ 40
76	4	≥ 11	≥ 0	≥ 88	≥ 0	≤ 4.99654	≥ 7.0439	no	≤ 36	≥ 41

Таблица 3. Число равномерных импульсных последовательностей Баркера

Длина	Число решений	Длина	Число решений	Длина	Число решений
3	1	14	164	25	404
4	2	15	368	26	64
5	6	16	220	27	64
6	1	17	140	28	50
7	18	18	114	29	78
8	36	19	112	30	98
9	40	20	176	31	76
10	120	21	188	32	8
11	132	22	140	33	4
12	84	23	408	34	8
13	402	24	108		

Множество неравномерных последовательностей Баркера невозможно оценить однозначно. Число решений постоянно растет, с ростом длины сложность и время ожидания нового решения падает, но не означает его

отсутствие. Теоретически возможно, что общее число неравномерных последовательностей Баркера на рассмотренных длинах бесконечно. Результаты текущих запусков отображены в табл. 4.

Численные методы не позволяют дать точную оценку числа последовательностей Баркера. Большое число равномерных последовательностей Баркера определяет большее множество неравномерных, что превосходит результаты Carrol J. Nunn и Gregory E. Coxson [19], а так

же открывает вопрос в правильности оценки числа решений кодов Баркера. Общее число равномерных последовательностей Баркера длины $N=10$ показаны в табл. 5, примеры неравномерных последовательностей представлены в табл. 6.

Таблица 4. Число импульсных последовательностей Баркера

Длина	Число решений	Длина	Число решений	Длина	Число решений
31	3015	39	1203	47	21
32	2180	40	1087	48	3
33	1337	41	1258	49	2
34	2015	42	994	50	2
35	1356	43	816	51	2
36	1287	44	230	52	1
37	1105	45	241		
38	1749	46	35		

Таблица 5. Равномерные последовательности Баркера для $N=10$

Неэквивалентные равномерные последовательности Баркера длины $N=10$ (фазы в градусах)	
0 0 0 60 240 240 60 180 0 240	0 0 60 60 240 240 60 240 0 240
0 0 3.651 213.43 171.437 295.057 290.454 81.657 261.657 21.657	0 0 60 83.489 308.952 252.913 144.948 276.91 75.778 315.778
0 0 10.191 110.485 133.039 25.719 22.721 181.259 1.259 241.259	0 0 60 90.173 327.079 301.635 204.198 326.554 141.769 21.769
0 0 13.867 160.547 188.895 12.023 69.696 283.7 103.7 343.7	0 0 60 97.037 281.883 249.649 99.87 228.259 25.664 265.664
0 0 15.388 15.204 227.513 197.448 17.534 92.789 272.789 152.789	0 0 60 133.704 75.583 303.338 59.37 285.645 299.56 179.56
0 0 15.796 146.39 207.651 67.246 103.668 297.259 117.259 357.259	0 0 60 136.006 104.59 343.896 129.789 353.452 12.697 252.697
0 0 18.986 263.9 236.83 58.556 16.853 201.232 21.232 141.232	0 0 60 138.66 100.629 337.757 130.446 353.42 0.197 240.197
0 0 20.378 174.194 216.81 104.548 112.336 343.296 163.296 43.296	0 0 60 150.526 161.696 41.527 19.346 248.123 26.31 266.31
0 0 31.232 125.956 41.801 251.015 12.144 224.877 196.109 76.109	0 0 60 151.478 118.657 346.102 99.19 307.544 340.305 220.305
0 0 36.152 280.903 218.369 7.431 44.136 228.324 48.324 168.324	0 0 60 154.338 185.437 42.878 41.053 264.053 42.144 282.144
0 0 40.068 123.951 22.01 242.437 4.859 225.198 205.266 85.266	0 0 60 156.482 127.594 354.284 115.442 318.259 0.84 240.84
0 0 47.072 15.966 246.509 160.944 54.185 184.903 4.903 124.903	0 0 60 157.271 127.98 31.161 160.034 2.116 45.026 285.026
0 0 53.529 178.176 244.412 128.278 175.956 39.612 219.612 99.612	0 0 60 157.541 100.562 354.519 139.858 352.601 346.679 226.679
0 0 53.825 152.997 92.708 344.118 128.717 338.244 332.069 212.069	0 0 60 160.069 200.575 70.684 123.052 13.925 179.343 59.343
0 0 58.37 178.561 180.381 40.24 85.493 271.646 91.646 331.646	0 0 60 161.075 137.702 11.552 144.809 342.646 35.332 275.332
0 0 58.514 111.639 305.916 325.121 202.246 322.052 142.052 22.052	0 0 60 165.808 193.964 71.439 82.451 348.732 162.392 42.392
0 0 59.53 47.528 284.323 199.543 34.766 156.421 336.421 96.421	0 0 60 172.204 161.365 87.626 104.461 311.135 112.993 352.993
0 0 60 31.254 258.002 255.205 103.971 238.264 52.615 292.615	0 0 60 173.541 199.267 102.119 136.614 34.836 210.617 90.617
0 0 60 39.593 244.465 218.025 69.483 194.91 11.541 251.541	0 0 60 173.809 184.683 86.115 132.171 327.644 123.95 3.95
0 0 60 45.556 222.216 228.275 54.869 191.038 0.148 240.148	0 0 60 176.6 232.194 156.459 171.738 62.065 239.338 119.338
0 0 60 48.219 245.53 282.521 114.726 234.81 54.744 294.744	0 0 60 177.773 152.234 54.174 55.493 263.942 79.221 319.221
0 0 60 48.69 273.375 226.697 50.167 173.578 350.902 230.902	0 0 60 178.911 246.353 135.298 182.633 50.063 228.649 108.649

0 0 60 52.43 128.702 328.238 68.157 297.876 239.54 119.54	0 0 60 179.912 227.663 70.629 113.282 5.039 184.97 64.97
0 0 60 59.97 157.864 314.285 87.481 283.364 223.439 103.439	0 0 65.816 142.882 107.601 345.72 140.296 5.611 11.427 251.427
0 0 60 60 120 300 60 300 240 120	0 0 60 60 180 0 60 300 240 120
0 0 71.752 22.286 163.36 316.351 303.543 162.495 174.247 54.247	0 0 72.375 28.2 171.362 4.319 11.474 225.794 238.168 118.168
0 0 60 79.006 294.964 277.44 142.397 356.735 120.298 0.298	0 0 90.654 155.84 130.948 8.198 135.015 10.085 40.739 280.739
0 0 60 61.734 265.642 282.804 111.674 272.309 48.219 288.219	0 0 92.544 168.823 152.396 30.199 150.907 16.818 49.362 289.362
0 0 60 70.019 262.439 247.868 58.617 184.637 357.162 237.162	0 0 95.42 158.569 149.533 39.876 183.962 60.909 96.329 336.329
0 0 60 76.528 303.162 294.906 159.61 8.955 137.592 17.592	0 0 112.611 190.799 193.959 112.846 254.717 119.191 171.801 51.801

Таблица 6.Примеры последовательностей Баркера для N=[11, 52]

N	Последовательность (фазы в градусах)
11	0 0 0 120 120 300 0 180 0 240
12	0 0 60 0 300 120 120 240 0 240 60 180
13	0 0 180 180 60 60 120 60 60 1800 240 0
14	0 0 1.709 286.585 347.346 128.366 90.757 258.734 349.419 240.505 69.074 57.543 237.543 117.543
15	0 00 36.419 357.703 254.678 150.902 128.173 285.444 1.668 78.642 219.927 76.345 256.346 16.346
16	0 0 5.588 291.28 198.887 182.71 193.462 329.808 269.293 116.861 306.479 227.07 322.327 69.048 249.048 9.048
17	0 0 14.043 340.367 6.691 311.103 164.682 128.199 342.502 224.384 18.633 189.416 19.398 127.614 214.225 288.268 48.268
18	0 0 60 60 240 300 300 0 240 60 300 120 120 0 60 240 240 120
19	0 0 0.997 352.252 285.97 352.361 96.889 212.261 146.332 276.128 350.949 163.488 24.886 275.101 134.935 237.367 65.414 6.411 246.411
20	0 0 16.273 78.349 116.933 127.76 345.207 296.711 123.528 123.324 36.519 291.529 82.483 310.824 212.737 303.51 156.277 194.02 14.02 134.02
21	0 0 0.341 115.525 153.067 114.208 241.334 41.921 151.056 81.807 129.448 358.098 315.217 122.217 227.353 41.273 7.631 184.304 18.79 319.131 199.131
22	0 0 17.537 3.718 17.718 339.597 226.271 160.595 124.328 16.613 269.964 113.434 314.504 220.508 5.666 63.704 131.759 222.596 325.099 128.344 308.344 68.344
23	0 0 60 233.976 241.597 323.061 31.928 10.87 271.749 330.435 264.175 188.781 24.299 346.595 156.856 70.613 50.538 117.675 264.969 74.199 213.105 338.923 218.923
24	0 0 60 70.501 51.219 152.727 120.353 307.766 292.82 100.904 128.078 311.357 285.217 76.768 221.063 61.911 346.339 232.064 325.847 180.767 237.788 92.962 196.871 76.871
25	0 0 58.162 32.667 17.367 17.643 120.649 108.693 273.108 321.864 344.44 211.106 188.974 122.507 44.917 260.301 79.588 20.62 228.914 351.176 151.957 275.019 70.406 250.406 130.406
26	0 0 60 70.469 2.903 18.48 322.009 349.377 116.975 141.969 227.892 256.894 75.355 179.88 327.659 14.329 249.174 127.99 112.272 285 137.731 0.767 234.369 345.231 176.412 56.413 27 0 060 43.552 148.434 109.269 251.453 186.585 44.824 144.11 148.567 217.588 65.155 112.708 69.219 281.287 68.836 91.879 .847 297.667 155.161 221.789 47.282 161.292 356.962 37.013 277.013
27	0 0 60 232.234 263.615 203.754 194.88 183.976 300.839 22.87 84.414 261.492 81.775 177.964 13.814 80.19 6.947 172.096 83.229 84.343 68.106 23.871 83.612 143.386 106.187 333.724 220.099 100.099
28	0 0 60 78.092 43.587 54.197 119.39 127.346 307.654 272.593 41.938 59.7 272.096 164.113 343.205 219.706 35.868 223.203 64.173 149.634 262.515 44.095 140.125 22.707 21.718 300.658 238.697 220.412 100.413
29	0 0 60 37.535 43.265 139.297 73.49 176.529 309.29 61.529 354.506 70.627 254.452 266.292 334.378 245.186 184.08 130.933 313.489 128.298 76.819 285.907 28.098 223.766 171.343 15.76 80.168 282.121 261.505 141.505
30	0 0 42.844 43.864 107.686 242.058 232.381 266.275 263.762 227.81 153.269 210.584 13.941 250.407 28.946 284.315 207.567 242.593 77.681 356.587 289.764 135.8 277.452 25.614 108.89 288.255 215.862 58.634 44.898 224.898 344.898
31	0 0 60 160.701 296.79 324.751 22.257 84.757 23.589 98.232 54.238 109.954 242.661 69.707 6.802 286.589 277.348 96.497 274.344 306.613 160.167 210.993 111.689 122.774 345.891 196.957 4.6 234.121 163.216 6.322 125.431 5.431
32	0 0 60 78.875 207.76 265.604 287.326 324.431 278.578 256.2 332.613 272.978 181.898 37.549 253.548 54.875 59.048 262.67 11.066 82.601 244.025 4.846 192.918 66.954 207.026 43.044 154.558 46.768 326.486 247.935 184.62 165.125 45.125
33	0 0 45.912 38.476 340.192 347.944 66.412 21.665 242.596 131.93 341.529 215.066 181.896 305.592 49.962 62.511 134.275 91.473 304.204 304.506 235.671 195.95 73.427 123.288 289.416 331.618 109.423 241.724 58.604 261.861 81.623 240.548 60.548 180.548

34	0 0 62.24 115.72 106.914 254.204 267.961 311.248 48.181 346.135 269.726 290.822 54.746 78.048 301.341 330.763 77.561 217.942 39.769 128.262 52.706 291.171 139.446 242.189 104.571 200.673 113.503 82.947 326.328 124.676 342.652 314.537 190.665 339.901 219.895
35	0 0 60.682 39.574 352.272 53.858 40.617 51.051 88.132 252.325 269.72 44.003 274.189 253.299 146.07 215.558 31.879 68.491 175.566 92.642 324.833 305.335 206.093 277.724 57.456 123.564 87.41 278.452 257.619 118.024 296.563 99.718 338.337 117.038 287.724 166.565
36	0 0 59.788 99.248 109.383 186.269 213.851 190.508 167.493 65.317 131.7 176.757 106.215 60.063 347.573 83.245 210.516 340.131 110.214 335.576 148.287 228.433 35.884 352.845 134.932 291.893 328.076 199.172 144.924 1.152 110.953 316.743 244.447 41.138 230.358 151.53 31.324
37	0 0 56.935 131.322 155.644 162.17 294.97 16.851 357.703 205.973 291.429 47.263 109.681 53.743 296.162 78.117 197.097 148.786 105.424 110.844 144.013 58.31 150.287 28.596 43.883 254.365 315.917 138.478 280.205 93.426 314.428 212.292 80.77 1.008 322.472 220.812 73.453 312.543
38	0 0 59.977 87.004 92.401 130.445 174.019 260.318 292.655 126.985 143.136 244.762 273.564 142.97 165.665 175.17 113.56 101.792 317.075 144.912 141.801 56.837 322.18 71.041 219.695 1.65 172.048 279.231 128.572 119.742 26.448 20.363 219.311 26.814 261.005 128.348 317.459 161.826 41.82
39	0 0 59.989 101.328 150.121 211.347 259.143 270.608 166.507 249.569 198.026 288.135 160.279 252.182 140.661 261.59 165.768 57.456 139.275 268.883 334.796 162.835 180.189 16.243 332.642 193.614 264.025 171.297 102.771 353.228 145.583 347.545 19.062 228.582 254.084 109.996 296.935 178.408 121.421 1.415
40	0 0 60 70.469 2.903 18.48 322.009 349.377 116.975 141.969 227.892 256.894 75.355 179.88 327.659 14.329 249.174 127.99 112.272 285 137.731 0.767 234.369 345.231 176.412 56.413 27 0 060 43.552 148.434 109.269 251.453 186.585 44.824 144.11 148.567 217.588 65.155 112.708 69.219 281.287 68.836 91.879 .847 297.667 155.161 221.789 47.282 161.292 356.962 37.013 277.013
41	0 0 66.022 60.39 23.445 355.429 98.543 28.402 352.449 25.29 138.352 159.918 283.345 261.899 179.748 335.369 342.72 115.113 121.668 275.415 117.771 13.82 228.261 91.582 252.153 0.291 306.298 98.199 199.326 345.304 154.687 290.18 106.616 150.751 12.634 354.529 309.489 258.433 148.797 199.842 79.83
42	0 0 55.331 83.354 106.547 255.763 317.247 310.411 40.273 321.779 309.81 339.168 52.798 22.993 216.452 339.85 130.457 74.868 251.116 111.234 167.40.05 169.212 299.479 82.586 199.699 4.864 299.68 135.831 300.138 262.524 89.152 306.114 249.747 147.187 128.824 62.905 353.962 46.776 303.272 278.4 156.698
43	0 0 17.361 300.115 270.161 157.838 127.936 254.685 246.716 218.377 237.686 211.358 89.055 357.995 308.841 88.849 82.775 239.599 276.899 106.817 145.268 132.158 311.912 134.17 62.028 146.563 235.566 196.02 294.357 149.651 346.009 172.208 114.047 247.81 255.213 349.499 204.065 1.816 146.941 247.363 23.898 202.042 331.233
44	0 0 17.12 330.264 8.445 309.386 9.419 1.077 15.132 86.534 177.204 221.357 245.186 183.438 333.496 135 12.628 115.365 308.056 302.453 53.749 186.435 256.462 188.755 23.382 71.843 206.488 41.809 312.251 210.975 83.428 300.052 158.102 318.954 58.006 192.605 268.763 127.111 74.192 341.426 307.197 204.993 162.445 42.101
45	0 0 26.9 346.107 283.815 230.524 185.736 187.592 235.824 207.388 62.636 328.282 204.116 120.757 144.66 173.612 237.067 215.34 13.694 246.08 173.257 272.728 185.994 355.389 299.634 309.369 135.951 75.791 249.655 17.997 308.326 124.481 183.163 20.145 234.494 9.454 184.481 286.651 97.134 264.936 347.367 93.232 206.018 299.113 59.118
46	0 0 11.087 7.317 326.58 317.722 310.291 311.689 285.293 25.514 105.413 80.724 130.279 125.919 276.773 273.387 48.736 231.698 163.728 318.278 92.544 331.634 32.109 144.408 276.04 183.14 22.431 121.708 245.409 36.274 298.946 202.449 74.232 237.989 12.382 113.973 297.216 256.295 98.228 144.185 28.963 284.474 246.527 118.064 71.866 305.45
47	0 0 30.607 65.237 112.941 113.646 20.93 19.217 57.319 90.281 192.732 203.526 358.477 0.13 290.381 289.103 276.126 107.407 113.761 230.701 244.917 81.813 224.273 241.456 70.107 80.157 261.246 62.945 104.977 331.857 293.228 206.672 228.948 60.882 230.822 57.302 157.712 359.749 122.011 324.558 251.821 147.892 308.922 148.241 2.206 189.517 65.346
48	0 0 37.46 126.526 176.46 207.159 22.013 46.031 113.841 163.471 177.027 127.878 111.406 275.461 267.537 306.464 230.507 208.929 106.123 32.343 151.484 160.308 41.39 267.319 171.95 321.687 242.653 92.951 239.559 67.792 292.438 158.257 199.309 56.545 197.43 194.714 157.185 72.365 123.954 308.297 92.59 131.987 347.734 48.753 193.877 353.051 105.625
49	0 0 52.225 75.533 39.861 56.052 107.218 120.361 163.425 243.392 329.623 40.285 123.415 145.165 88.539 41.494 0.9 345.505 16.65 287.499 296.592 169.618 193.786 330.459 64.091 191.924 314.989 212.751 166.461 86.442 327.48 265.239 118.407 173.664 353.246 134.221 359.313 192.972 342.193 86.431 264.466 133.087 7.002 273.135 119.788 287.298 119.009 350.467 222.703
50	0 0 69.368 73.098 41.614 355.813 37.328 47.452 56.476 65.884 106.06 210.682 237.766 307.249 344.434 268.918 173.841 61.066 8.95 233.366 202.93 145.703 41.001 180.075 21.784 289.206 33.392 187.18 79.607 266.322 47.429 300.287 222.193 126.629 272.946 185.879 51.434 72.92 161.253 352.094 292.988 6.165 187.672 265.789 92.579 197.676 351.767 81.331 206.769 336.286
51	0 0 10.249 317.632 262.864 269.261 285.022 266.347 204.18 136.155 53.741 315.117 259.247 268.436 181.638 71.951 285.434 264.138 296.083 3.395 5.177 141.353 112.691 320.52 274.867 64.738 359.594 143.405 15.978 140.829 78.351 177.052 212.523 225.616 26.401 252.739 98.097 268.163 333.186 127.954 317.827 114.909 275.541 77.495 176.135 232.56 337.799 120.451 249.11 318.914 79.366
52	0 0 30.825 98.148 179.221 216.292 262.357 3.209 342.17 26.356 131.952 311.632 56.436 101.184 98.491 19.366 44.06 181.8 26.929 128.457 186.67 80.271 35.122 37.93 280.921 319.94 326.872 264.134 184.435 325.956 316.846 174.466 203.457 67.609 52.139 315.814 158.308 268.717 98.606 87.834 299.829 199.16 81.876 287.797 136.937 252.216 63.312 251.07 124.79 333.805 164.439 44.404

Литература

1. J.Lindner. Binary sequences up to length 40 with best possible autocorrelation function // Electronics Letters, 16 October 1975, V. 11, № 21, p. 507.
2. M.N.Cohen, M.R.Fox, J.M.Baden. Minimum peak sidelobes pulse compression codes// Proceedings of the IEEE International Radar Conference, Arlington, VA, May 1990, pp.633-638.
3. G.E.Coxson, J.Russo. Efficient exhaustive search for optimal-peak-sidelobe binary codes// IEEE Trans. Aerospace and Electron. Systems, 2005, V. 41, pp. 302–308.
4. Тематический сайт, посвященный синтезу сигналов и их применению [Электронный ресурс]. Дата обновления: 13.06.2013. – URL: <http://signalslab.marstu.net> (дата обращения: 13.06.2013).
5. Militzer, B.; Zamparelli, M.; Beule, D.: Evolutionary search for low autocorrelated binary sequences, IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2, (1998), No. 1, pp.34039
6. Prestwich, S.: A hybrid local search algorithm for low-autocorrelation binary sequences, Technical report, Department of computer science, National University of Ireland at Cork, 2001.
7. Prestwich, S.: Exploiting Relaxation in local search for LABS, Annals of operations research, 1, (2007), pp.129-141
8. Brglez, F.; Viao, Yu.; Stallmann, M.; Militzer, B.: Reliable cost predictions for finding optimal solutions to LABS problem: evolutionary and alternative algorithms, In international workshop on frontiers in evolutionary algorithms, 2003
9. Borwein, P.; Ferguson, R.; Knauer, J.: The merit factor problem, Online available.
10. Dotu I.; Hentenyck, P.: A note on low autocorrelation binary sequences, In lecture notes in computer science, Springer, 4204, (2006), pp.685-689
11. Gallarado, J.; Cotta, C.; Fernandez, A.: A memetic algorithm for the low autocorrelation binary sequence problem, In genetic and evolutionary computation conference, ACM, 2007, pp.1226-1233
12. Dorigo, M.; Stutzle, T.: Ants colony optimization, MIT Press, 2004.
13. Kirkpatrick, S.; Gelatt, D.; Veechi, M.: Optimization by simulated annealing, Science, 220, (1983), pp.671-680
14. Holland, J.: Adaptation in natural and artificial ecosystems, MIT Press, second edition, 1992
15. Stutzle, T.; Hoos, H.; Analyzing the run-time behavior of iterated local search for the TSP, in 3rd Metaheuristics International conference, 1999, pp.449-453
16. Rego, C.; Alidaee, B.: Tabu search and scatter search, Kluwer Academic Publishers, 2005
17. Hansen, P.; Mladenovic, N.: A tutorial on variable neighborhood search, TR G-2003-16, Gerad, 2003
18. Леухин А.Н. Аналитическая теория построения периодических импульсных унимодулярных последовательностей с одноуровневой автокорреляцией / А.Н. Леухин, А.С. Шувалов, Н.В. Парсаев, А.С. Петухов // Доклады 13-ой Международной конференции «Цифровая обработка сигналов и ее применение – DSPA-2011». Москва. 2011. Том 1. С. 42-45.
19. Nunn C.J., Coxson G.E. Polyphase Pulse Compression Codes with Optimal Peak and Integrated Sidelobes// IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, April 2009, V. 45, № 2, pp. 775-781.

METHODS AND RESULTS SYNTHESIS OF APERIODIC BINARY SEQUENCES AND POLYPHASE BARKER SEQUENCES

Potekhin E., Shuvalov A., Leukhin N.

The article provides information on how to generate, build, and search optimal binary sequences of lengths up to 76 and polyphase Barker sequences of lengths up to 52. Details the search algorithms and analytical conclusions. The examples of sequences has main characteristics, such as Merit factor and linear complexity.

НОВЫЕ КНИГИ

Джиган В.И.

Адаптивная фильтрация сигналов: теория и методы

Москва: Техносфера, 2013. – 528 с.

Рассматриваются основные разновидности адаптивных фильтров и их применение в радиотехнических системах и системах связи. Дается представление о математических объектах и методах, используемых в теории адаптивной фильтрации сигналов. Рассматриваются приемы получения вычислительных процедур, сами процедуры и свойства таких алгоритмов адаптивной фильтрации, как алгоритмы Ньютона и наискорейшего спуска, алгоритмы по критерию наименьших квадратов, рекурсивные алгоритмы по критерию наименьших квадратов и их быстрые (вычислительно эффективные) версии; рекурсивные алгоритмы для многоканальных фильтров и их версии для обработки нестационарных сигналов, а также многоканальные алгоритмы аффинных проекций. Дано описание стандартных и нестандартных приложений для моделирования адаптивных фильтров на современных языках программирования MATLAB, LabVIEW и SystemVue, а также реализаций адаптивных фильтров на современных цифровых сигнальных процессорах.

Особенностью книги является изложение теоретических материалов для наиболее общего случая – адаптивных фильтров с комплексными весовыми коэффициентами, наличие разделов по многоканальным адаптивным фильтрам и алгоритмам адаптивной фильтрации нестационарных сигналов.

Книга является первым систематическим изложением теории адаптивной фильтрации на русском языке.

Предназначена для научных работников, инженеров, аспирантов и студентов радиотехнических и связанных специальностей, изучающих и использующих на практике цифровую обработку сигналов.