УДК 621.396.96: 512.643

РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ ОБРАБОТКИ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ В ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ АРИФМЕТИКЕ

Ратынский М.В., *д.т.н., начальник сектора ОАО «ВНИИРТ», e-mail: m3v5r7@inbox.ru*
Петров С.В., *инженер 1-й категории ОАО «ВНИИРТ», e-mail: petrovsv@list.ru*

Рассматриваются четыре задачи обработки стохастических сигналов в приемной системе с антенной решеткой, решение которых в общем случае реализуется в комплексной арифметике: обнаружение, оценка числа и пеленгация источников сигналов, адаптивная пространственная фильтрация. Показано, что при центрально-симметричной структуре антенной решетки решение всех перечисленных задач может быть реализовано в действительной арифметике.

Ключевые слова: алгоритмы сигнальной обработки, стохастические сигналы, обнаружение сигналов, оценка числа источников, пеленгация, адаптивная пространственная фильтрация, действительная арифметика.

Введение

Задача обработки случайных или квазислучайных сигналов различной природы в приемных системах с антенными решетками встречается в различных приложениях – в радиолокации, гидролокации, радиоастрономии, связи, сейсмологии, биомедицине [1]. В даль-нейшем изложении для определенности мы будем иметь в виду радиолокационные приложения, с обработкой в РЛС с цифровой ФАР узкополосных стохастических сигналов, для которых применимо понятие комплексной огибающей (КО), хотя конечные результаты могут иметь более широкое применение.

Рассмотрим решение следующих четырех задач сигнальной обработки [2 – 4]:

– обнаружение сигналов;
– оценка числа источников сигналов;
– пеленгация источников сигналов;
– адаптивная пространственная фильтрация (АПФ).

В качестве входной информации задач сигнальной обработки используется прямоугольная матрица $\mathbf{Y}$ размера $N \times K$,

$$\mathbf{Y} = \left(\mathbf{Y}_1, \ldots \mathbf{Y}_K\right), \qquad (1)$$

столбцами которой являются N-мерные комплексные векторы $\mathbf{Y}_k, k = 1, \ldots K$, сигналов (КО) с выходов элементов ФАР в K последовательных моментов времени, отстоящих один от другого на интервал дискретизации, выбираемый в соответствии с теоремой Котельникова, так что последовательные выборки сигналов можно считать практически независимыми. Матрицу $\mathbf{Y}$ иногда называют обучающим пакетом, так как она часто используется для настройки (обучения) фильтров, непосредственно реализующих алгоритмы сигнальной обработки. По пакету $\mathbf{Y}$ может быть рассчитана максимально правдоподобная (МП) выборочная оценка корреляционной матрицы (КМ) входных сигналов

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2K}\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H, \qquad (2)$$

где $(\cdot)^H$ – знак эрмитовой сопряженности (транспонирования и комплексной сопряженности). Матрица $\mathbf{R}$ – эрмитова, положительно определенная и при гауссовской статистике внешних сигналов и собственных шумов антенной решетки содержит всю информацию о принимаемых сигналах.

В общем случае алгоритмы сигнальной обработки реализуются в комплексной арифметике [4]. Однако существует важное исключение из этого общего правила – это случай, когда антенная решетка имеет центрально-симметричную структуру. К этому частному, но часто встречающемуся на практике, случаю относятся, например: равномерная линейная, регулярные прямоугольная и гексагональные, равномерная кольцевая (при четном числе излучателей) решетки и ряд других [1]. Известно, что корректная обработка информации в антенных решетках центрально-симметричной структуры позволяет при решении многих задач практически удвоить число независимых выборок входных сигналов (например, [5, 1] и ссылки в этих работах), причем это положение, которое на первый взгляд может показаться почти очевидным, на самом деле нуждается в далеко не тривиальном доказательстве [6 – 8]. Что же касается реализации алгоритмов сигнальной обработки в действительной арифметике, то отдельные аспекты этой проблемы затрагивались в имеющихся публикациях [5, 9, 1], но изложения единого подхода к решению перечисленных в начале раздела задач нам не известно, и его рассмотрению посвящена оставшаяся часть статьи.

Исходные положения

Вектор $\mathbf{X}$ амплитудно-фазового распределения поля, создаваемого удаленным точечным источником в раскрыве ФАР центрально-симметричной структуры, является «сопряженно-симметричным»:

$$\mathbf{X} = \mathbf{J}\mathbf{X}^*. \qquad (3)$$

Здесь $(\cdot)^*$ – знак комплексной сопряженности; $\mathbf{J}$ – матрица перестановок, имеющая единицы на побочной диагонали и нули на всех остальных позициях.

Соответственно МП выборочная оценка КМ в этом случае имеет вид [1]

$$\mathbf{R}_{cs} = \frac{1}{4K}\left(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H + \mathbf{J}\mathbf{Y}^*\mathbf{Y}^T\mathbf{J}\right),$$

где $(\cdot)^T$ – знак транспонирования. Последнее равенство может быть записано также в виде

$$\mathbf{R}_{cs} = \frac{1}{4K}\mathbf{Y}_{cs}\mathbf{Y}_{cs}^H , \qquad (4)$$

где блочная матрица $\mathbf{Y}_{cs}$ размера $N \times 2K$ состоит из двух блоков размера $N \times K$:

$$\mathbf{Y}_{cs} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{J}\mathbf{Y}^* \end{bmatrix} . \qquad (5)$$

Использование оценок (4), (5) вместо (2), (1) как раз и дает эффект, эквивалентный упоминавшемуся во введении увеличению числа независимых выборок входных сигналов.

Если представить матрицу $\mathbf{Y}$ в виде двух блоков* размера $(N/2) \times K$,

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix},$$

то комплексному пакету $\mathbf{Y}_{cs}$ можно поставить в соответствие действительный пакет $\mathbf{Y}_r$ того же размера, равный [1]

$$\mathbf{Y}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{Re}(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{J}\mathbf{Y}_2) & -\mathbf{Im}(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{J}\mathbf{Y}_2) \\ \mathbf{Im}(\mathbf{Y}_1 - \mathbf{J}\mathbf{Y}_2) & \mathbf{Re}(\mathbf{Y}_1 - \mathbf{J}\mathbf{Y}_2) \end{bmatrix}, \qquad (6)$$

где $\mathrm{Re}\,(\cdot)$, $\mathrm{Im}\,(\cdot)$ – действительная и мнимая части соответствующих величин.

Матрицы $\mathbf{Y}_{cs}$ и $\mathbf{Y}_r$ связаны между собой соотношением [1]

$$\mathbf{Y}_r = \mathbf{Q}^H \mathbf{Y}_{cs} \mathbf{L} , \qquad (7)$$

где $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{L}$ – унитарные матрицы размеров соответственно $N \times N$ и $2K \times 2K$, равные

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \mathbf{I} & j\mathbf{I} \\ \mathbf{J} & -j\mathbf{J} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \mathbf{I} & j\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & -j\mathbf{I} \end{bmatrix}. \qquad (8)$$

Здесь $\mathbf{I}$ – единичная матрица, j – мнимая единица.

Поскольку сингулярные числа матрицы не изменяются при умножении ее слева или справа на любые унитарные матрицы [10], сингулярные числа матриц $\mathbf{Y}_{cs}$ (комплексной) и $\mathbf{Y}_r$ (действительной) одинаковы.

Обнаружение и оценка числа источников сигналов

Вычислительная часть задач обнаружения и оценки числа источников стохастических сигналов сводится к нахождению одного (максимального) или нескольких (наибольших) собственных значений КМ $\mathbf{R}_{cs}$ по (4) [2 – 4, 11], или, что эквивалентно, к нахождению соответствующих сингулярных чисел (СЧ) пакета $\mathbf{Y}_{cs}$ по (5). Поскольку СЧ пакетов $\mathbf{Y}_{cs}$ по (5) и $\mathbf{Y}_r$ по (6) одинаковы, все вычисления могут быть проведены с действительной матрицей $\mathbf{Y}_r$ при соответствующем сокращении объема вычислений.

Пеленгация источников сигналов

Решение задачи пеленгации источников стохастических сигналов рассмотрим на примере алгоритма Кейпона пеленгации со сверхразрешением [4]. Вычислительная часть задачи пеленгации в этом случае заключается в нахождении значений пеленгационного рельефа P в соответствии с выражением

$$P = \left(\mathbf{V}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{V}\right)^{-1} , \qquad (9)$$

где $\mathbf{V}$ – нормированный вектор-гипотеза, по структуре совпадающий с вектором сигнала пеленгуемого удаленного точечного источника, принимаемого с рассматриваемого направления. Очевидно, что в случае ФАР центрально-симметричной структуры вектор-гипотеза $\mathbf{V}$ также является «сопряжено-симметричным», то есть подчиняется соотношению (3).

Подставляя вместо $\mathbf{R}$ в (9) $\mathbf{R}_{cs}$ по (4) и переходя от $\mathbf{Y}_{cs}$ к $\mathbf{Y}_r$ по (7), после несложных преобразований для эрмитовой формы в скобках выражения (9) получим

$$T = \mathbf{V}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{V} = 4K\mathbf{V}^H \mathbf{Q}\left(\mathbf{Y}_r \mathbf{Y}_r^T\right)^{-1} \mathbf{Q}^H \mathbf{V} ,$$

где матрица $\mathbf{Q}$ определяется первым из равенств (8).

Представляя вектор-гипотезу $\mathbf{V}$ в виде двух блоков размера $(N/2) \times 1$,

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix},$$

и используя очевидные соотношения

$$\mathbf{V}_1 = \mathrm{Re}\,\mathbf{V}_1 + j\,\mathrm{Im}\,\mathbf{V}_1 = \mathbf{J}\mathbf{V}_2^* = \mathbf{J}\,\mathrm{Re}\,\mathbf{V}_2 - j\mathbf{J}\,\mathrm{Im}\,\mathbf{V}_2 ,$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathrm{Re}\,\mathbf{V}_2 + j\,\mathrm{Im}\,\mathbf{V}_2 = \mathbf{J}\mathbf{V}_1^* = \mathbf{J}\,\mathrm{Re}\,\mathbf{V}_1 - j\mathbf{J}\,\mathrm{Im}\,\mathbf{V}_1 ,$$

после элементарных преобразований получаем выражение для действительного вектора-гипотезы $\mathbf{V}_r$:

$$\mathbf{V}_r = \mathbf{Q}^H \mathbf{V} = \sqrt{2}\begin{bmatrix} \mathrm{Re}\,\mathbf{V}_1 \\ \mathrm{Im}\,\mathbf{V}_1 \end{bmatrix} = \sqrt{2}\begin{bmatrix} \mathbf{J}\,\mathrm{Re}\,\mathbf{V}_2 \\ -\mathbf{J}\,\mathrm{Im}\,\mathbf{V}_2 \end{bmatrix}.$$

В результате все вычисления в (9) приводятся к действительной арифметике:

$$P = T^{-1} = \frac{1}{4K}\left(\mathbf{V}_r^T \left(\mathbf{Y}_r \mathbf{Y}_r^T\right)^{-1} \mathbf{V}_r\right)^{-1} . \qquad (10)$$

Разумеется, вместо формирования и явного обращения матрицы $\mathbf{Y}_r \mathbf{Y}_r^T$ можно воспользоваться известным приемом ортогонализации строк пакета $\mathbf{Y}_r$ и последующего использования фильтра-ортогонализатора $\mathbf{\Phi}$ [4], так что

$$P = \frac{1}{4K}\left(\mathbf{V}_r^T \mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi} \mathbf{V}_r\right)^{-1} = \frac{1}{4K}\left\|\mathbf{\Phi}\mathbf{V}_r\right\|^{-2} ,$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора, причем очевидно, что и в этом случае все вычисления выполняются в действительной арифметике.

Адаптивная пространственная фильтрация

Решение задачи АПФ в соответствии с методом прямого обращения выборочной оценки $\mathbf{R}$ КМ входных сигналов заключается в вычислении комплексного весового вектора $\mathbf{W}$, определяемого (без учета нормировки) выражением [4]

* Для простоты мы ограничиваемся случаем четного числа элементов в антенной решетке. Обобщение на случай нечетного N не представляет принципиальных трудностей [1].

$$\mathbf{W} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}\,, \qquad (11)$$

где $\mathbf{S}$ – опорный вектор, все элементы которого, при наличии независимой системы фазирования антенной решетки, действительны и равны 1.

Аналогично предыдущему, подставляя в (11) $\mathbf{R}_{cs}$ по (4) вместо $\mathbf{R}$ и переходя от $\mathbf{Y}_{cs}$ к $\mathbf{Y}_r$ по (7), получим:

$$\mathbf{W} = 4K\mathbf{Q}\left(\mathbf{Y}_r\mathbf{Y}_r^T\right)^{-1}\mathbf{Q}^H\mathbf{S}\,. \qquad (12)$$

Представляя опорный вектор $\mathbf{S}$ в виде двух блоков размера $(N/2) \times 1$,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_2 \end{bmatrix},$$

причем в данном случае $\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_2$, получим следующее выражение для промежуточного действительного опорного вектора $\mathbf{S}_r$:

$$\mathbf{S}_r = \mathbf{Q}^H\mathbf{S} = \sqrt{2}\begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Второй блок вектора в последнем выражении – вектор размера $(N/2) \times 1$ с нулевыми элементами.

Таким образом, в соответствии с (12) можно рассчитать в действительной арифметике значение промежуточного вектора $\mathbf{W}_r$,

$$\mathbf{W}_r = 4K\left(\mathbf{Y}_r\mathbf{Y}_r^T\right)^{-1}\mathbf{S}_r\,, \qquad (13)$$

после чего окончательное значение искомого комплексного вектора $\mathbf{W}$ получается фактически переупаковкой элементов действительного вектора $\mathbf{W}_r$:

$$\mathbf{W} = \mathbf{Q}\mathbf{W}_r\,.$$

Если, как и в задаче пеленгации, использовать фильтр-ортогонализатор $\mathbf{\Phi}$ строк пакета $\mathbf{Y}_r$, вместо (13) получим эквивалентное ему выражение

$$\mathbf{W}_r = 4K\mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Phi}\mathbf{S}_r\,,$$

в соответствии с которым все вычисления также выполняются в действительной арифметике.

Заключение

Мы показали, что в приемной системе с антенной решеткой, имеющей центрально-симметричную структуру, решения задач обнаружения, оценки числа и пеленгации источников стохастических сигналов, а также задачи адаптивной пространственной фильтрации могут быть реализованы в действительной арифметике.

Поскольку сочетание операций перемножения двух комплексных чисел и сложения двух комплексных чисел эквивалентно восьми операциям умножения или сложения действительных чисел, переход от комплексной арифметике к действительной ведет к сокращению объема вычислений вчетверо.

Мы не приводим результатов цифрового моделирования, подтверждающих эквивалентность вычислений в комплексной и действительной арифметике, ввиду их тривиальности – соответствующие результаты во всех случаях практически тождественно совпадают.

Литература

1. Van Trees H.L. Detection, estimation and modulation theory. Part IV. Optimum array processing. New York: Wiley, 2002.
2. Сосулин Ю.Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. М.: Сов.радио, 1978.
3. Ширман Я.Д., Манжос В.Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. М.: Радио и связь, 1981.
4. Ратынский М.В. Адаптация и сверхразрешение в антенных решетках. М.: Радио и связь, 2003.
5. Зарицкий В.И., Кокин В.Н., Леховицкий Д.И., Саламатин В.В. Рекуррентные алгоритмы адаптивной обработки при центральной симметрии пространственно-временных каналов приема. Изв. вузов. Радиофизика, 1985, т.28, №7, стр.863 – 871; Прикладная радиоэлектроника (Харьков), 2011, т.10, №4, стр.423 – 428.
6. Абрамович Ю.И., Горохов А.Ю. К оценке скорости сходимости адаптивных фильтров компенсации помех с персимметрической корреляционной матрицей. Радиотехника и электроника, 1993, т.38, №1, стр.101 – 111.
7. Леховицкий Д.И. К теории адаптивной обработки сигналов в системах с центральной симметрией каналов приема. Радиотехника (Харьков), 1996, №100, стр.140 – 158; Прикладная радиоэлектроника (Харьков), 2011, т.10, №4, стр.429 – 436.
8. Леховицкий Д.И., Атаманский Д.В., Кириллов И.Г., Зарицкий В.И. Сравнение эффективности адаптивной обработки в произвольных и центрально-симметричных ФАР. Антенны, 2000, №1 (44), стр.99 – 103; Прикладная радиоэлектроника (Харьков), 2011, т.10, №4, стр.437 – 440.
9. Linebarger D.A., DeGroat R.D., Dowling E.M. Efficient direction-finding methods employing forward/backward averaging. IEEE Trans. Signal processing, 1994, v.42, no.8, p.2136 – 2145.
10. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1984.
11. Петров С.В. Адаптивное обнаружение стохастического сигнала в условиях параметрической априорной неопределённости. Сборник научных трудов 1-й Международной научно-практической конференции «Радиоинфоком-2013», Часть1. МИРЭА, 2013, стр.272 – 276.

IMPLEMENTATION OF STOCHASTIC SIGNALS PROCESSING ALGORITHMS IN REAL ARITHMETIC

Ratynsky M.V., Petrov S.V.

Four problems of stochastic signals processing in receiving system with antenna array are discussed: detection, enumeration and directions of arrival estimation of signal sources and adaptive space filtering. The solution of the problems is implemented generally in complex arithmetic. It is proved that solution of all the problems can be implemented in real arithmetic when antenna array has central symmetric structure. The results of complex and real solutions are really identical for all cases, but in the second case (real arithmetic) the amount of computations is four times less as compared with the first one (complex arithmetic).