УДК 621.396.96: 512.643.5

ЭКОНОМИЧНЫЙ АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО СИНГУЛЯРНОГО ЧИСЛА В ЗАДАЧЕ ОБНАРУЖЕНИЯ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА

***Ратынский М.В.**, д.т.н., начальник сектора ОАО «ВНИИРТ», e-mail: m3v5r7@inbox.ru*
***Петров С.В.**, инженер 1 категории ОАО «ВНИИРТ», e-mail: petrovsv@list.ru*

Предложен алгоритм нахождения максимального сингулярного числа прямоугольной комплексной матрицы для решения задачи обнаружения случайного сигнала от внешнего источника на фоне собственных шумов антенно-приемной системы. Алгоритм основан на использовании итерационного степенного метода в применении к матрице выборок входных сигналов обнаружителя, получаемых с выходов элементов антенной решетки. При этом исключается этап формирования выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов, что позволяет получить значительный выигрыш в объеме вычислений, который при определенных параметрах задачи может достигать 5…10 раз и более.

Ключевые слова: обнаружение случайного сигнала, максимальное сингулярное число, степенной метод, прямоугольная комплексная матрица.

Введение

Задача обнаружения случайного или квазислучайного сигнала от внешнего источника на фоне собственных шумов антенно-приемной системы является типовой для ряда областей техники – радиолокации, гидролокации, радиоастрономии, связи, сейсмологии [1-3]. В результате ее решения должен быть сформирован признак обнаружения, равный 1 при наличии сигнала и равный 0 при его отсутствии. Практически задача обнаружения сводится к оценке величины некоторого энергетического параметра, прямо зависящего от мощности принимаемых сигналов на выходе антенно-приемной системы, и сравнению этой величины с порогом, уровень которого определяется допустимой величиной ложной тревоги. Если приемная антенна реализована в виде ФАР и обработка сигналов ведется в цифровой форме, то в наиболее практичном варианте алгоритма оптимального обнаружителя в качестве такого энергетического параметра используется максимальное собственное значение (СЗ) корреляционной матрицы (КМ) входных сигналов [4-6]. В качестве последней обычно используется ее максимально правдоподобная выборочная оценка* [7]

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2K}\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H S, \qquad (1)$$

где $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \dots \mathbf{Y}_K)$ – матрица размера $N \times K$ векторов входных сигналов обнаружителя, столбцами которой являются N-мерные комплексные векторы $\mathbf{Y}_k$ сигналов (комплексных огибающих – КО) с выходов элементов ФАР, получаемые в K последовательных моментов времени; $(\cdot)^H$ – знак эрмитовой сопряженности (транспонирования и комплексной сопряженности).

Для нахождения максимального СЗ λ_1 квадратной эрмитовой матрицы $\mathbf{R}$ удобно использовать хорошо известный итерационный степенной метод [8, 9]; при этом одновременно получается и соответствующий собственный вектор (СВ). Однако в данном случае степенной метод может быть применен непосредственно к прямоугольной матрице $\mathbf{Y}$ для нахождения ее максимального сингулярного числа (СЧ) σ_1, которое с точностью до нормировки равно квадратному корню из λ_1. При определенных условиях, оговоренных ниже, это приводит к значительному сокращению объема вычислений, поскольку исключает этап формирования матрицы $\mathbf{R}$. Соответствующий алгоритм излагается ниже.

Степенной метод в применении к комплексной прямоугольной матрице

Возьмём произвольный вектор $\mathbf{A}_0 \in C^N$ и рассмотрим итерационный процесс, на каждом шаге которого производится вычисление векторов $\mathbf{B}_i \in C^K$ и $\mathbf{A}_i \in C^N$, i = 1,…, I:

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{Y}^H \mathbf{A}_{i-1}; \quad \mathbf{A}_i = \mathbf{Y}\mathbf{B}_i. \qquad (2)$$

Левые сингулярные векторы $\mathbf{U}_j$, j = 1,…, N, матрицы $\mathbf{Y}$ образуют ортонормированный базис в N-мерном пространстве. Поэтому вектор $\mathbf{A}_0$ может быть представлен в виде

$$\mathbf{A}_0 = a_1\mathbf{U}_1 + a_2\mathbf{U}_2 + \dots + a_N\mathbf{U}_N,$$

где a_j – координаты $\mathbf{A}_0$ в этом базисе. Так как $\mathbf{Y}^H\mathbf{U}_j = \sigma_j \mathbf{V}_j$ и $\mathbf{Y}\mathbf{V}_j = \sigma_j \mathbf{U}_j$, где σ_j – сингулярное число матрицы $\mathbf{Y}$, а $\mathbf{V}_j$ – соответствующий правый сингулярный вектор, то

* Наличие двойки в знаменателе нормирующего множителя в выражении (1) обусловлено удобством представления и физической трактовки получаемых результатов, если при нормальных случайных процессах дисперсии квадратурных составляющих КО принимаются равными дисперсиям соответствующих исходных действительных процессов [7, стр.151].

$$\mathbf{B}_i = a_1\sigma_1^{2i-1}\mathbf{V}_1 + a_2\sigma_2^{2i-1}\mathbf{V}_2 + \ldots + a_N\sigma_N^{2i-1}\mathbf{V}_N;$$
$$\mathbf{A}_i = a_1\sigma_1^{2i}\mathbf{U}_1 + a_2\sigma_2^{2i}\mathbf{U}_2 + \ldots + a_N\sigma_N^{2i}\mathbf{U}_N,$$
и если $|\sigma_1| > |\sigma_2| \geq \ldots \geq |\sigma_N|$, то вектор $\mathbf{A}_i$ будет сходиться (с точностью до нормировки) к левому сингулярному вектору $\mathbf{U}_1$, а вектор $\mathbf{B}_i$ – к правому сингулярному вектору $\mathbf{V}_1$. Скорость сходимости определяется отношением $|\sigma_2|/|\sigma_1|$.

Искомое СЧ σ_1 можно найти из выражения (после соответствующей нормировки векторов $\mathbf{A}_I$ и $\mathbf{B}_I$): $\sigma_1 = \mathbf{U}_1^H\mathbf{Y}\mathbf{V}_1 \approx \mathbf{A}_I^H\mathbf{Y}\mathbf{B}_I$. Если вектор $\mathbf{A}_{i-1}$ в начале итерации нормировать, $\mathbf{A}_{i-1} = \mathbf{A}_{i-1}/\|\mathbf{A}_{i-1}\|$, где $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора*, то с той же точностью можно найти $\sigma_1 = \sqrt{\|\mathbf{A}_I\|}$. Если в середине итерации нормировать вектор $\mathbf{B}_i$, $\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_i/\|\mathbf{B}_i\|$ (вне зависимости от того, производится ли нормировка вектора $\mathbf{A}_{i-1}$), то для σ_1 будет справедливо соотношение: $\sigma_1 = \|\mathbf{A}_I\|$. Заметим, что при этом скорость сходимости итерационного процесса будет такой же, как при использовании метода скалярного произведения [8, 9].

Для увеличения скорости сходимости, аналогично степенному методу с квадратной матрицей, возможно использование сдвига [8, 9]. В этом случае вместо алгоритма (2) получаем следующий (с учетом нормировки вектора $\mathbf{A}_{i-1}$):

$$\mathbf{A}_{i-1} = \mathbf{A}_{i-1}/\|\mathbf{A}_{i-1}\|;$$
$$\mathbf{B}_i = \mathbf{Y}^H\mathbf{A}_{i-1};\;\; \mathbf{A}_i = \mathbf{Y}\mathbf{B}_i - \mu\mathbf{A}_{i-1}.$$

Действительно, так как $\mathbf{A}_i = \mathbf{Y}\mathbf{B}_i - \mu\mathbf{A}_{i-1} = \mathbf{Y}\mathbf{Y}^H\mathbf{A}_{i-1} - \mu\mathbf{A}_{i-1} = (\mathbf{R}_1 - \mu\mathbf{I})\mathbf{A}_{i-1}$, то константа μ определяет задаваемую величину сдвига.

Степенной метод в применении к прямоугольной матрице допускает и использование алгоритма исчерпывания [8, 9] для нахождения последующих СЧ и соответствующих сингулярных векторов.

Очевидно, что предлагаемый метод по скорости сходимости и конечным результатам эквивалентен обычному степенному методу с квадратной матрицей $\mathbf{R}_1 = \mathbf{Y}\mathbf{Y}^H$. Точно так же можно построить и алгоритм, эквивалентный степенному методу с квадратной матрицей **$\mathbf{R}_2 = \mathbf{Y}^H\mathbf{Y}$; по аналогии с (1) он будет иметь вид (без учета нормировок):

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{Y}\mathbf{B}_{i-1};\;\; \mathbf{B}_i = \mathbf{Y}^H\mathbf{A}_i. \tag{3}$$

Очевидно, однако, что этот алгоритм не имеет никаких преимуществ по сравнению с (2) и эквивалентен последнему по вычислительным затратам.

Сопоставление по числу операций

Сопоставим предлагаемый алгоритм с каноническим (с промежуточным формированием квадратных эрмитовых матриц $\mathbf{R}_1$ и/или $\mathbf{R}_2$) по числу операций. Под операцией мы будем понимать комплексное умножение-сложение (т.е. сочетание перемножения двух комплексных чисел и сложения двух комплексных чисел), и в формулах для числа операций будем ограничиваться главным членом, пренебрегая членами более высокого порядка малости.

Формирование матрицы $\mathbf{R}_1$ (с учетом ее эрмитовости) требует $KN^2/2$ операций, матрицы $\mathbf{R}_2$ – $K^2N/2$ операций; одна итерация канонического степенного метода в первом случае (матрица $\mathbf{R}_1$) – N^2 операций, во втором (матрица $\mathbf{R}_2$) – K^2 операций. Одна итерация предлагаемого алгоритма (один шаг итерационного цикла (2) или (3)) требует $2KN$ операций.

Таким образом, если требуется найти только максимальное сингулярное число матрицы $\mathbf{Y}$, т.е. можно ограничиться формированием одной из матриц $\mathbf{R}_1$ или $\mathbf{R}_2$ ($\mathbf{R}_1$ выгоднее при $N < K$, а $\mathbf{R}_2$ – при $K < N$; при этом попутно получается один из двух сингулярных векторов, соответствующих σ_1), то при I итерациях канонический алгоритм потребует соответственно $KN^2/2 + IN^2$ или $K^2N/2 + IK^2$ операций, а предлагаемый алгоритм – $2IKN$ операций, но с одновременным получением обоих сингулярных векторов. Например, при $N = 200$, $K = 300$, $I = 10$ число операций для канонического алгоритма составит $6.4\cdot10^6$, а для предлагаемого – $1.2\cdot10^6$, т.е. получается более чем пятикратный выигрыш. Общее условие, при котором предлагаемый алгоритм выгоднее по числу операций, имеет вид:

$$I < \left(\frac{4}{\min(N,K)} - \frac{2}{\max(N,K)}\right)^{-1}.$$

Если же требуется найти не только максимальное сингулярное число матрицы $\mathbf{Y}$, но и оба соответствующих ему сингулярных вектора, т.е. в случае канонического алгоритма нужно формировать обе матрицы $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$, то число операций для него составит $KN^2/2 + IN^2 + K^2N/2 + IK^2$, а для предлагаемого алгоритма – те же $2IKN$. Для прежних значений параметров N, K и I получим соответственно $16.3\cdot10^6$ и $1.2\cdot10^6$ операций, т.е. выигрыш возрастает до более чем тринадцатикратного. При этом предлагаемый алгоритм оказывается более выгодным при любом числе итераций, поскольку формальное условие его преимущества имеет вид

* Та или иная форма нормировки в степенном методе практически всегда необходима [8].

** Строго говоря, КМ $\mathbf{R}$ – это (с точностью до нормировки) матрица $\mathbf{R}_1$, а матрица $\mathbf{R}_2$ не является КМ, но, поскольку матрицы $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ имеют одинаковые наборы ненулевых СЗ [7, стр.153], при нахождении максимального СЗ можно использовать любую из них; какую из двух выгоднее использовать – зависит от соотношения N и K, что отмечено в следующем разделе основного текста статьи.

$$I > -0,5\left(K+N\right)\left(\sqrt{K/N}-\sqrt{N/K}\right)^{-2},$$

а величина в правой части неравенства всегда отрицательна.

Числовой пример

Для иллюстрации эффективности предложенного алгоритма рассмотрим следующий пример. Выборки входных сигналов $\mathbf{Y}_k$ получаются с выходов элементов 200-элементной (т.е. N = 200) эквидистантной линейной антенной решетки с шагом установки излучателей в полволны; число выборок K = 300. Собственные шумы имитируются комплексными числами с независимыми нормально распределенными квадратурными составляющими, имеющими нулевые средние и среднеквадратические отклонения (СКО), равные 1. Сигналы от равномощных внешних источников также представлены нормальными случайными процессами с нулевыми средними со СКО, равными 10, что соответствует отношению сигнал/шум 20 дБ в элементе антенны. Моделируется четыре сценария с числом внешних источников сигналов M, соответственно равным 0, 1, 2 и 12, причем при $M > 1$ направления на источники взаимно ортогональны. Угловые координаты источников для этих сценариев в обобщенной системе координат $u = \sin\alpha$, где α – угол, отсчитываемый от нормали к раскрыву, приведены в табл.1. Взаимно ортогональными направлениями, то есть направлениями, которым соответствуют взаимно ортогональные векторы амплитудно-фазовых распределений поля в раскрыве, в данном случае являются направления, различающиеся в обобщенной системе координат u на величины, кратные 0,01. Заметим, что при взаимной ортогональности направлений на источники сигналов соответствующие СЗ КМ не зависят от конкретных значений угловых координат источников, а определяются только мощностями последних.

При указанных условиях при $K \to \infty$ все шумовые СЗ равны 1, или 0 дБ в логарифмическом масштабе, а все сигнальные СЗ равны 43 дБ.

Таблица 1. Направления на источники сигналов (обобщенные координаты u) при числе источников M более 1

Сценарий 3 (M = 2)	Сценарий 4 (M = 12)			
0,00	0,00	0,30	– 0,10	– 0,40
0,10	0,10	0,40	– 0,20	– 0,50
	0,20	0,50	– 0,30	– 0,60

Результаты моделирования (одна из реализаций по случайности) представлены в табл. 2 и на рис. 1- 4. В табл. 2 приведены 15 старших СЗ выборочной оценки КМ $\mathbf{R}$, рассчитанные точно при помощи стандартной процедуры пакета MathCad. Полученные величины СЗ отличаются от упоминавшихся выше асимптотических значений 43 дБ и 0 дБ вследствие конечности числа выборок K. На рисунках даны графики изменения старшего СЧ матрицы $\mathbf{Y}$ в функции числа итераций предложенного алгоритма соответственно для четырех сценариев; пунктиром показано точное значение максимального СЧ в соответствии с табл. 2 (максимальное СЗ матрицы $\mathbf{R}$ и максимальное СЧ матрицы $\mathbf{Y}$ имеют одинаковые значения в дБ, поскольку СЗ имеют размерность мощности, а СЧ – размерность поля).

Из приведенных результатов следует, что десяти итераций достаточно для оценки старшего СЧ с точностью не хуже 0,2 дБ, что подтверждается и данными других реализаций по случайности. Учитывая, что точное значение старшего СЧ в разных реализациях по случайности колеблется в пределах примерно 1 дБ, практически в большинстве случаев достаточно 4-6 итераций.

Таблица 2.

15 старших СЗ выборочной оценки КМ $\mathbf{R}$ (дБ)

Сценарий 1 M = 0	Сценарий 2 M = 1	Сценарий 3 M = 2	Сценарий 4 M = 12
5,01	42,67	43,22	44,30
4,89	5,14	42,76	43,89
4,79	4,98	4,99	43,60
4,71	4,80	4,85	43,39
4,64	4,76	4,73	43,20
4,58	4,61	4,68	43,04
4,42	4,53	4,53	42,66
4,38	4,47	4,46	42,59
4,34	4,40	4,35	42,40
4,24	4,31	4,32	42,16
4,22	4,19	4,22	42,06
4,09	4,14	4,16	41,83
4,03	4,10	4,10	4,84
3,98	4,03	4,06	4,65
3,90	3,95	4,01	4,55

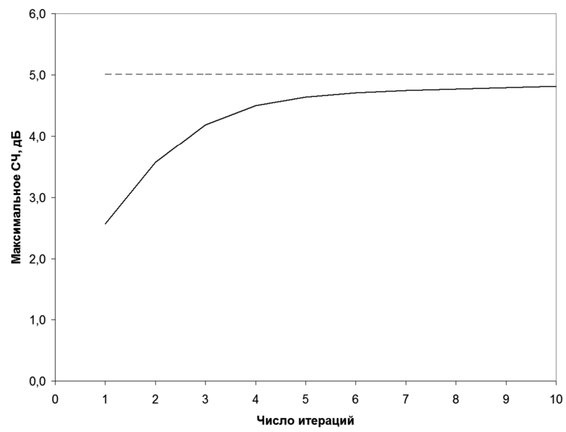

Рис.1. Сценарий 1 (M = 0)

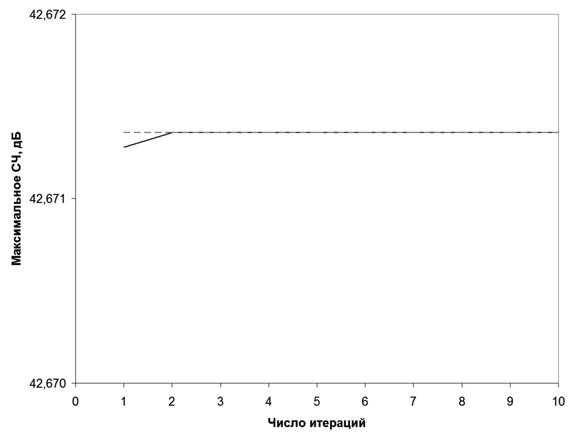

Рис.2. Сценарий 2 (M = 1)

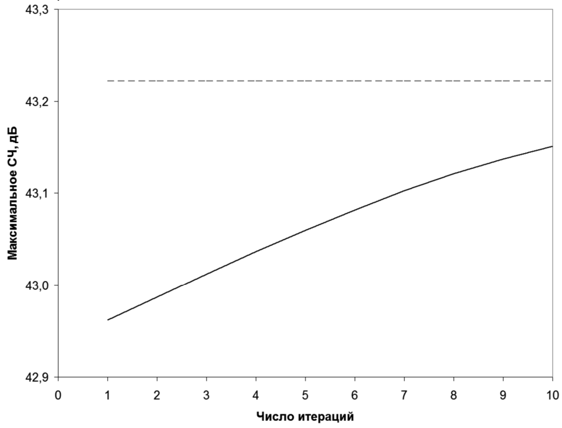

Рис.3. Сценарий 3 (М = 2)

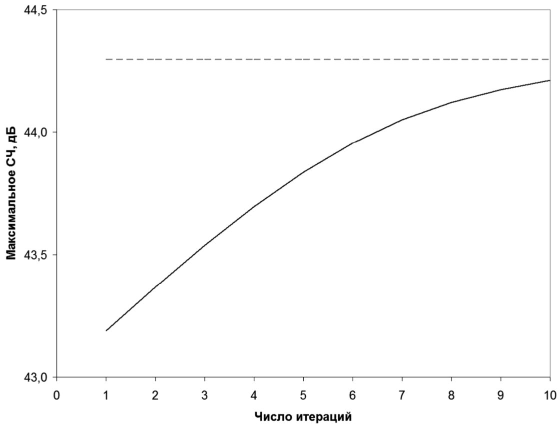

Рис.4. Сценарий 4 (М = 12)

Заключение

Предложенный в настоящей работе алгоритм нахождения максимального СЧ прямоугольной матрицы для задачи обнаружения случайного сигнала использует то обстоятельство, что выборочная оценка КМ $\mathbf{R}$ входных сигналов по (1) однозначно определяется комплексной прямоугольной матрицей $\mathbf{Y}$ выборок входных сигналов. В работе показано, что итерационный степенной метод, традиционно используемый для нахождения максимального СЗ квадратной матрицы, может быть эффективно использован для нахождения максимального СЧ соответствующей прямоугольной матрицы. Это позволяет получить значительный выигрыш в объеме вычислений, который при определенных параметрах задачи может достигать 5…10 раз и более.

Авторы выражают признательность анонимному рецензенту, замечания которого способствовали улучшению статьи.

Литература

1. Сосулин Ю.Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. М.: Сов.радио, 1978.
2. Ширман Я.Д., Манжос В.Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. М.: Радио и связь, 1981.
3. Van Trees H.L. Detection, estimation and modulation theory. Part IV. Optimum array processing. New York: Wiley, 2002.
4. Петров С.В. Обнаружение стохастических сигналов в РЛС с цифровой ФАР. Сборник докладов 3-й научно-технической конференции молодых учёных и специалистов ОАО «ГСКБ «Алмаз-Антей». 2012.
5. Zeng Y., Liang Y.-C., Zhang R. Blindly combined energy detection for spectrum sensing in cognitive radio // IEEE Signal processing letters. 2008. V.15. P.649 – 652.
6. Kritchman S., Nadler B. Non-parametric detection of the number of signals: hypothesis testing and random matrix theory // IEEE Trans. Signal process. 2009. V.57. No.10. P.3930 – 3941.
7. Ратынский М.В. Адаптация и сверхразрешение в антенных решетках. М.: Радио и связь, 2003.
8. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.-Л.: ГИФМЛ, 1963.
9. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, ГРФМЛ, 1970.

EFFECTIVE ALGORITHM OF FINDING MAXIMAL SINGULAR VALUE FOR SOLVING THE PROBLEM OF STOCHASTIC SIGNAL DETECTION

Ratynsky M.V., Petrov S.V.

The algorithm is proposed for finding maximal singular value of rectangular complex matrix for solving the problem of stochastic signal from external source detection against the background of internal receiving system noise. The basis for the algorithm is iterative power method as applied to the matrix of data samples from the outputs of antenna array elements. In doing so the stage of forming sample covariance matrix is omitted, thus giving considerable gain in amount of computations, that by certain problem parameters may be as much as 5 to 10 times and more.