

ОДНОМЕРНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Гадзиковский В.И., д.т.н., профессор Уральского федерального университета им. Первого Президента России
Б.Н. Ельцина, e-mail: gadzikovsky_vi@mail.ru

Ключевые слова: уравнения фильтрации, векторные цифровые фильтры, шумы квантования, модель Л. Джексона.

Уравнения векторной цифровой фильтрации

Типовая задача современной корреляционной теории оптимального управления при квадратическом критерии качества разбивается на две взаимосвязанные задачи: задачу построения наилучших линейных оценок случайных координат объекта, т.е. задачу линейной оптимальной фильтрации, и задачу управления этими оценками [5]. В статье рассматривается первая из названных задач, т.е. задача многоканальной (векторной) совместной обработки сигналов.

Алгоритм одномерной векторной стационарной линейной цифровой фильтрации описывается линейным векторно-матричным уравнением

$$y[n] = \sum_{k=0}^M \mathbf{a}_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N \mathbf{b}_k y[n-k], \quad (1)$$

где $x[n]$ и $y[n]$ – R -координатные векторы входного и выходного дискретных сигналов соответственно; n – дискретное время; \mathbf{a}_k $k = \overline{(0, M)}$ и \mathbf{b}_k $k = \overline{(0, N)}$

— квадратные матрицы размера $R \times R$ весовых коэффициентов. Координаты векторов и элементы матриц могут быть вещественными либо комплексными. При $R=1$ получается алгоритм скалярной фильтрации (вещественной либо комплексной).

В координатной форме уравнение (1) конкретизируется следующим образом [1, 2]:

$$y_i[n] = \sum_{k=0}^M \sum_{l=1}^R a_{k_i l} x_l[n-k] - \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^R b_{k_i l} y_l[n-k], \quad i = \overline{1, R}. \quad (2)$$

По уравнениям (1) [или (2)] может быть построена полная структурная схема векторного ЦФ. Она является слишком громоздкой, а при больших R необозримой, поэтому целесообразно рассматривать укрупнённые схемы.

Возьмём Z -преобразование от обеих частей уравнений системы (2), полагая входной сигнал $\mathbf{x}[n] = \mathbf{0}$ при $n < 0$, а начальные условия в ЦФ нулевыми: $y_l[-n] = 0$, ($n = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, R}$). Воспользуемся свойством линейности Z -преобразования и теоре-

Рассматриваются методы описания и структурные схемы одномерных векторных цифровых фильтров, в том числе с учётом обобщенной линейной шумовой модели Л. Джексона. Проводится оценка влияния шумов и расчет требуемого числа разрядов цифровых сигнальных процессоров с фиксированной точкой.

мой запаздывания, получим систему линейных алгебраических уравнений для Z -изображений координат векторов выходного и входного сигналов [1, 2, 4]:

$$Y_i(z) = \sum_{k=0}^M \sum_{l=1}^R a_{k_i l} z^{-k} X_l(z) - \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^R b_{k_i l} z^{-k} Y_l(z), \quad i = \overline{1, R}. \quad (3)$$

Обозначим передаточные функции нерекурсивных линейных блоков ЦФ:

$$A_{i l}(z^{-1}) = \sum_{k=0}^M a_{k_i l} z^{-k}; \quad B_{i l}(z^{-1}) = \sum_{k=1}^N b_{k_i l} z^{-k}, \quad i, l = \overline{1, R}. \quad (4)$$

Перепишем алгебраические уравнения (3) с учётом обозначений (4):

$$Y_i(z) = \sum_{l=1}^R A_{i l}(z^{-1}) X_l(z) - \sum_{l=1}^R B_{i l}(z^{-1}) Y_l(z), \quad i = \overline{1, R}, \quad (5)$$

из которых получим операторные уравнения в конечных разностях:

$$y_i[n] = \sum_{l=1}^R A_{i l}(z^{-1}) x_l[n] - \sum_{l=1}^R B_{i l}(z^{-1}) y_l[n], \quad i = \overline{1, R}. \quad (6)$$

Представим системы алгебраических уравнений для Z -образов (5) и операторных разностных уравнений (6) соответственно в векторно-матричной форме:

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{A}(z^{-1}) \mathbf{X}(z) - \mathbf{B}(z^{-1}) \mathbf{Y}(z); \quad (7)$$

$$y[n] = \mathbf{A}(z^{-1}) \mathbf{x}[n] - \mathbf{B}(z^{-1}) \mathbf{y}[n], \quad (8)$$

где

$$\mathbf{A}(z^{-1}) = \sum_{k=0}^M \mathbf{a}_k z^{-k}; \quad \mathbf{B}(z^{-1}) = \sum_{k=1}^N \mathbf{b}_k z^{-k} \quad (9)$$

– квадратные матрицы размера $R \times R$.

С учётом шумов квантования (внешних и внутренних) системы уравнений можно представить в виде [4]:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Y}}(z) &= \\ &= [\mathbf{I} + \mathbf{B}(z^{-1})]^{-1} \mathbf{A}(z^{-1}) \{ \mathbf{X}(z) + \mathbf{E}_0(z^{-1}) \} + \\ &+ [\mathbf{I} + \mathbf{B}(z^{-1})]^{-1} \Gamma(z); \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}[n] &= \\ &= [\mathbf{I} + \mathbf{B}(z^{-1})]^{-1} \mathbf{A}(z^{-1}) \{ \mathbf{x}(z) + \mathbf{e}_0[n] \} + \\ &+ [\mathbf{I} + \mathbf{B}(z^{-1})]^{-1} \gamma[n]. \end{aligned} \quad (11)$$

Укрупнённая структурная схема одномерного векторного стационарного линейного ЦФ с учётом шумов квантования, построенная согласно уравнений (10) и (11), изображена на рис.1 [4].

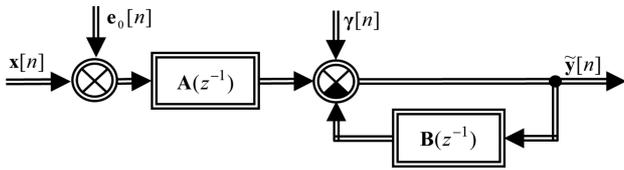


Рис.1. Укрупнённая структурная схема одномерного векторного стационарного линейного ЦФ с учётом шумов квантования

Согласно определению передаточной функции [1, 2, 4] из уравнения (7) получим выражение для матрицы передаточных функций:

$$\mathbf{H}(z) = [\mathbf{I} + \mathbf{B}(z^{-1})]^{-1} \mathbf{A}(z^{-1}), \quad (12)$$

элементы которой определяются выражениями

$$H_{il}(z) = \frac{Z\{y_l[n]\}}{Z\{x_i[n]\}} \Big|_{\text{Нулевые начальные условия}}, \quad (13)$$

$i, l = \overline{1, R}$.

Нерекурсивный ЦФ является частным случаем рекурсивного при $\mathbf{b}_k = \mathbf{0}$ ($k = \overline{1, N}$), поэтому для него

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{A}(z^{-1}). \quad (14)$$

Располагая матрицей передаточных функций $\mathbf{H}(z)$ для линейного ЦФ можно определить все другие характеристики, учитывая связь между ними:

- матрицу импульсных характеристик

$$\mathbf{h}[n] = Z^{-1} \{ \mathbf{H}(z) \}; \quad \mathbf{H}(z) = Z \{ \mathbf{h}[n] \}; \quad (15)$$

- матрицу комплексных частотных характеристик

$$\mathbf{H}(e^{j\omega T}) = \mathbf{H}(z) \Big|_{z = \exp(j\omega T)}. \quad (16)$$

Элементы матрицы комплексных частотных характеристик удобно представить в полярной форме:

$$\begin{aligned} H_{il}(e^{j\omega T}) &= \left| H_{il}(e^{j\omega T}) \right| e^{j \text{Arg}[H_{il}(e^{j\omega T})]} = \\ &= A_{il}(\omega T) \exp [j\phi_{il}(\omega T)], \quad i, l = \overline{1, R}. \end{aligned} \quad (17)$$

Разделить матрицу комплексных частотных характеристик $\mathbf{H}(e^{j\omega T})$, которая полностью описывает свой-

ства векторного ЦФ, на две отдельные матрицы амплитудно-частотных $\mathbf{A}(\omega T)$ и фазочастотных $\mathbf{\Phi}(\omega T)$ характеристик невозможно. Матрицы $\mathbf{A}(\omega T)$ и $\mathbf{\Phi}(\omega T)$, формально построенные из элементов $A_{il}(\omega T)$ и $\Phi_{il}(\omega T)$ ($i, l = \overline{1, R}$) выражения (15), во-первых, не являются полными характеристиками ЦФ, во-вторых, из них не удаётся сформировать матрицу $\mathbf{H}(e^{j\omega T})$, как это было сделано для скалярных ЦФ в [1, 2, 4].

Конкретизируем укрупнённую структурную схему одномерного векторного стационарного рекурсивного линейного ЦФ для случаев $R = 2$ и $R = 3$.

При $R = 2$ система уравнений (3) принимает следующий вид [1, 2]:

$$\begin{cases} y_1[n] = \sum_{k=0}^M (a_{k11} x_1[n-k] + a_{k12} x_2[n-k]) - \\ - \sum_{k=1}^N (b_{k11} y_1[n-k] + b_{k12} y_2[n-k]); \\ y_2[n] = \sum_{k=0}^M (a_{k21} x_1[n-k] + a_{k22} x_2[n-k]) - \\ - \sum_{k=1}^N (b_{k21} y_1[n-k] + b_{k22} y_2[n-k]). \end{cases} \quad (18)$$

С учётом обозначений (4) для передаточных функций блоков ЦФ запишем операторные уравнения в конечных разностях (6) в следующем виде:

$$\begin{cases} y_1[n] = A_{11}(z^{-1}) x_1[n] + A_{12}(z^{-1}) x_2[n] - \\ - B_{11}(z^{-1}) y_1[n] - B_{12}(z^{-1}) y_2[n]; \\ y_2[n] = A_{21}(z^{-1}) x_1[n] + A_{22}(z^{-1}) x_2[n] - \\ - B_{21}(z^{-1}) y_1[n] - B_{22}(z^{-1}) y_2[n]. \end{cases} \quad (19)$$

Укрупнённая структурная схема двухкоординатного векторного ЦФ, построенная по уравнениям (17), изображена на рис. 2 [1, 2]. Она содержит два канала передачи сигналов, содержащие обратные связи, с передаточными

функциями $\frac{A_{11}(z^{-1})}{1 + B_{11}(z^{-1})}$ и $\frac{A_{22}(z^{-1})}{1 + B_{22}(z^{-1})}$.

Между этими каналами действуют перекрёстные связи (прямые и обратные) через блоки с передаточными функциями $A_{12}(z^{-1})$, $A_{21}(z^{-1})$, $B_{12}(z^{-1})$ и $B_{21}(z^{-1})$.

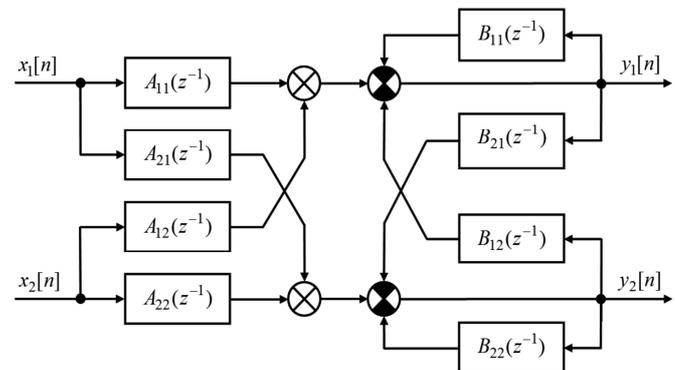


Рис.2. Укрупнённая структурная схема двухкоординатного векторного ЦФ

При $R = 3$ система операторных разностных уравнений (6) с учётом обозначений (4) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} y_1[n] = A_{11}(z^{-1}) x_1[n] + \\ + A_{12}(z^{-1}) x_2[n] + A_{13}(z^{-1}) x_3[n] - \\ - B_{11}(z^{-1}) y_1[n] - B_{12}(z^{-1}) y_2[n] - \\ - B_{13}(z^{-1}) y_3[n]; \\ y_2[n] = A_{21}(z^{-1}) x_1[n] + \\ + A_{22}(z^{-1}) x_2[n] + A_{23}(z^{-1}) x_3[n] - \\ - B_{21}(z^{-1}) y_1[n] - B_{22}(z^{-1}) y_2[n] - \\ - B_{23}(z^{-1}) y_3[n]; \\ y_3[n] = A_{31}(z^{-1}) x_1[n] + \\ + A_{32}(z^{-1}) x_2[n] + A_{33}(z^{-1}) x_3[n] - \\ - B_{31}(z^{-1}) y_1[n] - B_{32}(z^{-1}) y_2[n] - \\ - B_{33}(z^{-1}) y_3[n]. \end{cases} \quad (20)$$

Укрупнённая структурная схема трёхкоординатного векторного ЦФ, построенная по уравнениям (20), изображена на рис.3.

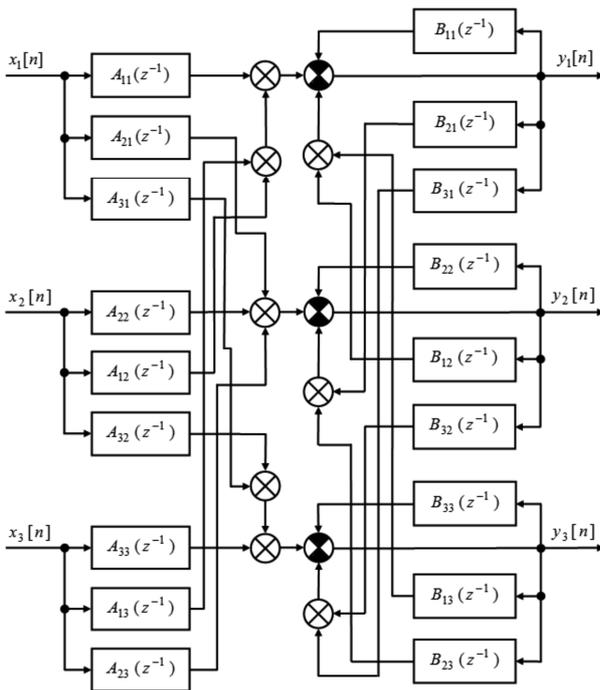


Рис.3. Укрупнённая структурная схема трёхкоординатного векторного ЦФ

Она содержит три канала передачи сигналов, передаточные функции которых $\frac{A_{11}(z^{-1})}{1+B_{11}(z^{-1})}$, $\frac{A_{22}(z^{-1})}{1+B_{22}(z^{-1})}$ и

$\frac{A_{33}(z^{-1})}{1+B_{33}(z^{-1})}$, а также перекрёстные, т.е. межканальные связи (прямые и обратные) через блоки с передаточными функциями: $A_{12}(z^{-1})$, $A_{13}(z^{-1})$, $A_{21}(z^{-1})$,

$A_{23}(z^{-1})$, $A_{31}(z^{-1})$, $A_{32}(z^{-1})$, $B_{12}(z^{-1})$, $B_{13}(z^{-1})$, $B_{21}(z^{-1})$, $B_{23}(z^{-1})$, $B_{31}(z^{-1})$ и $B_{32}(z^{-1})$.

Как видно из рассмотренных примеров при $R = 2$ и $R = 3$, структурная схема векторного ЦФ существенно усложняется с увеличением числа координат векторного сигнала. Аналогично могут быть построены структурные схемы стационарных векторных ЦФ при больших размерах R векторов.

В общем случае укрупнённая структурная схема одномерного векторного стационарного рекурсивного линейного ЦФ состоит из R каналов с передаточными функциями $A_{ii}(z^{-1}) / [1 + B_{ii}(z^{-1})]$ ($i = \overline{1, R}$), между каналами действуют прямые, а также обратные перекрёстные связи через блоки с передаточными функциями $A_{il}(z^{-1})$ и $B_{il}(z^{-1})$ ($i, l = \overline{1, R}$), где $i \neq l$.

В выражении (10) в общем случае нельзя поменять местами матрицы $\mathbf{A}(z^{-1})$ и $[\mathbf{I} + \mathbf{B}(z^{-1})]^{-1}$, как это возможно в случае скалярных ЦФ, поскольку операция умножения матриц некоммукативна, т.е.

$$[\mathbf{I} + \mathbf{B}(z^{-1})]^{-1} \mathbf{A}(z^{-1}) \neq \mathbf{A}(z^{-1}) [\mathbf{I} + \mathbf{B}(z^{-1})]^{-1}. \quad (21)$$

Подобная перестановка приводит к ЦФ с другой матрицей передаточных функций, т.е. к другому ЦФ, а не к фильтру при канонической форме реализации [1, 2].

Векторные цифровые фильтры сложной структуры

Векторные ЦФ сложной структуры, точно так же как и скалярные, могут быть получены соединением элементарных блоков. Применяют три типа соединений: каскадное (последовательное), параллельное и соединение с обратной связью. На рис. 4 показаны двухзвенные структуры векторных ЦФ при названных типах соединений. По известным матрицам передаточных функций блоков и способам их соединения требуется определить матрицу передаточных функций векторного ЦФ сложной структуры $\mathbf{H}(z)$.

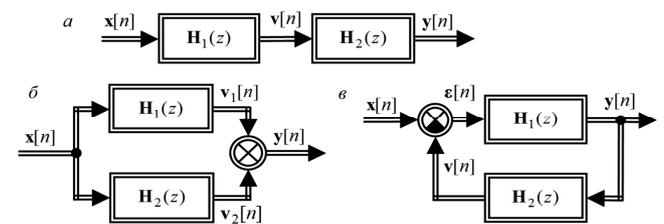


Рис.4. Двухзвенные структуры векторных ЦФ при различных типах соединений звеньев: каскадное (а), параллельное (б), с обратной связью (в)

При каскадном соединении двух блоков ЦФ (рис. 4, а) алгебраические матричные уравнения для Z -образов векторных сигналов имеют вид [1, 2, 4]

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{H}_2(z) \mathbf{H}_1(z) \mathbf{X}(z), \quad (22)$$

откуда следует

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{H}_2(z) \mathbf{H}_1(z), \quad (23)$$

т.е. матрица $\mathbf{H}_2(z)$ умножается на матрицу $\mathbf{H}_1(z)$ слева.

В общем случае, когда каскадно соединены L блоков, матрица передаточных функций векторного ЦФ сложной структуры имеет следующий вид:

$$\mathbf{H}(z) = \prod_{r=1}^L \mathbf{H}_{L+1-r}(z) = \mathbf{H}_L(z) \mathbf{H}_{L-1}(z) \dots \mathbf{H}_2(z) \mathbf{H}_1(z), \quad (24)$$

т.е. матрицы в произведении располагаются в порядке, обратном порядку следования соединяемых блоков по ходу распространения векторного сигнала.

При параллельном соединении L блоков (рис. 4, б), с учётом коммутативности операции сложения матриц, матрица передаточных функций векторного ЦФ сложной структуры имеет вид:

$$\mathbf{H}(z) = \sum_{r=1}^L \mathbf{H}_r(z). \quad (25)$$

Структурная схема ЦФ при соединении двух блоков с отрицательной обратной связью (рис. 4, в) описывается следующей системой алгебраических матричных уравнений для Z -образов векторных сигналов:

$$\begin{cases} \mathbf{Y}(z) = \mathbf{H}_1(z) \mathbf{E}(z); \\ \mathbf{E}(z) = \mathbf{X}(z) - \mathbf{V}(z); \\ \mathbf{V}(z) = \mathbf{H}_2(z) \mathbf{Y}(z). \end{cases} \quad (26)$$

Исключая из (26) промежуточные переменные, получим

$$[\mathbf{I} + \mathbf{H}_1(z) \mathbf{H}_2(z)] \mathbf{Y}(z) = \mathbf{H}_1(z) \mathbf{X}(z), \quad (27)$$

откуда следует выражение для матрицы передаточных функций при соединении двух блоков с отрицательной обратной связью

$$\mathbf{H}(z) = [\mathbf{I} + \mathbf{H}_1(z) \mathbf{H}_2(z)]^{-1} \mathbf{H}_1(z). \quad (28)$$

С учётом соотношения (16) из формул (24), (25) и (28) можно получить выражения для матриц комплексных частотных характеристик $\mathbf{H}(e^{j\omega T})$ одномерных R -координатных векторных стационарных линейных ЦФ сложной структуры.

Теория векторных ЦФ в основных чертах похожа на теорию скалярных ЦФ, однако имеются и некоторые различия, связанные с некоммутативностью операции перемножения матриц. Как следствие, это приводит к невозможности канонической формы реализации векторных ЦФ. Кроме того, в матричной алгебре отсутствует операция деления двух матриц. На практике она заменяется операцией умножения слева на обратную матрицу [см. формулы (12), (28)].

Обобщённая линейная шумовая модель ЦФ (схема Л. Джексона)

Полагая, что векторный ЦФ сложной структуры состоит из соединённых определённым образом простых векторных блоков (рис. 1, 4), можно составить для него обобщённую линейную шумовую модель (схему Л. Джексона – рис. 5), пригодную для анализа шумов квантования на выходе векторного ЦФ и оценки максимальных модульных значений сигналов, что требуется

для расчёта необходимой разрядности регистров операционных устройств ЦФ.

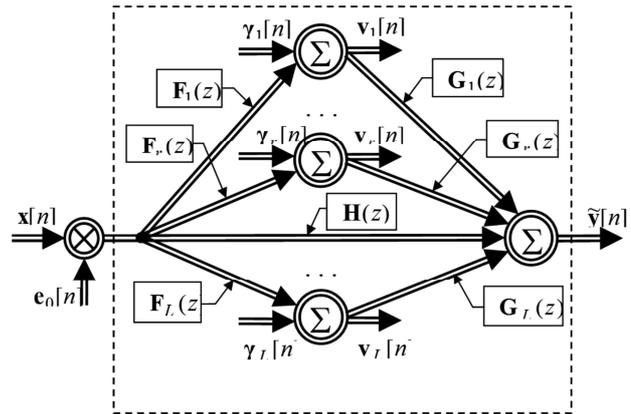


Рис.5. Обобщённая линейная шумовая модель векторного ЦФ (схема Л. Джексона)

Обобщённая линейная шумовая модель Л. Джексона представляет собой направленный граф (рис.5), в котором использованы следующие обозначения [4]:

$\mathbf{x}[n]$ – R -координатный вектор входных сигналов (неквантованных);

$\tilde{\mathbf{y}}[n]$ – R -координатный вектор квантованных выходных сигналов ЦФ;

$\mathbf{e}_0[n]$ – R -координатный вектор шумов квантования входных сигналов (внешние шумы ЦФ);

$\boldsymbol{\gamma}_r[n]$ ($r = \overline{1, L}$) – R -координатный вектор эквивалентных шумов квантования, приведённых к входу r -го векторного сумматора, т.е. шумов квантования результатов умножения сигналов на весовые коэффициенты в умножителях, подключённых к его входам (рис. 1, 5);

$\mathbf{v}_r[n]$ ($r = \overline{1, L}$) – R -координатный вектор сигналов на выходе r -го векторного сумматора;

$\mathbf{H}(z)$ – матрица передаточных функций ЦФ (от входа до выхода) размера $R \times R$;

$\mathbf{G}_r(z)$ ($r = \overline{1, L}$) – матрица передаточных функций размера $R \times R$ части ЦФ от входа r -го векторного сумматора (шум $\boldsymbol{\gamma}_r[n]$) до выхода фильтра;

$\mathbf{F}_r(z)$ ($r = \overline{1, L}$) – матрица передаточных функций размера $R \times R$ части ЦФ от входа фильтра до выхода r -го векторного сумматора (сигнал $\mathbf{v}_r[n]$).

Оценки сигналов и шумов в стационарных векторных ЦФ

На рис. 6 изображена модель одномерного векторного вещественного стационарного линейного ЦФ простой структуры [4].

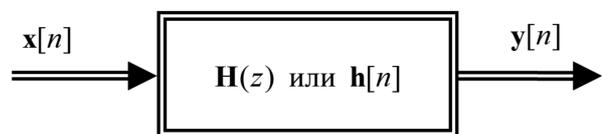


Рис.6. Модель одномерного векторного вещественного стационарного линейного ЦФ простой структуры

В зависимости от решаемой задачи под векторными процессами $\mathbf{x}[n]$ и $\mathbf{y}[n]$ на рис. 6 будем понимать либо R -координатные векторные полезные сигналы, либо векторные шумы квантования $\mathbf{e}_0[n]$ и $\mathbf{\gamma}_r[n]$ ($r = \overline{1, L}$), а под $\mathbf{H}(z)$ – матрицы передаточных функций размера $R \times R$ схемы Л. Джексона (рис. 5) $\mathbf{H}(z)$, $\mathbf{G}_r(z)$, $\mathbf{F}_r(z)$ ($r = \overline{1, L}$) и соответствующие им матрицы импульсных характеристик $\mathbf{h}[n]$, $\mathbf{g}_r[n]$, $\mathbf{f}_r[n]$ ($r = \overline{1, L}$).

Для скалярных ЦФ простой структуры детерминированная модульная оценка сигналов осуществлялась на основе формулы [4]

$$\max_n |y[n]| \leq \max_n |x[n]| \max_{\omega} |H(e^{j\omega T})|, \quad (29)$$

а вероятностные на основе следующих формул [4]:

$$m_y = m_x \sum_{n=0}^{\infty} h[n] = m_x \left| H(e^{j\omega T}) \right|_{\omega=0}; \quad (30)$$

$$D_y = D_x \sum_{n=0}^{\infty} h^2[n] = D_x \left\| H(e^{j\omega T}) \right\|_2^2, \quad (31)$$

где

$$\left\| H(e^{j\omega T}) \right\|_p = \left[\frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |H(e^{j\omega T})|^p d\omega \right]^{1/p}. \quad (32)$$

– норма в пространстве L_p комплексной частотной характеристики $H(e^{j\omega T})$.

Запишем аналоги этих формул в векторно-матричной форме.

Введём в рассмотрение спектральные образы векторных и матричных объектов: $\mathbf{X}(e^{j\omega T})$ и $\mathbf{Y}(e^{j\omega T})$ – R -координатные векторы, координаты которых представляют комплексные спектры координат векторных процессов $\mathbf{x}[n]$ и $\mathbf{y}[n]$ соответственно:

$$\begin{cases} X_i(e^{j\omega T}) = F \{ x_i[n] \}; \\ Y_i(e^{j\omega T}) = F \{ y_i[n] \}, \end{cases} \quad i = \overline{1, R}; \quad (33)$$

$\mathbf{H}(e^{j\omega T})$ – матрица комплексных частотных характеристик размера $R \times R$, элементы которой, согласно формуле (16), образуются из элементов матрицы передаточных функций $\mathbf{H}(z)$.

Детерминированный подход

Согласно определению нормы скалярной функции в пространстве L_p [см. (32)] образуем нормы координат (33) в пространстве L_1 [4]:

$$\max_n |x_i[n]| \leq \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |X_i(e^{j\omega T})| d\omega =$$

$$= \left\| X_i(e^{j\omega T}) \right\|_1, \quad i = \overline{1, R}; \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \max_n |y_i[n]| &\leq \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |Y_i(e^{j\omega T})| d\omega = \\ &= \left\| Y_i(e^{j\omega T}) \right\|_1, \quad i = \overline{1, R} \end{aligned} \quad (35)$$

и элементов матрицы $\mathbf{H}(e^{j\omega T})$ [см. (16), (17)] в пространстве L_∞ [4]:

$$\left\| H_{il}(e^{j\omega T}) \right\|_\infty = \max_{\omega \in [-\pi/T, \pi/T]} |H_{il}(e^{j\omega T})|, \quad (36)$$

$$i, l = \overline{1, R}.$$

Из координат (34) и (35) построим R -координатные векторы \mathbf{X}_{\max} , и \mathbf{Y}_{\max} , а из элементов (36) – квадратную матрицу \mathbf{H}_∞ размера $R \times R$. Используя их, запишем векторно-матричный аналог скалярной формулы (29):

$$\mathbf{Y}_{\max} \leq \mathbf{H}_\infty \mathbf{X}_{\max}. \quad (37)$$

Неравенство (37) используется при детерминированном подходе к анализу векторных ЦФ (максимальная модульная оценка сигналов в структуре ЦФ и шумов квантования на выходе ЦФ).

Вероятностный подход

Согласно определениям математического ожидания (10.20) и дисперсии (10.21) шумов квантования ЦФ для векторных процессов $\mathbf{x}[n]$ и $\mathbf{y}[n]$ расчётной схемы, изображённой на рис. 6, построим R -координатные векторы математических ожиданий (\mathbf{X}_M и \mathbf{Y}_M) и векторы дисперсий (\mathbf{X}_D и \mathbf{Y}_D), координаты которых определяются выражениями

$$\begin{cases} X_{M_i} = M \{ x_i[n] \}; \\ Y_{M_i} = M \{ y_i[n] \}, \end{cases} \quad i = \overline{1, R}; \quad (38)$$

$$\begin{cases} X_{D_i} = M \{ (x_i[n] - X_{M_i})^2 \}; \\ Y_{D_i} = M \{ (y_i[n] - Y_{M_i})^2 \}, \end{cases} \quad i = \overline{1, R}. \quad (39)$$

Здесь $M \{ \dots \}$ – символ математического ожидания.

Из элементов матрицы комплексных частотных характеристик $\mathbf{H}(e^{j\omega T})$ размера $R \times R$ в соответствии с (30) сформируем элементы

$$H_{M_{il}} = H_{il}(e^{j\omega T}) \Big|_{\omega=0}, \quad i, l = \overline{1, R}, \quad (40)$$

равные значениям элементов исходной матрицы на нулевой частоте, а в соответствии с (31) – элементы

$$H_{D_{il}} = \left\| H_{il}(e^{j\omega T}) \right\|_2^2, \quad i, l = \overline{1, R}, \quad (41)$$

равные квадратам норм элементов матрицы $\mathbf{H}(e^{j\omega T})$ в пространстве L_2 .

Из элементов (40) построим квадратную матрицу \mathbf{H}_M размера $R \times R$, а из элементов (41) – матрицу \mathbf{H}_D . Используя их, запишем аналоги скалярных формул (30) и (31) в векторно-матричной форме [4]:

$$\mathbf{Y}_M = \mathbf{H}_M \mathbf{X}_M; \quad (42)$$

$$\mathbf{Y}_D = \mathbf{H}_D \mathbf{X}_D. \quad (43)$$

Эти выражения используются для анализа векторных вещественных ЦФ при вероятностном подходе.

Максимальные модульные оценки сигналов в векторном ЦФ простой структуры

Для схемы, изображённой на рис.1, при заданных максимальных модульных значениях координат входного вектора $\mathbf{x}[n]$ полезного сигнала по формуле (37) рассчитываются максимальные модульные оценки координат выходного вектора $\mathbf{y}[n]$ полезного сигнала.

Максимальные модульные оценки сигналов на выходах умножителей на весовые коэффициенты векторного ЦФ определяется следующими выражениями [2, 4]:

$$\begin{cases} V_{Bk_{il}} = Y_{\max_i} |b_{k_{il}}|, & k = \overline{1, N}; \\ V_{Am_{il}} = X_{\max_m} |a_{m_{il}}|, & m = \overline{0, M}, \end{cases} \quad i, l = \overline{1, R}. \quad (44)$$

Выбирая наибольшее значение из максимальных модульных оценок входных и выходных сигналов, а также из оценок (44) во внутренних точках структурной схемы векторного ЦФ, можно записать

$$V = \max_{k, m, i, l} \{ X_i, Y_l, V_{Bk_{il}}, V_{Am_{il}} \}, \quad (45)$$

$$k = \overline{1, N}, \quad m = \overline{0, M}, \quad i, l = \overline{1, R}.$$

Оценка (45) используется при определении числа разрядов $S_{\text{ц}}$ операционных устройств DSP для представления кодов целых частей отсчётов сигналов в векторном ЦФ простой структуры.

Вероятностные оценки шумов квантования в векторном ЦФ простой структуры

Для линейной шумовой модели векторного ЦФ простой структуры, изображённой на рис. 1, введём следующие обозначения R -координатных векторов:

\mathbf{m}_0 – вектор математических ожиданий шумов квантования входных сигналов (вектора $\mathbf{e}_0[n]$), т.е. внешних шумов квантования; координаты вектора \mathbf{m}_0 определяются выражением $m_{0_i} = M \{ e_{0_i}[n] \} \quad (i = \overline{1, R})$;

\mathbf{D}_0 – вектор дисперсий шумов квантования входных сигналов (вектора $\mathbf{e}_0[n]$), т.е. внешних шумов квантования; координаты вектора \mathbf{D}_0 определяются выражением $D_{0_i} = M \{ (e_{0_i}[n] - m_{0_i})^2 \} \quad (i = \overline{1, R})$;

\mathbf{m}_y – вектор математических ожиданий шумов квантования сигналов на выходе векторного ЦФ (в составе

вектора $\tilde{\mathbf{y}}[n]$); координаты вектора \mathbf{m}_y определяются выражением $m_{y_i} = M \{ y_i[n] \} \quad (i = \overline{1, R})$;

\mathbf{D}_y – вектор дисперсий шумов квантования сигналов на выходе векторного ЦФ (в составе вектора $\tilde{\mathbf{y}}[n]$); координаты вектора \mathbf{D}_y определяются выражением $D_{y_i} = M \{ (y_i[n] - m_{y_i})^2 \} \quad (i = \overline{1, R})$;

\mathbf{m}_γ – вектор математических ожиданий внутренних шумов квантования, приведённых к входу векторного сумматора (вектора $\boldsymbol{\gamma}[n]$); координаты вектора \mathbf{m}_γ определяются выражением $m_{\gamma_i} = M \{ \gamma_i[n] \} \quad (i = \overline{1, R})$;

\mathbf{D}_γ – вектор дисперсий внутренних шумов квантования, приведённых к входу векторного сумматора (вектора $\boldsymbol{\gamma}[n]$); координаты вектора \mathbf{D}_γ определяются выражением $D_{\gamma_i} = M \{ (\gamma_i[n] - m_{\gamma_i})^2 \} \quad (i = \overline{1, R})$.

Аналогично тому, как из элементов матрицы $\mathbf{H}(z)$ была построена матрица \mathbf{H}_D размера $R \times R$ [см. (41)], из элементов матрицы $\mathbf{G}_1(z)$ построим матрицу \mathbf{G}_{1D} размера $R \times R$, элементы которой равны квадратам норм в пространстве L_2 элементов матрицы комплексных частотных характеристик $\mathbf{G}_1(e^{j\omega T})$:

$$G_{D_{1il}} = \left\| G_{1il}(e^{j\omega T}) \right\|_2^2, \quad i, l = \overline{1, R}. \quad (46)$$

Кроме того, построим матрицу \mathbf{G}_{M_1} размера $R \times R$, элементы которой равны значениям элементов матрицы комплексных частотных характеристик $\mathbf{G}_1(e^{j\omega T})$ на нулевой частоте [ср. с (40)]:

$$G_{M_{1il}} = G_{1il}(e^{j\omega T}) \Big|_{\omega=0}, \quad i, l = \overline{1, R}. \quad (47)$$

Согласно (42) и (43) получим оценки векторов математических ожиданий и дисперсий составляющих выходного шума векторного ЦФ [4]:

$$\mathbf{m}_{y_{\text{вх}}} = \mathbf{H}_M \mathbf{m}_0; \quad (48)$$

$$\mathbf{D}_{y_{\text{вх}}} = \mathbf{H}_D \mathbf{D}_0, \quad (49)$$

обусловленных внешними шумами квантования, и

$$\mathbf{m}_{y_{\text{соб}}} = \mathbf{G}_{M_1} \mathbf{m}_\gamma; \quad (50)$$

$$\mathbf{D}_{y_{\text{соб}}} = \mathbf{G}_{D_1} \mathbf{D}_\gamma, \quad (51)$$

обусловленных собственными шумами квантования.

Объединяя (48) с (50) и (49) с (51), получим результирующие оценки [4]:

$$\mathbf{m}_y = \mathbf{m}_{y_{\text{вх}}} + \mathbf{m}_{y_{\text{соб}}} = \mathbf{H}_M \mathbf{m}_0 + \mathbf{G}_{M_1} \mathbf{m}_\gamma; \quad (52)$$

$$\mathbf{D}_y = \mathbf{D}_{y_{\text{вх}}} + \mathbf{D}_{y_{\text{соб}}} = \mathbf{H}_D \mathbf{D}_0 + \mathbf{G}_{D_1} \mathbf{D}_\gamma. \quad (53)$$

Максимальные модульные оценки сигналов в векторном ЦФ сложной структуры

Для схемы, изображённой на рис. 5 (схема Л.Б. Джексона), при заданных максимальных модульных значениях координат входного вектора $\mathbf{x}[n]$ (\mathbf{X}_{\max}) полезного сигнала согласно формуле (37) рассчитываются максимальные модульные оценки координат выходного вектора $\mathbf{y}[n]$ полезного сигнала и выходов векторных сумматоров $\mathbf{v}_r[n]$ ($r = \overline{1, L}$):

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_{\max} \leq \mathbf{H}_{\infty} \mathbf{X}_{\max}; \\ \mathbf{V}_r \leq \mathbf{F}_{r_{\infty}} \mathbf{X}_{\max}, \quad r = \overline{1, L}. \end{cases} \quad (54)$$

Максимальные модульные оценки сигналов на выходах умножителей на весовые коэффициенты векторного ЦФ определяется следующими выражениями, аналогичными формулам (44) для векторного ЦФ простой структуры [2, 4]:

$$\begin{cases} V_{Brk_{il}} = V_{rl} |b_{rk_{il}}|, \quad k = \overline{1, N_r}; \\ V_{Arm_{il}} = V_{rl} |a_{rm_{il}}|, \quad m = \overline{0, M_r}, \end{cases} \quad (55)$$

$$r = \overline{1, L}, \quad i, l = \overline{1, R}.$$

Здесь \mathbf{V}_r ($r = \overline{1, L}$) – максимальные модульные оценки сигналов на выходе r -го векторного многовходового сумматора, т.е. сумматора, выход которого подключён к r -му блоку ЦФ сложной структуры (в частном случае это может быть входной сигнал, максимальная модульная оценка которого задаётся вектором \mathbf{X}_{\max}). Выбирая наибольшее значение из максимальных модульных оценок входных \mathbf{X}_{\max} и выходных \mathbf{Y}_{\max} сигналов, сигналов на выходах векторных сумматоров \mathbf{V}_r ($r = \overline{1, L}$), а также из оценок (55) во внутренних точках структурных схем блоков векторного ЦФ сложной структуры, можно записать

$$V = \max_{r, k, m, i, l} \left\{ X_i, Y_l, V_{r_i}, V_{Brk_{il}}, V_{Arm_{il}} \right\}, \quad (56)$$

$$r = \overline{1, L}, \quad k = \overline{1, N_r}, \quad m = \overline{0, M_r},$$

$$i, l = \overline{1, R}.$$

[ср. с формулой (45) для векторного ЦФ простой структуры].

Оценка (56) используется при определении числа разрядов $S_{\text{ц}}$ операционных устройств DSP для представления кодов целых частей отсчётов сигналов в векторном ЦФ сложной структуры.

Вероятностные оценки шумов квантования в векторном ЦФ сложной структуры

При вероятностном подходе к анализу векторы математических ожиданий \mathbf{m}_y и дисперсий \mathbf{D}_y шумов квантования сигналов на выходе векторного ЦФ (в со-

ставе вектора $\tilde{\mathbf{y}}[n]$) складываются из векторов $\mathbf{m}_{\text{увх}}$,

$\mathbf{D}_{\text{увх}}$, обусловленных внешними шумами квантования, которые поступают на вход ЦФ в результате квантования аналоговых сигналов, и векторов $\mathbf{m}_{\text{усоб}}$, $\mathbf{D}_{\text{усоб}}$, обусловленных собственными (внутренними) шумами квантования результатов арифметических операций.

Для векторных ЦФ сложной структуры (см. рис.5) оценки векторов $\mathbf{m}_{\text{увх}}$ и $\mathbf{D}_{\text{увх}}$, как и в случае векторных ЦФ простой структуры (рис.1), рассчитываются по формулам (48) и (49) соответственно.

Составляющие векторов $\mathbf{m}_{\text{усоб}}$ и $\mathbf{D}_{\text{усоб}}$, обусловленные r -м блоком векторного ЦФ сложной структуры (рис. 5), оцениваются соотношениями, аналогичными (50) и (51):

$$\mathbf{m}_{\text{усоб}_r} = \mathbf{G}_{M_r} \mathbf{m}_{\gamma_r}, \quad r = \overline{1, L}; \quad (57)$$

$$\mathbf{D}_{\text{усоб}_r} = \mathbf{G}_{D_r} \mathbf{D}_{\gamma_r}, \quad r = \overline{1, L}. \quad (58)$$

Суммируя (57) и (58) по всем r (т.е. по всем блокам ЦФ сложной структуры, рис. 5), получим оценки векторов математических ожиданий и дисперсий собственных шумов квантования на выходе ЦФ [4]:

$$\mathbf{m}_{\text{усоб}} = \sum_{r=1}^L \mathbf{G}_{M_r} \mathbf{m}_{\gamma_r}; \quad (58)$$

$$\mathbf{D}_{\text{усоб}} = \sum_{r=1}^L \mathbf{G}_{D_r} \mathbf{D}_{\gamma_r}. \quad (59)$$

Объединяя оценки (48) с (58) и (49) с (59), получим расчётные формулы для оценки вектора математических ожиданий и вектора дисперсий шумов квантования сигналов на выходе векторного ЦФ (в составе вектора $\tilde{\mathbf{y}}[n]$):

$$\mathbf{m}_y = \mathbf{m}_{\text{увх}} + \mathbf{m}_{\text{усоб}} = \mathbf{H}_M \mathbf{m}_0 + \sum_{r=1}^L \mathbf{G}_{M_r} \mathbf{m}_{\gamma_r}; \quad (60)$$

$$\mathbf{D}_y = \mathbf{D}_{\text{увх}} + \mathbf{D}_{\text{усоб}} = \mathbf{H}_D \mathbf{D}_0 + \sum_{r=1}^L \mathbf{G}_{D_r} \mathbf{D}_{\gamma_r}. \quad (61)$$

Оценки (48), (49) и (58), (59) используются при определении числа разрядов $S_{\text{д}}$ операционных устройств DSP для представления кодов дробных частей отсчётов сигналов в векторном ЦФ сложной структуры при вероятностном подходе.

Заключение

Таким образом, в работе представлены следующие результаты разработки и исследования векторных цифровых фильтров.

1. Алгоритм одномерной стационарной линейной векторной цифровой фильтрации, который описан:

– с помощью векторно-матричных уравнений в конечных разностях;

– с помощью операторных векторно-матричных уравнений в конечных разностях;

– с помощью векторно-матричных алгебраических уравнений для Z -образов.

2. На основе перечисленных уравнений построены укрупнённые структурные схемы:

- стационарно рекурсивного векторного ЦФ простой структуры с учётом эффектов квантования сигналов;
- двухкоординатного векторного ЦФ простой структуры;
- трёхкоординатного векторного ЦФ простой структуры;
- обобщённая линейная шумовая модель векторного ЦФ сложной структуры (схема Л. Джексона).

3. Получены выражения для матриц передаточных функций, комплексных частотных характеристик и импульсных характеристик для векторных ЦФ простой структуры, а также для векторных ЦФ сложной структуры при различных типах соединения блоков.

4. Рассмотрены особенности анализа одномерных векторных стационарных ЦФ при детерминированном и вероятностном подходах.

5. Получены максимальные модульных оценки сигналов в векторных ЦФ простой и сложной структуры.

6. Получены вероятностные оценки (математического ожидания и дисперсии) шумов квантования в выходных сигналах векторных ЦФ простой и сложной структуры.

Литература

1. Гадзиковский В.И. Цифровая обработка сигналов. Вып.1. Теоретические основы цифровой обработки сиг-

налов / В.И. Гадзиковский. – Екатеринбург: ГОУ ВПО «УГТУ – УПИ», 2003. – 344 с.

2. Гадзиковский В.И. Теоретические основы цифровой обработки сигналов / В.И. Гадзиковский. – М.: Радио и связь, 2004. – 344 с.

3. Гадзиковский В.И. Методы проектирования цифровых фильтров / В.И. Гадзиковский. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 416 с.

4. Гадзиковский В.И. Цифровая обработка сигналов / В.И. Гадзиковский. – М.: СОЛОН-Пресс, 2013. – 766 с.

5. Лившиц Н.А. Корреляционная теория оптимального управления многомерными процессами / Н.Ф. Лившиц, В.Н. Виноградов, Г.А. Голубев. – М.: Советское радио, 1974. – 328 с.

THE ONE-DIMENSIONAL VECTOR STATIONARY LINEAR DIGITAL FILTERS

Gadzikovsky V.I.

The methods of description and block diagrams of the one-dimensional vector digital filters including the generalized linear noise model of L. Jackson are considered. The evaluation of the noise influence and the calculation of required number of digits of digital signal processors with a fixed point are carried out.

Научное направление: Обработка и передача информации в системах телекоммуникаций

Секция 1: Теория сигналов и систем

Одним из основных объектов исследования теории сигналов традиционно являются методы анализа-синтеза, модуляции-демодуляции, кодирования-декодирования сигналов с целью обеспечения высокой помехоустойчивости и скорости передачи информации в условиях воздействия интенсивных помех и межсимвольной интерференции. Возможности современных цифровых технологий позволяют решать эти задачи особенно эффективно, прибегая к оптимальным методам синтеза, преобразования и кодирования сигналов.



На секции обсуждались следующие актуальные научные проблемы:

- синтез троичных последовательностей;
- синтез бинарных оптимальных последовательностей;
- многофазные последовательности Баркера и М-последовательности;
- помехоустойчивое кодирование;
- многопороговое декодирование;
- сигнально-кодовые конструкции с решетчатой кодированной модуляцией;
- алгоритм Витерби для демодуляции сигналов с OFDM;
- зондирование КВ-канала широкополосным сигналом;
- аксиомы измерения спектра случайных сигналов;
- аппроксимация функции плотности распределения.

По итогам прошедшей конференции были представлены к награждению Дипломами лауреатов конкурса молодых ученых следующие работы:

1. Анализ эффективности нового алгоритма работы порогового элемента многопорогового декодера. Автор – Шевляков Д.А., аспирант Рязанского государственного радиотехнического университета.

2. Сигнально-кодовые конструкции на основе многокомпонентных сигналов с решетчатой кодированной модуляцией. Автор – Горлов А.И., аспирант Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

3. Синтез бинарных оптимальных по минимаксному критерию последовательностей до длин $n = 70$. Автор – Потехин Е.Н., аспирант Марийского государственного технического университета.