

УДК 004.93

О ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ГЛАВНЫХ КОМПОНЕНТ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА ИЗОБРАЖЕНИЙ

Мокеев В.В., д.т.н., Южно-Уральский государственный университет, e-mail: mokeyev@mail.ru

Ключевые слова: анализ изображений, собственный вектор, матрица ковариаций, главные компоненты, линейная конденсация.

Введение

В настоящее время активно развиваются биометрические технологии, которые лежат в основе систем идентификации человека на основе таких признаков как: отпечатки пальцев, рисунок радужной оболочки глаза, изображения лица. Использование подобных систем уменьшает количество преступлений, связанных с несанкционированным доступом. Поиск в базах данных по фотопортретам человека, автоматизированный контроль удостоверений личности особенно актуальны для правоохранительных органов большинства стран – все это позволяет снизить опасность террористических угроз.

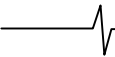
В последнее время широкое распространение получили подходы, работающие с изображениями как с массивом признаков, каждый из которых отражает значение одного пикселя изображения (например, яркость отдельного пикселя). Так как вектор каждого изображения имеет достаточно высокую размерность, задача обработки большого числа изображений является не тривиальной. Большинство систем анализа изображений основано на методах, понижающих размерность изображений. Проблема сокращения размерности важна еще и потому, что сложность большинства алгоритмов увеличивается экспоненциально с ростом размерности задачи. Одним из наиболее распространенных методов сокращения размерности изображений является метод главных компонент [1].

Идея использования главных компонент для решения задачи распознавания лиц была изучена в работе [2]. В работе было показано, что изображение можно представить в виде линейной комбинации собственных векторов ковариационной матрицы. Собственные векторы имеют ту же размерность, что и само изображение, но являются линейно независимыми, что позволяет достаточно точно реконструировать изображение. Собственные значения определяют степень вклада каждого собственного вектора в реконструкцию изображения. Главными компонентами называются собственные векторы с наибольшими собственными значениями. Каждое изображение может быть описано взвешенной комбинацией главных компонент. Таким образом, для каждого изображения достаточно хранить только набор весовых коэффициентов (главных факторов), но каждый фактор уже отражает не отдельный пиксель, а группу пикселей, которую можно представить в виде картинки.

Рассматривается задача вычисления главных компонент для наборов содержащих большое число изображений. Для вычисления собственных векторов ковариационной матрицы предлагается использовать метод линейной конденсации. Описывается алгоритм многоуровневой линейной конденсации. Исследуется точность и быстродействие разработанного алгоритма.

Обычно, решение задачи распознавания изображений, основанное на методе главных компонент, включает следующие действия [3-5]: а) нормализацию исходного изображения, б) вычисление главных компонент; в) классификацию изображений в редуцированном пространстве (кластеризация, метрика, нейронная сеть и т.п.). При нормализации изображений последние представляются как отцентрированные и приведенные к единому масштабу изображения лиц. Процесс распознавания заключается в сравнении главных факторов искомого изображения с главными факторами всех остальных изображений. При этом предполагается, что изображения лиц, соответствующих одному человеку, сгруппированы в кластеры в пространстве изображений. Результатом поиска являются те изображения, которые имеют наименьшее расстояние до искомого изображения.

Эксперименты по распознаванию лиц были проведены различными исследователями [4-7]. В работе [6] эффективность распознавания лиц исследовалась на базе данных, состоящей из 7563 изображений приблизительно 3000 людей. Главные компоненты для реконструкции изображений этой базы данных были получены на обучающем наборе из 128 изображений лиц. Распознавание было выполнено с использованием первых 20 собственных векторов. Во время эксперимента с 200 отобранными изображениями был получен достаточно высокий коэффициент распознавания, равный 95%. Коэффициент распознавания численно равен проценту правильно распознанных изображений из общего числа предъявленных и является характеристикой точности распознавания. Высокое качество распознавания связано с тем, что отобранные изображения представляли собой изображения типа фотографий для удостоверений, т.е. фронтальные изображения одного и того же размера, полученные при одинаковых условиях освещенности. В этой же работе были проведены эксперименты по исследованию качества распознавания наборов изображений, полученных при различных условиях съемки. Коэффициенты распознавания при этом менялись от 50% до 90%. В работе [7] описываются эксперименты с изображениями базы данных Feret. База данных Feret создана в 96-97 годах и включает более 3000 изображений лиц, полученных при различных ракурсах,



размерах и условиях освещения. Различные эксперименты показывают, что коэффициент распознавания изображений, сделанных разными аппаратами и при разном освещении и ракурсах, как правило, лежит в диапазоне от 40% до 95% [8].

Таким образом, набор главных компонент, полученный один раз на основе обучающей выборки, используется для описания всех остальных изображений. Считается, что с помощью ограниченного количества главных компонент можно получить хорошую реконструкцию исходного изображения. Если в обучающей выборке нет изображения лица при аналогичных условиях (ракурса, поворота, освещенности и т.п.), то система распознавания изображений может ошибаться. Для обеспечения требуемого качества процедуры распознавания лиц вычисление главных компонент необходимо проводить на представительных обучающих выборках. В случае, если поиск требуется выполнять на увеличивающемся числе изображений, то будет расти как размер обучающей выборки, так и порядок ковариационной матрицы. При этом растет и время вычисления главных компонент. Ситуация усложняется, когда система распознавания изображений работает в режиме реального времени. Для вычисления главных компонент используются методы решения задачи собственных значений.

Среди методов решения проблемы собственных значений можно выделить следующие группы методов: итерационные и преобразования подобия [9]. Распространенным методом определения небольшого числа наибольших или наименьших собственных значений является метод их вычисления прямыми или обратными итерациями. Метод прямых итераций или степенной метод позволяет вычислять наибольшее по модулю собственное значение матрицы и соответствующий собственный вектор только с помощью умножения матрицы на вектор; никаких преобразований самой матрицы при этом не требуется. Главный недостаток этого метода заключается в том, что на скорость сходимости решений влияет отношение величины искомого собственного значения к ближайшему собственному значению. Также скорость сходимости итерационного процесса зависит от того, насколько удачно выбран начальный вектор. Методы преобразований подобия применяются с целью получить из исходной матрицы новую матрицу с теми же собственными значениями, но более простого вида. Наиболее известными являются методы Якоби, Гивенса и Хаусхолдера [9]. Метод Хаусхолдера позволяет получить требуемый результат быстрее, чем метод Гивенса, так как связан с выполнением меньшего числа, хотя и более сложных преобразований.

Методы понижения порядка матриц (конденсации) можно условно отнести к методам преобразования подобия, так как целью конденсации является получение матрицы меньшего порядка, которая была бы подобна исходной матрице в том смысле, что собственные значения этих матриц в заданном диапазоне совпадали бы с заданной точностью. Методы конденсации базируются на предположении о зависимости одних (вспомогательных) переменных от других (основных), что позволяет исключить вспомогательные переменные. Одним из первых представителей методов конденсации является

метод статической конденсации или метод Гайана [10], предложенный в 1965 году для решения обобщенной задачи собственных значений, возникающей при расчете колебаний конечно-элементных моделей. Метод определяет наименьшие собственные значения и требует предварительного выбора удерживаемых переменных, который базируется на опыте и интуиции расчетчика. Метод статической конденсации показал невысокую точность при решении динамических задач. Поэтому различные схемы конденсации (динамическая конденсация [11], частотно-динамическая конденсация [12], частотная конденсация [13]) были предложены для улучшения точности. В работах [14-15] используются итерационные схемы, в которых понижение порядка матриц с помощью динамической конденсации повторяется до тех пор, пока желаемая точность не будет получена.

Таким образом, в настоящее время существует достаточное количество методов, которые хорошо зарекомендовали себя для вычисления собственных векторов матриц небольшого размера. Но для больших матриц ситуация иная. Разработан ряд методов, но они, как правило, применимы для задач конечно-элементного анализа, когда матрицы являются разреженными.

Основная цель статьи описать технологию понижения порядка матриц применительно к задачам расчета главных компонент больших наборов изображений. Предлагаемая технология реализуется в виде метода линейной конденсации и используется для вычисления собственных векторов стандартной задачи собственных значений (одна из матриц является единичной) для случая плотных, а не разреженных матриц.

Анализ изображений методом главных компонент

Пусть имеется набор изображений, каждое из которых описывается вектором x_i , где i – номер изображения ($i = 1, 2, 3, \dots, m$). Размерность вектора x_i равняется числу пикселей изображения n . Таким образом, все изображения можно представить в виде матрицы \mathbf{X} , строками которой являются векторы x_i . Размерность пространства изображений определяется произведением $n \times m$. Основная трудность анализа такого пространства заключается в его высокой размерности для реальных задач.

Для построения пространства меньшей размерности используется метод главных компонент. Обработка изображений начинается с операции центрирования пространства изображений относительно среднеарифметического вектора, который вычисляется по формуле:

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i \quad (1)$$

При этом осуществляется переход к новому пространству изображений \mathbf{X}^0 , строками которого являются векторы $x_i^0 = x_i - \bar{x}$.

Основная формулировка метода главных компонент строится на расчете ковариационной матрицы $\mathbf{A}^* = \frac{1}{m} (\mathbf{X}^0)^T \mathbf{X}^0$, которая имеет порядок $n \times n$, и вычислении собственных векторов уравнения

$$(\mathbf{A}^* - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v}_0 = 0 \quad (2)$$

где \mathbf{I} – единичная матрица, \mathbf{v}_{0i} – собственный вектор,

λ_i – собственное значение, индекс «Т» означает транспонирование матрицы. Матрица главных компонент формируется из r собственных векторов, которым соответствуют наибольшие собственные значения

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_{01} \mathbf{v}_{02} \dots \mathbf{v}_{0r}] \quad (3)$$

В связи с тем, что матрица \mathbf{A} имеет высокий порядок, решение уравнения (2) представляет существенные трудности. Поэтому при обработке изображений используется дуальная формулировка метода главных компонент, в соответствии с которой вычисляется матрица Грамма $\mathbf{A} = \frac{1}{m} \mathbf{X}^0 (\mathbf{X}^0)^T$. Матрица \mathbf{A} имеет порядок m , который существенно меньше n . Для вычисления главных компонент необходимо найти собственные векторы матричного уравнения

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{u}_0 = 0 \quad (4)$$

где \mathbf{u}_{0i} – собственный вектор, λ_i – собственное значение. Следует отметить, что собственные значения уравнений (2) и (4) совпадают. После сортировки собственных значений формируется матрица главных компонент из r первых собственных векторов.

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_{01} \mathbf{u}_{02} \dots \mathbf{u}_{0r}] \quad (5)$$

Известно, что матрицу \mathbf{X}^0 можно представить в виде сингулярного разложения

$$\mathbf{X}^0 = \mathbf{U} \mathbf{T} \mathbf{V}^T \quad (6)$$

где \mathbf{V} – матрица собственных векторов уравнения (2), столбцы которой ортонормированны $\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}$, \mathbf{U} – матрица собственных векторов уравнения (4) с ортонормированными столбцами $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$, \mathbf{T} – диагональная матрица порядка $r \times r$, диагональные элементы которой $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ называются сингулярными числами матрицы \mathbf{X}^0 . Чаще всего $r = m$, но приводимый ниже результат охватывает общий случай, он справедлив и при условии $r < m$. Собственные значения матрицы \mathbf{X}^0 связаны с собственными значениями матрицы \mathbf{A} соотношением $\eta_i = (m \lambda_i)^{1/2}$. В соответствии с терминологией, принятой в линейной алгебре, матрицу \mathbf{V} можно назвать матрицей правых собственных векторов, а матрицу \mathbf{U} – матрицей левых собственных векторов.

Матрицы левых и правых собственных векторов связаны друг с другом соотношением (6). Для получения формулы вычисления матрицы \mathbf{V} умножим выражение (6) справа на транспонированную матрицу \mathbf{U} и матрицу \mathbf{T}^{-1} . Далее, используя свойство ортогональности матрицы \mathbf{U} , получим

$$\mathbf{V}^T = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{X}^0 \quad (7)$$

Каждый вектор пространства \mathbf{X}^0 теперь может быть представлен в редуцированном пространстве небольшим числом главных факторов, образующих вектор \mathbf{z}_i , т.е.

$$\mathbf{x}_i^0 = \mathbf{V} \mathbf{z}_i \quad (8)$$

Векторы \mathbf{z}_i образуют матрицу \mathbf{Z} , которая может быть вычислена по следующей формуле

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X}^0 \mathbf{V} \quad (9)$$

где \mathbf{Z} – матрица главных факторов пространства \mathbf{X}^0 .

Матрица главных факторов \mathbf{Z} представляет новое редуцированное пространство изображений. Но при этом каждому главному фактору соответствует группа

пикселей, которые можно представить в виде картинки. Поэтому описанный подход часто называют методом собственных лиц. Размерность редуцированного пространства равна $p \times m$, что меньше исходной размерности в n/p раз.

После выделения главных факторов изображения требуется произвести распознавание. Набор главных факторов представляет собой точку в пространстве признаков. Процедура классификации основывается на разделении пространства признаков на области, относящиеся к одинаковым классам, и процедуре поиска на основе вычисления расстояния от неизвестного изображения до всех остальных при помощи какой-либо метрики (Махаланобиса, евклидово расстояние).

Метод линейной конденсации

Переход к редуцированному пространству изображений с помощью метода главных компонент требует вычисления наибольших собственных значений уравнения (4). Эта задача может быть сведена к поиску наименьших собственных значений уравнения вида

$$(\mathbf{I} - \mu \mathbf{A}) \mathbf{v}_0 = 0, \quad (10)$$

где $\mu = 1/\lambda$.

Если число изображений велико, то решение уравнения (10) представляет определенные трудности. Для преодоления этих трудностей предлагается использовать понижение порядка матриц, которое базируется на предположении о зависимости одних (вспомогательных) признаков от других (основных), что позволяет исключить вспомогательные признаки. Разделим вектор \mathbf{v}_0 на две составляющие: вектор исключаемых признаков и вектор удерживаемых признаков. Уравнение (10) в соответствии с этим делением переписывается в виде

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{v}_{0r} \\ \mathbf{v}_{0s} \end{Bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{rr} & \mathbf{A}_{rs} \\ \mathbf{A}_{sr} & \mathbf{A}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_{0r} \\ \mathbf{v}_{0s} \end{Bmatrix} = 0 \quad (11)$$

где индекс r относится к основным признакам, а индекс s – к вспомогательным признакам. Используя нижнее уравнение системы (11), можно определить связь вспомогательных и основных признаков

$$\mathbf{v}_{0s} = \mu (\mathbf{I}_{ss} - \mu \mathbf{A}_{ss}) \mathbf{A}_{sr} \mathbf{v}_{0r}. \quad (12)$$

После исключения вспомогательных признаков с помощью соотношения (12) уравнение (11) имеет вид

$$(\mathbf{I}_{rr} - \mu \mathbf{A}_{rr} + \mathbf{D}_{rr}(\mu)) \mathbf{v}_{0r} = 0 \quad (13)$$

где $\mathbf{D}_{rr}(\mu) = \mu^2 \mathbf{A}_{rs} (\mu \mathbf{A}_{ss} - \mathbf{I}_{ss})^{-1} \mathbf{A}_{rs}^T$.

Понижение порядка матриц осуществляется путем аппроксимации матрицы $\mathbf{D}_{rr}(\mu)$ выражением вида

$$\mathbf{D}_{rr}(\mu) \approx \mathbf{I}_{rr}^* - \mu \mathbf{A}_{rr}^*. \quad (14)$$

Коэффициенты матриц \mathbf{A}_{rr}^* и \mathbf{I}_{rr}^* соотношения (14) определяются из условия наилучшего приближения матриц $\mathbf{D}_{rr}(\mu)$ и $\mathbf{I}_{rr}^* - \mu \mathbf{A}_{rr}^*$ в диапазоне $\mu_1 \dots \mu_2$. Например, из условия совпадения матриц $\mathbf{D}_{rr}(\mu)$ и $\mathbf{I}_{rr}^* - \mu \mathbf{A}_{rr}^*$ в граничных точках искомого диапазона μ_1 и μ_2 . Это соответствует линейной аппроксимации матрицы $\mathbf{D}_{rr}(\mu)$. В этом случае матрицы \mathbf{A}_{rr}^* и \mathbf{I}_{rr}^* определяются по формулам

$$\mathbf{I}_{rr}^* = \mathbf{D}_{rr}(\mu_1) - \mu_1 \frac{\mathbf{D}_{rr}(\mu_1) - \mathbf{D}_{rr}(\mu_2)}{\mu_1 - \mu_2}$$

$$\mathbf{A}_{rr}^* = - \frac{\mathbf{D}_{rr}(\mu_1) - \mathbf{D}_{rr}(\mu_2)}{\mu_1 - \mu_2} \quad (15)$$

Если $\mu_1 = 0$, то выражения (15) можно переписать в виде

$$\mathbf{I}_{rr}^* = 0$$

$$\mathbf{A}_{rr}^* = - \frac{\mathbf{D}_{rr}(\mu_2)}{\mu_2}$$

На рис. 1 показано изменение коэффициентов матрицы $\mathbf{D}_{rr}(\mu)$ и линейная аппроксимация этих коэффициентов выражением $i_{rr} - \mu a_{rr}$. Параметр μ_s обозначает наименьшее собственное значение матрицы \mathbf{A}_{SS} . Если μ_s попадает в диапазон $\mu_1 \dots \mu_2$, то погрешность аппроксимации матрицы $\mathbf{D}_{rr}(\mu)$ для $\mu = \mu_s$ становится бесконечной.

После понижения порядка матриц уравнение (10) представляется в виде редуцированного уравнения

$$(\mathbf{I}_r - \mu^* \mathbf{A}_r) \mathbf{v}_{0r}^* = 0, \quad (16)$$

где $\mathbf{A}_r = \mathbf{A}_{rr} + \mathbf{A}_{rr}^*$, $\mathbf{I}_r = \mathbf{I}_{rr} + \mathbf{I}_{rr}^*$. Если $\mu_1 = 0$, то решение уравнения (16) представляет стандартную задачу собственных значений, а в случае $\mu_1 > 0$ – обобщенную задачу собственных значений.

Решая уравнение (16), мы получаем приближенное решение уравнение (10). Причиной появления ошибок в решении является линейная аппроксимация матрицы $\mathbf{D}_{rr}(\mu)$. В общем случае погрешность аппроксимации матрицы $\mathbf{D}_{rr}(\mu)$ определяется как

$$\mathbf{E}_{rr}(\mu) = \mathbf{D}_{rr}(\mu) - (\mathbf{I}_{rr}^* - \mu \mathbf{A}_{rr}^*). \quad (17)$$

Можно связать погрешность собственных значений с матрицей $\mathbf{E}_{rr}(\mu)$. Для этого вычтем из уравнения (13) уравнение (16) и при допущении $\mathbf{v}_{0r} = \mathbf{v}_{0r}^*$ получим

$$(\Delta \mu \mathbf{A}_r + \mathbf{E}_{rr}(\mu)) \mathbf{v}_{0r} = 0, \quad (18)$$

где $\Delta \mu = \mu - \mu^*$ – погрешность собственных значений.

Значение погрешности, вносимое в собственные значения при понижении порядка матриц, можно оценить по формуле

$$\Delta \mu \leq |\mathbf{A}_r^{-1} \mathbf{E}_{rr}(\mu)|. \quad (19)$$

Если собственные значения матрицы \mathbf{A}_{SS} попадают внутрь диапазона $\mu_1 \dots \mu_2$, то коэффициенты матриц $\mathbf{D}_{rr}(\mu)$ и $\mathbf{E}_{rr}(\mu)$ принимают бесконечно большие значения.

Поэтому одним из основных условий выбора исключаемых переменных является

$$\mu_s^{\min} > \mu_2, \quad (20)$$

где μ_s^{\min} – минимальное собственное значение матрицы исключаемых переменных \mathbf{A}_{SS} . Если условие (20) выполняется, то коэффициенты матрицы погрешности равны нулю в граничных значениях диапазона $\mu_1 \dots \mu_2$ и достигают максимального значения внутри диапазона при $\mu = \mu_m$. Приблизительно в качестве μ_m можно использовать середину диапазона $\mu_m = \mu_{cp}$ (см. рис. 1).

Алгоритм многоуровневой линейной конденсации

Метод линейной конденсации реализуется в виде алгоритмов одноуровневой и многоуровневой линейной конденсации. Суть алгоритма многоуровневой линейной конденсации состоит в том, что вспомогательные признаки исключаются небольшими группами в рамках многоуровневой схемы. При этом матрицы уравнения (10) на каждом уровне уменьшаются на размер группы исключаемых признаков. В частном случае мы получаем алгоритм одноуровневой конденсации, который группирует все исключаемые признаки в одном блоке. Преимущество многоуровневой схемы заключается в том, что выбор исключаемых признаков можно осуществлять в процессе понижения порядка матриц, в то время как одноуровневая конденсация требует делать такой выбор до начала процедуры понижения порядка матриц.

Алгоритм многоуровневой линейной конденсации включает пять шагов. Первый шаг представляет собой многоуровневую процедуру, на каждом уровне которой решается вопрос об исключении группы вспомогательных признаков. Известно, что сумма диагональных коэффициентов матрицы равна сумме ее собственных значений [9]. Поэтому в качестве верхней границы максимального собственного значения λ_{\max} матрицы \mathbf{A}_{SS} можно использовать сумму диагональных коэффициентов матрицы исключаемых признаков, а в качестве нижней границы минимального собственного значения μ_{\min} матрицы \mathbf{A}_{SS} обратную сумму диагональных коэффициентов

$$\mu_{\min}^* = 1 / \sum_{i=1}^s a_{ii}. \quad (21)$$

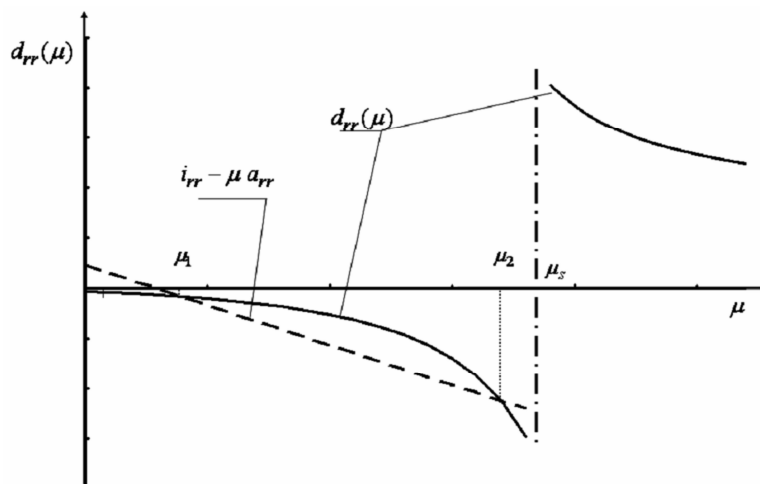


Рис.1. Линейная аппроксимация коэффициентов матрицы $\mathbf{D}_{rr}(\mu)$

Процедура понижения порядка матрицы начинается с того, что все признаки сортируются в порядке убывания диагональных коэффициентов ковариационной матрицы \mathbf{A} . На первом уровне выбирается группа признаков с минимальными диагональными коэффициентами a_{ii} . В качестве критерия, по которому принимается решение об исключении группы признаков, используется либо наименьшее собственное значение ($\mu_c = \mu_{\min}$) блока исключаемых переменных, либо параметр обратной суммы $\mu_c = \mu_{\min}^*$. Если выполняется условие

$$\mu_c > k_c \mu_2, \quad (22)$$

то принимается решение об исключении переменных. Параметр k_c называется параметром отсечения. Если в качестве критерия отбора используется наименьшее собственное значение (μ_{\min}), то k_c лежит в диапазоне от 1 до 4; в случае если используется обратная сумма диагональных коэффициентов (μ_{\min}^*), то k_c меняется от 0.5 до 2.

Далее вычисляются коэффициенты аппроксимирующих матриц \mathbf{A}_{rr}^* и \mathbf{I}_{rr}^* , после чего осуществляется переход ко второму уровню понижения порядка матриц. На каждом новом уровне формируется группа вспомогательных признаков, кандидатов на исключение. Критерием отбора является выполнение условия (22). Если оно выполняется, то осуществляется понижение порядка матриц и переход на следующий уровень. Понижение порядка матриц прекращается в случае нарушения условия (22). Для повышения эффективности алгоритма полезно перед понижением порядка матриц делать их предварительную обработку, направленную на уменьшение недиагональных коэффициентов матрицы. Для этого можно использовать обычные вращения Гивенса [9].

На втором шаге вычисляются собственные значения и собственные векторы матричного уравнения (16). В связи с тем, что матрица не является единичной, решение уравнения (16) относится к классу обобщенных задач на собственные значения. В этом случае можно использовать, например, метод обратных итераций или метод Якоби [9].

На третьем шаге матрица редуцированных собственных векторов восстанавливается до полной матрицы, т.е. для каждого редуцированного собственного вектора вычисляется вектор вспомогательных признаков по формуле

$$\mathbf{x}_{0si}^* = \mu_i^* (\mathbf{I}_{ss} - \mu_i^* \mathbf{A}_{ss}) \mathbf{A}_{sr} \mathbf{x}_{0ri}^*. \quad (23)$$

В результате получаем матрицу восстановленных собственных векторов

$$\Delta^* = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{0r1}^* & \mathbf{x}_{0r2}^* & \cdots & \mathbf{x}_{0rp}^* \\ \mathbf{x}_{0s1}^* & \mathbf{x}_{0s2}^* & \cdots & \mathbf{x}_{0sp}^* \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Восстановленные собственные векторы, полученные на третьем шаге, не являются ортогональными. Поэтому алгоритм включает четвертый и пятый шаги, в результате выполнения которых получается матрица ортогональных собственных векторов.

На четвертом шаге вычисляются приведенные матрицы

$$\mathbf{A}_p = \Delta^{*T} \mathbf{A} \Delta^*$$

$$\mathbf{I}_p = \Delta^{*T} \Delta^*. \quad (25)$$

На пятом шаге решается задача собственных значений матричного уравнения

$$(\mathbf{I}_p - \mu \mathbf{A}_p) \mathbf{q} = 0 \quad (26)$$

и уточняется матрица собственных векторов

$$\mathbf{x}_{0i} = \Delta^* \mathbf{q}_i. \quad (27)$$

Решение уравнения (26) представляет собой задачу собственных значений, и здесь опять можно использовать такие известные методы, как метод Якоби или Хаусхолдера.

Исследование эффективности метода линейной конденсации

Любой численный метод должен в той или иной мере удовлетворять следующим требованиям: надёжность, точность, быстродействие. В связи с тем, что численный метод можно рассматривать как функцию, отображающую вход в выход, надёжность метода можно связать с областью применения метода, т.е. с множеством входов (матриц), для которых метод работает. Итерационные методы оказываются чувствительными к особенностям матрицы, с которой они работают. Например, при плохой обусловленности матриц методы могут давать осечку. Метод линейной конденсации обладает высокой надёжностью, так как не накладывает никаких ограничений на матрицы, с которыми он работает. Другими важными критериями численного метода являются быстродействие и точность получаемых с его помощью результатов. Для исследования быстродействия и точности метода линейной конденсации используется программа PEGAS, предназначенная для вычисления главных компонент различными методами. Исследования проводятся на примерах задач расчета главных компонент наборов, состоящих из различного числа изображений.

Точность метода линейной конденсации исследуется для задачи нахождения первых восьми главных компонент набора из 518 изображений, каждое из которых имеет размерность 112x196. Исследуется два варианта. В первом варианте в качестве критерия отбора используется обратная сумма диагональных коэффициентов. Рассматриваются три варианта понижения порядка матрицы, отличающихся друг от друга значением параметра отсечения: 0.5, 1, 1.5. В качестве эталонного решения используются главные компоненты, полученные методом Хаусхолдера. Погрешность главных компонент определяется по формуле

$$e_i = \frac{\sum_{k=1}^m (\mathbf{v}_{0ik} - \mathbf{v}_{0ik}^*)^2}{\sum_{k=1}^m \mathbf{v}_{0ik}^2}$$

где \mathbf{v}_{0ik}^* – главные компоненты, вычисленные методом линейной конденсации, \mathbf{v}_{0ik} – главные компоненты, полученные методом Хаусхолдера. Погрешность главных компонент представляет собой отношение нормы вектора погрешности к норме вектора \mathbf{v}_{0i} .

В табл. 1 показаны погрешности первых восьми главных компонент. Из таблицы видно, что наибольшие погрешности получены для параметра отсечения 0.5.

Таблица 1. Погрешность главных компонент: критерий обратной суммы

k_c		0,5	1	1,5
Число основных переменных		100	110	125
Номер собственного вектора	1	0.00026	0.00004	0.00001
	2	0.00101	0.00020	0.00007
	3	0.0016	0.0003	0.0001
	4	0.00439	0.00055	0.00026
	5	0.0080	0.0010	0.0005
	6	0.0166	0.0022	0.0014
	7	0.0152	0.0019	0.0008
	8	0.0114	0.0023	0.0009

Для всех вариантов изменения параметра отсечения погрешность вычисления собственных векторов незначительна, однако, чем больше параметр отсечения, тем выше точность. Увеличивая параметр отсечения, можно повысить точность вычисления главных компонент, но при этом степень сжатия матриц будет ниже, порядок матриц редуцированного уравнения (16) выше и, следовательно, времени для решения этого уравнения потребуется больше.

Во втором варианте в качестве критерия отбора исключаемых признаков используется наименьшее собственное значение блока вспомогательных переменных. Рассматриваются четыре варианта понижения порядка матрицы, отличающихся друг от друга значением параметра отсечения: 2.0, 2.5, 3.0. В качестве эталонного решения используются главные компоненты, полученные методом Хаусхолдера. В табл. 2 показаны погрешности первых восьми главных компонент.

Таблица 2. Погрешность главных компонент: критерий наименьшее собственное значение

k_c		2	2,5	3
Число основных переменных		65	70	75
Номер собственного вектора	1	0.000054	0.000042	0.000042
	2	0.00050	0.00017	0.00017
	3	0.00040	0.00034	0.00034
	4	0.00064	0.00038	0.00038
	5	0.00503	0.00421	0.00421
	6	0.00278	0.00160	0.00160
	7	0.00854	0.00660	0.00660
	8	0.01216	0.00437	0.00437

На рис. 2 показано типичное изменение погрешности главных компонент от величины собственного значения. Как видно из рисунка максимальное значение погрешности достигает в районе μ_{cp} .

Сравнение различных критериев отбора удаляемых переменных показывает, что они дают примерно одинаковую точность, но выбор исключаемых признаков по наименьшему собственному значению является более эффективным, так как степень сокращения матрицы наиболее высокая.

Таким образом, метод линейной конденсации может получать решения с различной степенью точности, однако повышение точности связано с дополнительными временными затратами. Точность вычисления главных компонент степенным методом обычно задается в пре-

делах 0.001. Для предотвращения потери ортогональности на каждой итерации степенного метода выполняется процедура ортогонализации. Чем выше точность, тем больше итераций требуется выполнить для ее достижения. Исследование быстродействия метода осуществляется путем сравнения времени вычисления левых главных компонент методом линейной конденсации, степенным методом и методом Хаусхолдера. Под временем вычисления понимается время расчета левых главных компонент u_{oi} путем решения уравнения (4) на персональном компьютере (AMD Athlon, Dual Core Processor, 2010 MHz).

В табл. 3 представлено время (в секундах) расчета различного количества левых главных компонент набора, состоящего из 528 изображений, с помощью метода линейной конденсации и степенного метода. При вычислении главных компонент методом линейной конденсации параметр отсечения устанавливается равным 1.5.

Как видно из табл. 3, время решения степенного метода увеличивается с ростом числа вычисляемых главных компонент, в то время как время расчета методом линейной конденсации увеличивается в 1,5 раза при увеличении числа вычисляемых векторов в 6 раз, в то время как время расчета степенным методом увеличивается в 18 раз.

В табл. 4 представлено время (в секундах) вычисления 67 главных компонент, полученных при обработке наборов из 512, 1188, 1977, 3000 и 4832 изображений.

Как видно из табл. 4, время расчета главных компонент степенным методом существенно увеличивается с ростом порядка матриц, в то время как метод линейной конденсации требует гораздо меньше времени для вычислений. Для матрицы размерностью 3000 метод линейной конденсации вычисляет главные компоненты в 20 раз, а для матриц размерностью 4832 – в 25 раз быстрее, чем степенной метод. Метод Хаусхолдера, несмотря на то, что вычисляет все собственные векторы уравнения (4), показывает более высокую скорость, чем степенной метод. Это связано с тем, что скорость сходимости степенного метода существенно снижается при высокой плотности собственных значений. Для порядка матрицы 4832 метод линейной конденсации показывает быстродействие на порядок выше быстродействия метода Хаусхолдера и степенного метода.

Главные компоненты, вычисленные различными методами, используются для распознавания изображений базы данных Feret, которая сформирована из изображений лиц, полученных при различных условиях освещения, различных ракурсах и имеющих различные размеры. В результате экспериментов, проведенных рядом авторов для изображений базы данных Feret, установлено, что для фронтальных изображений, сделанных в один и тот же день, точность распознавания, как правило, составляет 95%, для изображений, сделанных разными аппаратами и при разном освещении и ракурсах, точность падает до 80%, для изображений, сделанных с разницей в год, точность распознавания составляет примерно 50% [8].

Таблица 3. Время решения (с) задачи собственных значений

Число собственных значений/векторов	Линейная Конденсация	Степенной Метод
12	15	39
21	15	83
38	17	300
67	22	648

Таблица 4. Время решения (с) задачи собственных значений

Порядок матрицы	Линейная конденсация	Степенной метод	Метод Хаусхолдера
512	3	102	6
1188	16	648	95
1977	67	1427	445
3000	213	4893	1740
4832	1092	24096	11778

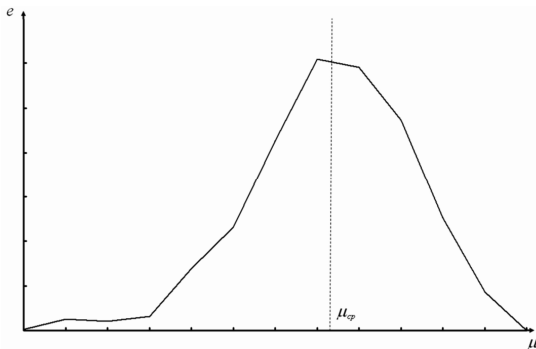


Рис.2. Изменение погрешности главных компонент от величины собственного значения

При проведении исследований решается вопрос, как влияет точность вычисления главных компонент методом линейной конденсации на качество распознавания изображений лиц. Эксперименты проводятся для набора из 3000 изображений, полученных при различных условиях освещения, ракурсах, сделанных с разницей в один год. Все изображения получены из базы данных Feret. Изображения учебной выборки выбираются из базового набора, а ее размер принимает значения 1000 и 2000. Тестовый набор формируется из оставшихся изображений. В ходе экспериментов для каждой учебной выборки различными методами вычисляются до 400 главных компонент. Для распознавания лиц используется процедура PCA+LDA, которая включает два шага [16]. Первым шагом является использование метода главных компонент (PCA) для сокращения размерности изображений. Вторым шагом является применение линейного дискриминантного анализа (LDA) для преобразованных данных. Основная идея состоит в том, что

после применения метода главных компонент размерность ковариационных матриц внутри-классовых и меж-классовых различий для преобразованных данных не является высокой. С помощью линейного дискриминантного анализа удается получить подпространство небольшой размерности, в котором кластеры изображений пересекаются минимально. Число классов соответствует количеству персон (людей). Один класс включает все изображения одного человека. Для распознавания изображений используется классификатор минимального расстояния неизвестного изображения до центра класса. В качестве центра класса используется среднеарифметический вектор изображений, входящих в данный класс.

В табл. 5 представлены коэффициенты распознавания, полученные с использованием главных компонент, вычисленных для учебных выборок разного размера алгоритмом многоуровневой линейной конденсации. Точность вычисления главных компонент зависит от параметра отсечения, который принимает значение: а) 1.5, б) 2.5 и с) 3. При этом погрешность вычисления главных компонент меняется от 0.08 до 0.003. Самая высокая точность вычисления главных компонент соответствует варианту (с). В этой же таблице для сравнения приведены коэффициенты распознавания, полученные при использовании метода Хаусхолдера для расчета главных компонент. Коэффициенты распознавания определяются для тестового (K_{test}) и учебного (K_{learn}) наборов изображений.

Таблица 6. Коэффициенты распознавания

Размер учебной выборки	Линейная конденсация						метод Хаусхолдера	
	а		б		с			
	K_{learn}	K_{test}	K_{learn}	K_{test}	K_{learn}	K_{test}	K_{learn}	K_{test}
1000	96.12	71.3	96.21	70.75	96.21	70.8	96.21	70.8
2000	98.12	81.3	98.22	82.21	98.12	81.7	98.12	81.7

Как видно из таблицы, коэффициенты распознавания, полученные методом линейной конденсации (вариант (с)) и методом Хаусхолдера, совпадают. Однако главные компоненты вариантов (а) и (б), хотя и получены с более низкой точностью, тем не менее, их использование не приводит к существенному снижению точности распознавания, а в ряде случаев даже может повысить ее.

Выводы

Рассмотрена задача вычисления главных компонент, возникающая при распознавании изображений. Для расчета главных компонент обучающих наборов изображений предлагается использовать метод линейной конденсации. Метод использует понижение порядка матриц, позволяющее достаточно точно вычислять собственные векторы, собственные значения которых находятся в заданном интервале. Описан алгоритм многоуровневой линейной конденсации. Проведено исследование точности и быстродействия разработанного алгоритма. Показано, что метод линейной конденсации позволяет вычислять главные компоненты с хорошей точностью на порядок быстрее, чем такие известные методы, как метод Хаусхолдера и степенной метод.

Литература

1. Jolliffe I.T. Principal Component Analysis. Springer-Verlag, New York, 1986.
2. Kirby M. and Sirovich L. Application of the KL procedure for the characterization of human faces, IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 12 (1) (1990) 103-108.
3. Swets D.L and Weng J., Using discriminant eigenfeatures for image retrieval, IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 18 (8) (1996) 831-836.
4. Кухарев Г.А. Биометрические системы: Методы и средства идентификации личности человека. СПб.: Политехника, 2001. 240 с.
5. Sung K.K., Poggio T., Example-based learning for view-based human face detection, IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., 20 (1) 1998 39-51.
6. Pentland A. and Moghaddam B. and Starner T. View-based and modular eigenspaces for face recognition, Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern recognition, vol. 1, Seattle, WA, 1994, pp. 84-91.
7. Moon H., Phillips P.J. Computational and Performance aspects of PCA-based Face Recognition Algorithms, Perception, Vol. 30, 2001, pp. 303-321
8. Pentland A., Choudhury C. Face recognition for smart environments. IEEE Computer, 33(2) 2000, pp. 50-55
9. Парлетт В. Симметричная проблема собственных значений. М.: Мир, 1983. 384с
10. Guyan R.J., "Reduction of stiffness and mass matrices," AIAA J. 3 (1965) 380.
11. Miller C.A., Dynamic Reduction of Structural Models, Journal of Structural Division. 106 (10) (1980) 2097-2108
12. Гриненко Н.И., Мокеев В.В. О задачах исследований колебаний конструкций методом конечных элементов.// Прикладная механика. 21 (3) (1985) 25-30.
13. Мокеев В.В. О задаче нахождения собственных значений и векторов больших матричных систем.//Журнал вычислительной математики и математической физики. 32 (10) (1992) 1652-1657
14. Z. Qu and F. Fu, New structural dynamic condensation method for finite element models, AIAA J. 36 (7) (1998) 1320-1324
15. Y. Jung, Z. Qu, and D. Jung, Structural Dynamic Condensation Method with an Iterative Scheme, Journal of Civil Engineering, 8. (2) (2004) 205-211
16. P.N. Belhumeur, J.P. Hespanha, D.J. Kriegman, Eigenfaces vs. Fisherfaces: recognition using class specific linear projection, IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 19 (1997) 711-720.

ON EFFECTIVENESS INCREASE OF PRINCIPAL COMPONENTS COMPUTATION IN IMAGE ANALYSIS PROBLEM

Mokeyev V.V.

A problem of principal component analysis for large image set is considered. To compute eigenvectors of covariance matrix, the linear condensation method is used. The algorithm for multy-level linear condensation is described. The accuracy and high performance of the developed algorithm is also evaluated.

Уважаемые коллеги!

Для тех, кто не успел оформить подписку на первое полугодие 2012 года через ОАО «Роспечать», сохраняется возможность приобретения журналов непосредственно в редакции по адресу:
107031, г. Москва, Рождественка, 6/9\20, стр. 1,
Российское научно-техническое общество радиотехники, электроники и связи им. А.С. Попова, или оформить заказ в соответствии с требованиями, выставленными на сайте журнала: www.dsps.ru.

Справки по телефонам: (495) 621-71-08, 621-06-10.
Факс: (495) 621-16-39. *E-mail:* nto.popov@mtu-net.ru