УДК 004.9:621

КОРРЕЛЯЦИОННО-ЭКСТРЕМАЛЬНЫЙ МЕТОД ОБНАРУЖЕНИЯ ЦИФРОВЫХ СИГНАЛОВ

Костров Б.В., к.т.н., профессор кафедры электронных вычислительных машин Рязанского государственного радиотехнического университета, kostrov.b.v@evm.rsreu.ru

Ключевые слова: вещественная корреляция, диадная корреляция, обнаружение сигнала, канал дальности РЛС.

Введение

Корреляция временных последовательностей действительных или комплексных чисел является одной из основных операций, выполняемых при решении задач теории цифровых систем, а также при разработке и применении цифровых систем обработки сигналов в самых различных технических приложениях. Тем более, что выводы, полученные в процессе изучения одномерного случая временных последовательностей, могут легко распространены на более сложные случаи двухмерных пространственно-временных сигналов. Наиболее типичным примером применения корреляционных методов является выделение отраженного от предмета радиолокационного сигнала с помощью согласованного фильтра. Традиционно эта задача решается вычислением корреляционной функции в спектральном пространстве преобразования Фурье с использованием алгоритма быстрого преобразования (БПФ).

Теоретические аспекты совмещения цифровых последовательностей

Пусть $\{X(m)\}$ и $\{Y(m)\}$ - две N-периодические последовательности действительных чисел, тогда операция корреляции, т.е. получение новой N-последовательности $\{Z(m)\}$ будет определяться следующим образом:

$$Z(m) = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} (p)Y(m+p)$$
(1)

где *р* - дискретный временной сдвиг.

Система соотношений для вычисления элементов последовательности $\{Z(m)\}$ с периодом N, в вещественной метрике, может быть представлена следующим матричным уравнением:

$$\begin{vmatrix} Z(0) \\ Z(1) \\ Z(2) \\ \dots \\ Z(n-2) \\ Z(N-1) \end{vmatrix} = \frac{1}{N} \begin{vmatrix} X(0) & X(1) & X(2) & \dots & X(N-1) \\ X(N-1) & X(0) & X(1) & \dots & X(N-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X(2) & X(N-1) & X(0) & \dots & X(N-3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X(2) & X(3) & X(4) & \dots & X(1) \\ X(1) & X(2) & X(3) & \dots & X(0) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Y(0) \\ Y(1) \\ Y(2) \\ \dots \\ Y(N-2) \\ Y(N-1) \end{vmatrix} (2)$$

Рассматривается построение алгоритма работы программно-аппаратного коррелятора обнаружения цифровых сигналов, обладающего высоким быстродействием при малых аппаратных затратах.

Результат вычисления выходной последовательности $\{Z(m)\}$, в соответствии с уравнением (2) при N = 8, иллюстрирует рис. 1.



Рис. 1. Пример вычисления элементов последовательности $\{Z(8)\}$

Для повышения эффективности вычисления корреляционной функции можно использовать алгоритм двойного БПФ, однако даже в этом случае не всегда удается добиться желанного результата по быстродействию и быстроте аппаратной реализации данной операции.

Диадная корреляция

Для дальнейшего повышения скорости обработки, особенно в условиях ограничений на временные и аппаратные ресурсы, можно воспользоваться вычислением диадной корреляции. Функция вещественной корреляции (1) заменяется в этом случае на диадную:

$$Z_g(m) = \frac{1}{N} \sum_{g=0}^{N-1} X(g) Y(m \oplus g),$$

где *g*- дискретный временной сдвиг в хемминговой метрике.

Вычисление диадной корреляции осуществляется при определении номера очередного отсчета путем суммирования номера текущего отсчета и сдвига по модулю 2. Поскольку операции сложения и вычитания по модулю 2 идентичны, то понятия корреляции и свертки в хемминговой метрике совпадают [1].

Система соотношений, определяющая элементы последовательности $\{Z(m)\}$ в диадном пространстве, будет иметь вид:

Z(0)		Y(0)	Y(1)	Y(2)	 Y(N-1)	X(0)	
Z(1)		Y(1)	Y(0)	Y(3)	 Y(N-2)	X(1)	
Z(2)	1	Y(2)	Y(3)	Y(0)	 Y(N-3)	× X(2)	(3)
	$\left \frac{N}{N} \right $				 		
Z(n-2)		Y(N-2)	Y(N-1)	<i>Y</i> (<i>N</i> -4)	 Y(1)	X(N-2)	
Z(N-1)		Y(N-1)	Y(N-2)	Y(N-3)	 Y(0)	X(N-1)	

Нумерация элементов матричного уравнения (3) определяется хемминговой метрикой, поэтому для случая, изображенного на рис. 2 система соотношений примет вид: Z(0) = Y(0)X(0) + Y(1)X(1) + Y(2)X(2) + Y(3)X(3) ++Y(4)X(4) + Y(5)X(5) + Y(6)X(6) + Y(7)X(7) = 0Z(1) = Y(1)X(0) + Y(0)X(1) + Y(3)X(2) + Y(2)X(3) ++Y(5)X(4) + Y(4)X(5) + Y(7)X(6) + Y(6)X(7) = 0Z(2) = Y(2)X(0) + Y(3)X(1) + Y(0)X(2) + Y(1)X(3) ++Y(6)X(4) + Y(7)X(5) + Y(4)X(6) + Y(5)X(7) = 0Z(3) = Y(3)X(0) + Y(2)X(1) + Y(1)X(2) + Y(0)X(3) ++Y(7)X(4) + Y(6)X(5) + Y(5)X(6) + Y(4)X(7) = 0Z(4) = Y(4)X(0) + Y(5)X(1) + Y(6)X(2) + Y(7)X(3) ++Y(0)X(4) + Y(1)X(5) + Y(2)X(6) + Y(3)X(7) = 1Z(5) = Y(5)X(0) + Y(4)X(1) + Y(7)X(2) + Y(6)X(3) ++Y(1)X(4) + Y(0)X(5) + Y(3)X(6) + Y(2)X(7) = 1Z(6) = Y(6)X(0) + Y(7)X(1) + Y(4)X(2) + Y(5)X(3) ++Y(2)X(4) + Y(3)X(5) + Y(0)X(6) + Y(1)X(7) = 1Z(7) = Y(7)X(0) + Y(6)X(1) + Y(5)X(2) + Y(4)X(3) ++Y(3)X(4) + Y(2)X(5) + Y(1)X(6) + Y(0)X(7) = 1

Результаты вычисления представлены на рис. 2.

Из приведенного примера видно, что диадная корреляция в отличии от вещественной может не иметь экстремальных значений в точке наибольшего перекрытия сигналов. Поэтому использование диадной корреляции напрямую бывает затруднительно.



Для преодоления данного недостатка воспользуемся при вычислении корреляционной функции выражением вида:

$$Z_{p}(m) = \sum_{p=0}^{N-1} C_{xp}(u)C_{Y}(u),$$
(4)
где $C_{Y}(u) = \frac{1}{N}H_{w}(n)Y(m)$ - матрица столбец

преобразования Уолша $(WH)_w$; $H_w(n)$ - матрица Адамара, упорядоченная по Уолшу; $C_{Xp}(u)$ - совокупность матриц столбцов коэффициентов преобразования $(WH)_w$ последовательности $\{X(m)\}$, сдвигаемой в соответствии с вещественным сдвигом p; u - переменная секвентного пространства.

Таблица 1.

u	C _Y (u)				Cx	_{MP} (u)				$C_{Xp}(u) C_Y(u)$							
		0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0.5	1	1	1	1	1	0.75	0.5	0.25	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.375	0.25	0.125
1	-0.5	1	0.5	0	-0.5	-1	-0.75	-0.5	-0.25	-0.5	-0.25		0.25	0.5	0.375	0.25	0.125
2	0	0	-0.25	-0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0.25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0.25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	-0.25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	-0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
				Z _p (m)						0	0.25	0.5	0.75	1.0	0.75	0.5	0.25

Результаты расчета элементов $Z_{m}(m)$

Назовем выражение (4) вещественно-диадной сверткой, имея в виду, что сдвиг последовательности $\{X(m)\}\$ выполняется в вещественном пространстве, а внутреннее вычисление элементов последовательности $Z_p(m)$ производится в секвентном спектральном пространстве.

Результаты расчета элементов $Z_p(m)$ в соответствии с формулой (4) для N = 8 приведены в таблице 1 и на рис. 26,

Сравнение результатов, представленных на рис. 1 и 2б, показывает, что применение вещественно-диадной свертки дает те же результаты, что и вещественная свертка. Это создает предпосылки ее использования в программноаппаратных корректорах цифровых сигналов.

Автокорреляция псевдослучайных последовательностей

Применим полученные выводы для вычисления автокорреляционной функции псевдослучайной последовательности (ПСП). В качестве примера сформируем Мпоследовательность с параметром n = 3, периодом $M = 2^3 - 1 = 7$ и начальным вектором [1,0,0]. Для полученной последовательности запишем уравнение для нахождения матрицы столбца коэффициентов преобразования $(HW)_w$ в виде

где $H_w(3)$ - матрица Адамара 8×8 упорядоченная по Уолшу;

 $Y_M(n) = 01101001$ - М-последовательность, дополненная нулевым элементом в старшем разряде.

Нормирующий множитель 1/N в выражении (5) и в последующих расчетах опущен, так как он не имеет принципиального значения и определяет только масштаб отображаемых величин.

Поскольку матрица Адамара ортогональна, заменим умножение строк матриц на поэлементное умножение столбцов матриц $H_w(n)$ и $Y_m(m)$. При этом можно применить метод прореживания базисных функций в матрице Адамара [2]. Получим следующее выражение:

Результат вычисления $Z_{Mp}(m)$, в соответствии с уравнением (6) и выражением (4), сведен в таблицу 2. Анализ полученных данных позволяет сделать вывод о работоспособности предложенного метода вычисления автокорреляционной функции ПСП.

В широкополосных системах с кодовым разделением каналов часто используют реализацию Мпоследовательности не в виде последовательности нулей и единиц, а в виде последовательности: -1 и 1. Добавлением -1 в старшем разряде и заменой всех нулей в приведенном выше примере на -1, можно получить последовательность Уолша:

$$Y_{\rm w}(m) = \{-111 - 11 - 1 - 11\} \tag{7}$$

Результаты расчета элементов последовательности $\{Z_{w}(m)\}$, в соответствии с выражением (4) и выражением (5), приведены в таблице3.

Сравнение результатов, приведенных в таблице 2 и 3, показывает, что в обоих случаях при наибольшем перекрытии сигналов корреляционная функция имеет легко обнаруживаемый глобальный экстремум.

Во втором случае не предпринималось никаких мер по ускорению процесса вычисления автокорреляционной функции. Здесь может быть использован метод прореживания базисных функций [2] или синтезирован иерархический алгоритм поиска корреляционной функции.

Таблица 2.

							•			^{2}Mp	<i>n</i>)							
u	C _{YM} (u)	C _{XMP} (u)									C _{XMP} (u) C _{YM} (u)							
		0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	6	7	
0	4	0	1	1	0	2	1	1	4	0	4	4	0	8	4	4	16	
1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	0	0	1	-1	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
3	0	0	1	-1	0	2	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
4	0	0	-1	-1	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
5	-4	0	-1	-1	0	-2	-1	-1	0	0	4	4	0	8	4	4	16	
6	0	0	-1	1	0	-2	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
7	0	0	-1	1	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
								ZMP	(m)	0	8	8	0	16	8	8	32	

Результаты расчета элементов Z и (т

u	C _{YM} (u)				Cxr	_{MP} (u)				C _{XMP} (u) C _{YM} (u)							
		0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	6	7
0	4	1	0	-1	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	-1	0	-3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	-3	0	1	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	-3	0	3	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	1	-2	-1	4	-1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	-8	1	-2	-1	4	-3	-2	3	-8	-8	16	8	-32	24	-16	-24	64
6	0	1	-2	1	0	-3	6	-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	1	-2	1	0	-1	2	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Z _w						(m)	-8	16	8	-32	24	-16	-24	64	

Результаты расчета элементов Z(m)

Таблица 4.

Таблица 3.

Результаты выполнения $Z^{1}_{w}(m)$

u	C _{YM} (u)		С	_{XMP} (u))		C _{XMP} (u) C _{YM} (u								
		0	1	2	3	0	1	2	3	4	5	6	7	
0	0	1	0	-3	0	0	0	0	0	0	0	0		
1	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0		
2	0	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0		
3	4	1	2	-1	4	-4	-8	4	16	4	-8	-4		
		Z _w ¹ (m)				-4	-8	4	16	4	-8	-4		

Для построения двухэтапного иерархического алгоритма воспользуемся одним из фундаментальных свойств системы функций Уолша, которое заключается в том, что произведение любых двух функций Уолша дает некоторую другую функцию Уолша [3]. Если a_1 - номер одной из исходных функций, и a_2 - номер второй из них, то номер получаемой при их перемножении функции определяется как $a_1 \oplus a_2$, то есть $wal(a_1, \Theta) \times wal(a_2, \Theta) = wal(a_1 \oplus a_2, \Theta)$, где $wal(a, \Theta)$ - функция Уолша с номером a, определенная на интервале $0 \le \Theta \le 1$.

Умножим последовательность (7), являющуюся инверсией функции $wal(5, \Theta)$, на функцию $wal(6, \Theta)$:

$$\overline{wal(5,\Theta)} \times wal(6,\Theta) = \overline{wal(3,\Theta)}.$$
(8)

Полученный результат представляет из себя инверсию третьей функции Уолша, которая имеет частость в два раза меньшую чем исходная последовательность:

$$wal(3,\Theta) = \{-1 - 111 - 1 - 111\}.$$
 (9)

Выделим функцию основной частости, преобразовав попарно элементы последовательности (9) в соответст-

вии с правилом:

$$a_i = \frac{a_{2i} \times a_{2i+1}}{(a_{2i} + a_{2i+1})/2},$$
(10)

где $a_{i} - i$ -номер элемента последовательности (10) $i = \overline{0,3}$.

В результате проведенного преобразования получим последовательность $\{-1 \ 1 - 11\}$, являющуюся третьей строкой матрицы Адамара второго порядка $H_w(2)$ размером 4×4 .

Произведя описанные действия и вычисляя спектральные коэффициенты $C_{\rm Yw}(2) = H_w(2)Y_w(2)$, получим корреляционную последовательность $Z_w(m)$ для первого этапа иерархического корреляционного алгоритма. Результаты вычисления элементов последовательности $Z_w(m)$ приведены в таблице 4.

Для уточнения нахождения экстремума корреляционной функции необходимо провести довычисление в районе полученного максимального значения $Z^{1}_{w}(m)$, что обеспечит, необходимую точность при незначительном увеличении общей трудоемкости алгоритма.



Рис. 3. Результаты моделирования обработки эхо-сигнала в канале дальности РЛС

Моделирование канала дальности РЛС

Результаты применения рассмотренного иерархического алгоритма для моделирования формирования радиолокационного изображения в канале дальности РЛС представлены на рис. 3.

При моделировании в качестве зондирующего сигнала использовалась последовательность Уолша с базой $2^n = 256$. Моделировались 2 цели с одинаковым уровнем эхо-сигналов, расположенные случайным образом на расстоянии 300-700 и 1200-2000 дискрет дальности. Максимальная дальность равнялась 4096 дискрет. По оси абсцисс на рис. 3 отложено нормированное значение корреляционной функции, по оси абсцисс – номер отсчета дальности (отображение завершено на 3000 отсчете для удобства восприятия).

Трудоемкость примененного алгоритма может быть оценена следующим образом. На первом этапе производится 2^{2r} операций для вычисления спектральных коэффициентов последовательностей, расположенных на отсчетах по оси дальности, количество которых равно $k/2^{n-r}$ (k - количество дискрет дальности, n - период исходной последовательности, r - период сжатой последовательности, используемой на первом (грубом) этапе алгоритма). Для вычисления корреляционной функции необходимо выполнить $k \cdot 2^r$ перемножений и столько же сложений спектральных коэффициентов. Результирующая трудоемкость первого этапа будет равна

$$L_w^1 = \frac{k(2^{2r} + 2^{(r+1)})}{2^{n-r}}$$

На втором этапе алгоритма производится доопределение положения экстремума корреляционной функции в пределах 2^{n-r} дискрет дальности. Для этого потребуется 2^{2n-r+1} умножений и сложений.

Суммарная трудоемкость алгоритма

$$L_{w}^{1} = \frac{k(2^{2r} + 2^{(r+1)})}{2^{n-r}} + 2^{2n-r+1}$$
(11)

Для рассматриваемого алгоритма число операций при n=8 и r=3, определенное по формуле (11), будет равно $L_w = 26624$.

Для традиционного алгоритма вычисления свертки сигналов в канале дальности РЛС с использованием быстрого преобразования Фурье (БПФ) потребуется $L_{\rm БПФ}=2k(log_2k+1)=106496$ операций комплексного умножения и сложения.

С учетом того, что в предлагаемом алгоритме все операции являются короткими операциями в хемминговой метрике, то выигрыш от его использования становится еще более очевидным.

Заключение

Таким образом, применение вещественно-диадной свертки позволяет строить программно-аппаратные корреляторы для обнаружения сигалов, обладающие высоким быстродействием и малыми аппаратными затратами, что делает их перспективными для использования в бортовых системах летательных аппаратов.

Литература

- Х. Хармут Теория секвентного анализа: основы и применения. – М.:Мир, 1980. – 574 с.
- Колесенков А.Н., Костров Б.В. Метод прореживания базисных функций в корреляционно-экстремальных алгоритмах совмещения изображений// Вопросы радиоэлектроники. Сер.ОТ, 2010, июль, вып.1. С.176-184.
- Залманзон Л.А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении и других областях. – М.: Наука., 1989.-496 с.

DIGITAL SIGNAL DETECTION CORRELATIVE EXTREMAL METHOD

Kostrov B.V.

The construction of high performance digital signal detection algorithm for hardware and software correlator with low hardware costs is considered.