

## СПЕКТРАЛЬНО-ВЕСОВЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

*Глинченко А. С., к.т.н., профессор кафедры «Радиоэлектронные системы» Сибирского федерального университета, E-mail: AGlinchenko@sfu-kras.ru*

*Комаров В. А., к.т.н., доцент кафедры «Приборостроение и нанoeлектроника», Института инженерной физики и радиоэлектроники Сибирского федерального университета, E-mail: VKomarov@sfu-kras.ru.*

*Тронин О. А. ст. преподаватель кафедры «Радиоэлектронные системы» Сибирского федерального университета, E-mail: toa12@yandex.ru*

**Ключевые слова:** полигармонический сигнал, измерение параметров, частотное разрешение, преобразование Фурье.

### Введение

В работах [1, 2] исследованы методы спектрально-весаого измерения частоты, амплитуды и начальной фазы (разности фаз) гармонических сигналов по значениям амплитуд и фаз частотных выборок (ЧВ) дискретного преобразования Фурье (ДПФ), ближайших к частоте сигнала. Эти методы применимы и к полигармоническим сигналам, особенности измерения параметров которых также кратко отмечены в работе [2]. В то же время для полигармонических сигналов необходимо более углубленное изучение вопросов оценки предельных погрешностей измерения, определения и обеспечения частотного разрешения составляющих сигнала, организации измерений в шумах и др. Решению этих вопросов и посвящена данная работа.

Полигармонические сигналы (ПГС) состоят из основной (первой) и кратных ей по частоте высших гармоник и относятся к многотональным сигналам (МТС), у которых наряду с основной гармонической составляющей присутствуют не кратные ей по частоте побочные составляющие. Измерение частоты таких сигналов заключается в измерении частоты основной гармоники (составляющей), либо частот всех гармоник (составляющих) сигнала, либо гармоник (составляющих) по выбору, например, имеющих наибольшую амплитуду. При этом для составляющей сигнала или гармоники, частота которой измеряется, другие составляющие или гармоники представляют при некогерентных измерениях помехи кратной или не кратной частоты, вызывающие погрешности измерения.

### Измерение частоты комплексных многотональных сигналов по соотношению амплитуд частотных выборок

Для комплексных МТС

$$x(n) = \sum_{l=1}^L X_{ml} \cdot e^{j\lambda_{cl} \cdot n} \cdot e^{j\varphi_l},$$

содержащих  $L$  составляющих с амплитудами  $X_{ml}$ , начальными фазами  $\varphi_l$ , нормированными частотами

Определены условия частотного разрешения составляющих многотональных сигналов, найдены соотношения их начальных фаз и соответствующие им максимальные погрешности оценок измеряемых параметров, приведены алгоритмы измерения параметров высших гармоник, а также результаты коррекции погрешности наложения и моделирования измерений в шумах.

$\lambda_{cl} = (2\pi/N) \cdot (k_l + \alpha_l)$ , и для ПГС, отличающихся тем, что  $\lambda_{cl} = l \cdot \lambda_{cl}$ , ДПФ взвешенной (умноженной на весовую функцию (ВФ)  $w(n)$ ) реализации сигнала  $x(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$  конечной длины  $N$  определяется как

$$\begin{aligned} \tilde{X}(j\lambda_k) &= X_{mi} \cdot N \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{-j\Delta\lambda_{ki} \cdot \frac{N}{2}} \cdot W(\Delta\lambda_{ki}) + \\ &+ \sum_{l=1, l \neq i}^L X_{ml} \cdot N \cdot e^{j\varphi_l} \cdot e^{-j\Delta\lambda_{kl} \cdot \frac{N}{2}} \cdot W(\Delta\lambda_{kl}). \end{aligned} \quad (1)$$

В этом выражении  $i = 1, \dots, L$  – номер составляющей сигнала, частота которой измеряется;  $\tilde{X}(j\lambda_k)$  – частотная выборка (ЧВ) ДПФ, соответствующая частоте  $\lambda_k$ , ближайшей к измеряемой частоте  $\lambda_{ci}$ ;  $\Delta\lambda_{ki} = \lambda_k - \lambda_{ci}$  – разность частот  $\lambda_k$  и  $\lambda_{ci}$ ;  $\Delta\lambda_{kl} = \lambda_k - \lambda_{cl}$  – разность значений частоты  $\lambda_k$  и частот  $\lambda_{cl}$  побочных составляющих, вызывающих погрешности измерения частоты  $\lambda_{ci}$ ;  $W(\Delta\lambda_{ki})$ ,  $W(\Delta\lambda_{kl})$  – значения преобразования Фурье (частотной характеристики (ЧХ)) ВФ на частотах  $\Delta\lambda_{ki}$ ,  $\Delta\lambda_{kl}$  [1, 2]. Первое слагаемое в (1) представляет ДПФ  $X(j\lambda_{ki})$  комплексного гармонического сигнала измеряемой частоты  $\lambda_{ci}$ , а второе – погрешность наложения  $\Delta X(j\lambda_{kl})$ , вносимую комплексными побочными составляющими (гармониками) многочастотного сигнала с частотами  $\lambda_{cl}$ .

Выражение (1) относительно нормированной частоты  $\theta = \lambda/(2\pi/N) = k + \alpha$ , выражаемой в бинах ДПФ, и соответствующих ей частот измеряемой  $\theta_i = k_i + \alpha_i$  и побочной  $\theta_l = k_l + \alpha_l$  составляющих принимает вид:

$$\begin{aligned} \tilde{X}(jk) &= X_{mi} \cdot N \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{j\alpha_i \pi} \cdot W(\alpha_i) + \\ &+ \sum_{l=1, l \neq i}^L X_{ml} \cdot N \cdot e^{j\varphi_l} \cdot e^{j(k_l - k_i + \alpha_l) \pi} \cdot W(k_l - k_i + \alpha_l). \end{aligned}$$

При соотношениях фаз составляющих сигнала  $\varphi_i - \varphi_l = (\Delta\lambda_{ki} - \Delta\lambda_{kl}) \cdot N/2 = [(k_l - k_i) + (\alpha_l - \alpha_i)] \cdot \pi$  или  $\varphi_i - \varphi_l = (\Delta\lambda_{ki} - \Delta\lambda_{kl}) \cdot (N/2) + \pi$  погрешность  $\Delta X(j\lambda_{ki})$  принимает максимальное по модулю значение, равное

$$\Delta X_k = \sum_{l=1, l \neq i}^L X_{ml} \cdot N \cdot W(\Delta \lambda_{kl}) \quad (2)$$

$$\text{или } \Delta X_k / X_k = \sum_{l=1, l \neq i}^L (X_{ml} / X_{mi}) \cdot W(\Delta \lambda_{kl}) / W(\Delta \lambda_{ki}) \quad (3)$$

Погрешность зависит от амплитуд побочных составляющих  $X_{ml}$ , их числа, равного  $(L-1)$ , и степени удаленности от частоты  $\lambda_k$  (или  $\lambda_{ci}$ ), т. е. от разности частот  $\Delta \lambda_{kl} = \lambda_k - \lambda_{cl}$ , и значений ЧХ ВФ  $W(\Delta \lambda_{kl})$  на частотах, соответствующих этой разности. ЧХ ВФ имеет малые значения при разности частот  $\Delta \lambda_{kl \min}$ , превышающей половину ширины главного лепестка  $\Delta \lambda_{\text{гл}}/2$  (или  $D/2$  – в бинах ДПФ [1]), т.е. в области ее боковых лепестков. Этому соответствует некоторое минимальное число бин ( $k_{\min}$ ) между измеряемой частотой  $i$ -й составляющей сигнала и частотой соседней  $(i \pm 1)$ -й составляющей, при котором используемая для измерения  $(k \pm 1)$ -я ЧВ, ближайшая к соседней  $(i \pm 1)$ -й составляющей сигнала, отстоит от нее по частоте не менее чем на  $D/2$  бин. Значения  $k_{\min}$  и  $D$  связаны соотношением

$$k_{\min} = 2 + 0,5 \cdot D \quad (4)$$

Оно учитывает как разные способы измерения частоты сигнала (по двум или трем ЧВ), так и разные способы поиска частоты дискретизации при настройке измерителя. Например, для ВФ Ханна  $D = 4$ ,  $k_{\min} = 4$ ; для ВФ Блэкмана  $D = 6$ ,  $k_{\min} = 5$ . При измерении частоты базовым способом по двум ЧВ значение  $k_{\min}$  может быть уменьшено на 1. Проверить правильность  $k_{\min}$  в конкретных случаях можно графически с помощью ЧХ каналов ДПФ, определяемых ЧХ ВФ.

Для ПГС значение  $k_{\min}$  определяет минимальную частоту первой гармоники  $\lambda_{c1 \min}$  и минимальное число периодов сигнала, по которому возможно измерение, т.е. время измерения.

Если первая гармоника ПГС отсутствует или имеет очень малую амплитуду, то ее частоту можно измерить по разности частот соседних значимых составляющих, убедившись в кратности их искомой частоте первой гармоники.

Изменения амплитуд ЧВ  $X_k$ ,  $X_{k+1}$ ,  $X_{k-1}$ , вызываемые наложением на них побочных составляющих МТС, проходящих через БЛ ЧХ каналов, приводят к изменению их отношений  $R_{k \pm 1}$  или  $R_{k+1}$ ,  $R_{k-1}$  [1] и к погрешности измерения частоты комплексной гармонической составляющей сигнала.

Как и для вещественного гармонического сигнала [1], погрешность наложения находится по приращению частоты  $d\alpha$ , вызванному изменением отношения амплитуд ЧВ  $dR_{k \pm 1}$ :

$$d\alpha = (\partial \alpha / \partial R_{k \pm 1}) dR_{k \pm 1} \quad (5)$$

которое с учетом (2), (3) определяется как

$$dR_{k \pm 1} = \frac{dX_{k \pm 1}}{X_k} - \frac{dX_k}{X_k} \cdot \frac{X_{k \pm 1}}{X_k} = \frac{\sum_{l=1, l \neq i}^L X_{ml} \cdot W(\Delta \lambda_{(k \pm 1)l})}{X_m \cdot W(\Delta \lambda_{ki})} - \frac{\sum_{l=1, l \neq i}^L X_{ml} \cdot W(\Delta \lambda_{kl})}{X_m \cdot W(\Delta \lambda_{ki})} \cdot \frac{W(\Delta \lambda_{(k \pm 1)i})}{W(\Delta \lambda_{ki})} \quad (6)$$

Раскрывая в (6) аргументы  $\lambda$  ЧХ ВФ  $W(\lambda)$ , переходя к частоте  $\theta$ , нормируя ЧХ ВФ к  $W(0)$  и возвращаясь к (5), получаем:

$$d\alpha = \left( \frac{\partial \alpha}{\partial R_{k \pm 1}} \right) \frac{W(0)}{W[\alpha_i]} \quad (7)$$

$$\cdot \sum_{l=1, l \neq i}^L \frac{X_{ml}}{X_{mi}} [\delta_{\text{бл}}(k_i \pm 1 - k_l - \alpha_i) - \delta_{\text{бл}}(k_i - k_l - \alpha_i) \cdot \psi(\pm \alpha_i, N)]$$

В выражении (7)  $\delta_{\text{бл}}(\theta)$  соответствуют относительным уровням боковых лепестков ЧХ ВФ на частоте  $\theta$ , а  $\psi(\pm \alpha_i, N) \approx \psi(\pm \alpha_i) = W(1 \mp \alpha_i) / W(\alpha_i)$  называется в [1, 2] функцией отношения.

Выражение (7) непосредственно определяет вызванную наложением погрешность измерения частоты  $i$ -й составляющей сигнала по соотношению амплитуд двух ЧВ:  $R_{k+1}$  или  $R_{k-1}$ . При этом для производной  $\partial \alpha / \partial R_{k \pm 1}$  применимы способы ее вычисления, выражения и табличные значения, приведенные в [1].

### Интерполяционные оценки частоты комплексных многотональных сигналов

Для интерполяционных методов измерения частоты по трем ЧВ, использующим для вычисления  $\alpha$  оба отношения  $R_{k+1}$ ,  $R_{k-1}$  [2], погрешность наложения равна сумме ее составляющих, вызываемых изменением  $R_{k+1}$  и  $R_{k-1}$ :  $d\alpha = d\alpha(R_{k+1}) + d\alpha(R_{k-1})$ . При этом каждая из составляющих погрешности определяется выражением (7) с учетом соответствующего отношению  $R_{k+1}$  и  $R_{k-1}$  знака – плюс или минус.

Интерполяционным оценкам частоты МТС свойственна также методическая погрешность интерполяции. Коррекция этой погрешности возможна теми же способами, что и для однотональных сигналов [2].

### Измерение частоты вещественных многотональных сигналов

В случае вещественных ПГС и МЧС

$$x(n) = \sum_{l=1}^L X_{ml} \sin(\lambda_{cl}n + \varphi_l)$$

ДПФ взвешенной реализации конечной длины  $N$  определяется как

$$\begin{aligned} \tilde{X}(j\lambda_k) &= \frac{X_{mi}}{2} \cdot N \cdot e^{j(\varphi_i - \frac{\pi}{2} - \Delta \lambda_{ki} \frac{N}{2})} \cdot W(\Delta \lambda_{ki}) + \\ &+ \sum_{l=1, l \neq i}^L \frac{X_{ml}}{2} \cdot N \cdot e^{j(\varphi_l - \frac{\pi}{2} - \Delta \lambda_{kl} \frac{N}{2})} \cdot W(\Delta \lambda_{kl}) + \\ &+ \frac{X_{mi}}{2} \cdot N \cdot e^{-j[\varphi_i - \frac{\pi}{2} + (\lambda_k + \lambda_i) \frac{N}{2}]} \cdot W(\lambda_k + \lambda_i) + \\ &+ \sum_{l=1, l \neq i}^L \frac{X_{ml}}{2} \cdot N \cdot e^{-j[\varphi_l - \frac{\pi}{2} + (\lambda_k + \lambda_l) \frac{N}{2}]} \cdot W(\lambda_k + \lambda_l) \end{aligned} \quad (8)$$

Кроме второго слагаемого  $\Delta X_{kl1} \cdot e^{j\varphi_{\Delta k1}}$ , определяющего наложение для комплексного сигнала, оно содержит два дополнительных слагаемых  $\Delta X_{ki} \cdot e^{j\varphi_{\Delta ki}}$ ,  $\Delta X_{kl2} \cdot e^{j\varphi_{\Delta kl2}}$ , которые вызываются составляющими спектра сигнала с отрицательными частотами  $-\lambda_{ci}$ ,  $-\lambda_{cl}$ :

$$\tilde{X}(\hat{\lambda}_k) = X_{ki} \cdot e^{j\varphi_{ki}} + \Delta X_{kl1} \cdot e^{j\varphi_{kl1}} + \Delta X_{ki} \cdot e^{j\varphi_{ki}} + \Delta X_{kl2} \cdot e^{j\varphi_{kl2}} \quad (9)$$

Максимум модуля суммарного отклонения амплитуд ЧВ  $\Delta X_k$ , согласно (9), имеет место при выполнении фазовых соотношений  $\varphi_{ki} = \varphi_{kl1} = \varphi_{kl2} = \varphi_{\Delta ki}$  или  $\varphi_{ki} + \pi = \varphi_{kl1} = \varphi_{kl2} = \varphi_{\Delta ki}$ , которые учитывают соответствующие им в (8) аргументы векторов  $\varphi_i - (\pi/2) - \Delta\lambda_{ki} \cdot N/2$ ,  $\varphi_i - (\pi/2) - \Delta\lambda_{kl} \cdot N/2$ ,  $-\varphi_i + (\pi/2) - \lambda_k \cdot N/2 - \lambda_l \cdot N/2$ ,  $-\varphi_i + (\pi/2) - \lambda_k \cdot N/2 - \lambda_l \cdot N/2$  ( $l \neq i$ ) и полярности БЛ ЧХ ВФ  $W(\Delta\lambda_{kl})$ ,  $W(\lambda_k + \lambda_l)$ ,  $W(\lambda_k - \lambda_l)$ .

Значение максимума отклонения при этом определяется как

$$\Delta X_k / X_k = \sum_{l=1, l \neq i}^L (X_{ml} / X_{mi}) \cdot W(\Delta\lambda_{kl}) / W(\Delta\lambda_{ki}) + \sum_{l=1}^L (X_{ml} / X_{mi}) \cdot W(\lambda_k + \lambda_l) / W(\Delta\lambda_{ki})$$

Для оценки погрешности измерения частоты вещественных ПГС и МЧС к (7) нужно прибавить слагаемое  $d\alpha_{(B)}$ :

$$d\alpha_{(B)} = \left( \frac{\partial \alpha}{\partial R_{k \pm 1}} \right) \frac{W(0)}{W(\alpha_i)} \cdot \sum_{l=1}^L \frac{X_{ml}}{X_{mi}} [\delta_{\text{ош}}(k_i \pm 1 + k_l + \alpha_l) - \delta_{\text{ош}}(k_i + k_l + \alpha_l) \cdot \psi(\pm \alpha_i)]$$

Дальнейший анализ погрешности аналогичен описанному выше для комплексных ПГС и МЧС.

Следует отметить, что влияние составляющих спектра ПГС и МЧС на отрицательных частотах  $-\lambda_{ci}$ ,  $-\lambda_{cl}$  (отсутствующих у комплексных сигналов) менее существенно, чем составляющих спектра на частотах  $\lambda_{cl}$ . Это связано с их большей удаленностью от частот выборок ДПФ  $\lambda_k$ ,  $\lambda_{k \pm 1}$  и, соответственно, меньшим уровнем боковых лепестков ЧХ ВФ (убывающим по мере удаления от главного лепестка), через которые эти составляющие просачиваются и накладываются на измеряемые ЧВ  $X_k$ ,  $X_{k \pm 1}$ , по которым вычисляется частота сигнала.

### Измерение амплитуды и начальной фазы многотональных сигналов

Амплитуды и начальные фазы составляющих многотональных сигналов измеряются теми же способами, что и однотональных [2]. Это измерения по одной ЧВ наибольшей амплитуды, по двум или трем средневзвешенным ЧВ и по трем ЧВ интерполяционным методом (для амплитуды). Им также свойственны погрешности наложения  $\delta X_{m(\text{изм})} = dX_m / X_m$ , проявляющиеся через изменения амплитуд ЧВ и погрешности используемых оценок частоты.

### Коррекция погрешностей наложения при измерении параметров многотональных сигналов

Необходимость коррекции погрешности наложения существует при измерении параметров как вещественных МТС, так и комплексных. Способы коррекции погрешности наложения вещественных гармонических сигналов рассмотрены в [1, 2]. Применительно к МТС их можно разделить на способы, которые позволяют одновременно скорректировать погрешность наложения, вы-

зываемую только одной составляющей спектра сигнала, и способы, которые обеспечивают одновременную коррекцию погрешности наложения от всех составляющих спектра МТС, создающих помехи наложения на измеряемую составляющую.

К первым из них относятся способы 2 и 4 – по начальной фазе (2) и путем смещения спектра сигнала по частоте (4). Их применение возможно, когда корректируемая составляющая является единственной в спектре сигнала или доминирующей, например, когда гармоническая помеха или гармоника ПГС большой амплитуды.

Ко второй группе относятся способы 1, 3 – с приведением числа выборок к значению, соответствующему целому числу периодов сигнала (1) и с компенсацией составляющих, создающих помехи наложения (3).

Способ 1 применим только для ПГС, частоты составляющих которых кратны частоте основной гармоники. При этом коррекция погрешности наложения может выполняться по значению частоты первой гармоники ПГС – измеренному или найденному путем измерения частоты другой гармоники, например, имеющей наибольшую амплитуду. Однако дискретный характер изменяемого числа выборок сигнала  $N^*$  снижает точность коррекции по мере увеличения номера гармоники. Так, если скорректированное отклонение частоты первой гармоники от ближайшего бина ДПФ составляет  $\Delta\lambda_{kl}$ , то для  $l$ -й гармоники оно составляет уже  $l\Delta\lambda_{kl}$ . В то же время нужно учитывать, что с увеличением номера гармоники снижается и погрешность наложения, вызываемая ею.

В случае сильной помехи возможен также вариант коррекции погрешности наложения путем измерения параметров сигнала по целому числу периодов помехи.

Способ коррекции погрешности наложения, основанный на компенсации побочных составляющих спектра (способ 3), применим к любым МТС, но является наиболее трудоемким, так как требует измерения частоты, амплитуды и начальной фазы всех составляющих сигнала. Им можно корректировать и влияние отдельных составляющих спектра, при этом погрешности наложения от других составляющих остаются прежними. При одновременной коррекции погрешности наложения данным способом по измеренным значениям частот  $\hat{\lambda}_l$ , амплитуд  $\hat{X}_{ml}$  и фаз  $\hat{\varphi}_l$  всех составляющих спектра вещественного МТС формируется корректирующий МТС в виде суммы  $(L-1)$ -й вещественных составляющих и комплексной составляющей частоты  $-\hat{\lambda}_l$ :

$$x_{\text{кор}}(n) = \sum_{l=1, l \neq i}^L \hat{X}_{ml} \sin(\hat{\lambda}_l n + \hat{\varphi}_l) + 0,5 \cdot X_{mi} \cdot e^{-j(\hat{\lambda}_l n + \hat{\varphi}_l - \pi/2)}$$

Он умножается на весовую функцию  $w(n)$ , и по разности  $N$ -точечных ДПФ взвешенного и корректирующего сигналов вычисляются параметры  $i$ -й составляющей сигнала со скорректированной погрешностью наложения.

Для повышения точности измерения коррекция погрешности наложения может быть выполнена многократно.

При использовании ВФ с высокой скоростью спада БЛ ЧХ ВФ бывает достаточно скорректировать погрешности наложения, вызываемые только одной–двумя ближайшими к измеряемой составляющими спектра

сигнала, что позволяет существенно снизить трудоемкость коррекции.

### Измерение параметров высших гармоник полигармонических сигналов

Если необходимо измерить параметры высших гармоник ПГС, то по измеренному значению нормированной частоты первой гармоники  $\theta_1 = k_1 + \alpha_1$  находятся соответствующие им номера и амплитуды ЧВ  $k_l = [l \cdot \theta_1]_{ц.ч.окр}$ ,  $X_{kml}$ ,  $l = 2, \dots, L$ . Для каждой гармоники далее анализируются две соседние с  $k_l$  ЧВ и, если одна из них окажется больше по амплитуде  $X_{kml}$ , то она принимается за максимальную ЧВ  $X_{kml}$  для  $l$ -й гармоники. По ней одной или двум соседним ЧВ ( $k_l - 1$  и/или  $k_l + 1$ ) находится более точное значение частоты этой гармоники, а также значения ее амплитуды и начальной фазы.

В случае измерения с коррекцией погрешности наложения, выполняемой первым способом, параметры высших гармоник находятся указанным выше способом по предварительно скорректированной оценке частоты первой гармоники и скорректированному числу выборок сигнала. При коррекции третьим способом компенсация помех наложения в частотной области проводится отдельно для каждой измеряемой гармоники сигнала.

Для измерения параметров составляющих МЧС или ПГС (при неопределенном положении ЧВ первой гармоники) можно использовать алгоритм, включающий поиск ЧВ наибольшей амплитуды (при  $k \geq k_{\min}$ ), по которой (одной или двум соседним с ней ЧВ) находится частота и другие параметры соответствующей им составляющей сигнала. Далее эти и ближайшие к ним ЧВ, заключенные в пределах ширины главного лепестка ЧХ ВФ, исключаются из последующего рассмотрения ( $D$  или  $D - 1$  ЧВ). Среди оставшихся ЧВ аналогично находится ЧВ наибольшей амплитуды и измеряются параметры другой составляющей сигнала, и т.д.

Измерение параметров МЧС и ПГС предполагает обязательную проверку значимости ЧВ, имеющих малую амплитуду, путем сравнения ее с некоторым порогом, который подбирается, как правило, экспериментально, в том числе и с учетом шумов.

### Моделирование измерения параметров многотональных сигналов

Для оценки (путем моделирования) максимальных погрешностей измерения частоты, вызываемых наложением, необходимо найти начальные фазы гармоник (составляющих) сигнала из отвечающих этому общим фазовых соотношений, которые определены выше. Аналитически эта задача может быть решена для ПГС с заданным числом гармоник  $L$ .

В случае комплексного ПГС первым условием максимума погрешности наложения является равенство фаз векторов  $X(j\lambda_{ki})$  и  $\Delta X(j\lambda_{ki})$  в (1):  $\varphi_i - \Delta\lambda_{ki} \cdot N/2 = \varphi_l - \Delta\lambda_{kl} \cdot N/2$ , из которого фазы  $l$ -х

гармоник с учетом соотношения частот гармоник  $\lambda_{cl} = (l/i)\lambda_{ci}$ , находятся как

$$\varphi_{l \max 1} = \varphi_i - [(l/i) - 1] \cdot (k_i + \alpha_i) \cdot \pi.$$

При измерении частоты первой гармоники  $i = 1$ , и

$$\varphi_{l \max 1} = \varphi_1 - (l - 1) \cdot (k_1 + \alpha_1) \cdot \pi.$$

Условию противоположности фаз векторов  $X(j\lambda_{ki})$ ,  $\Delta X(j\lambda_{ki})$  соответствуют начальные фазы гармоник  $\varphi_{l \max 2} = \varphi_{l \max 1} + \pi$ .

Минимуму погрешности оценок частоты и амплитуды и максимуму погрешности оценки начальной фазы сигнала соответствуют значения начальных фаз гармоник

$$\varphi_{l \min} = \varphi_{l \max 1,2} \pm \pi/2.$$

Фаза  $i$ -й гармоники для комплексного сигнала выбирается произвольно.

Более сложно находятся начальные фазы для вещественных ПГС. В этом случае нужно удовлетворить 4 фазовых соотношения:  $\varphi_{ki} = \varphi_{\Delta k l 1} = \varphi_{\Delta k i} = \varphi_{\Delta k l 2}$ . Положим их равными соответствующим аргументам векторов в (8) и приравняем два соотношения, зависящие только от  $\varphi_l$ ,  $l \neq i$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{\Delta k l 1} &= \varphi_l - (\pi/2) - \Delta\lambda_{kl} \cdot N/2 = \\ &= \varphi_{\Delta k l 2} = -\varphi_l + (\pi/2) - \lambda_k \cdot N/2 - \lambda_l \cdot N/2. \end{aligned}$$

Решая их относительно  $\varphi_l$ , получим:

$$\varphi_{l \max} = (\pi/2) - (l/i) \cdot (k_i + \alpha_i) \cdot \pi, \quad l = 1, \dots, L, \quad l \neq i.$$

При  $\varphi_l = \varphi_{l \max}$   $\varphi_{\Delta k l 1} = \varphi_{\Delta k l 2} = -k_i \cdot \pi$ . Приравняем к этому значению  $\varphi_{\Delta k i}$  и из уравнения  $\varphi_{\Delta k i} = -\varphi_i + (\pi/2) - \lambda_k \cdot N/2 - \lambda_i \cdot N/2 = -k_i \cdot \pi$  найдем  $\varphi_{i \max}$ :

$$\varphi_{i \max} = (\pi/2) - (k_i + \alpha_i) \cdot \pi.$$

Проверим, чему при  $\varphi_i = \varphi_{i \max}$  равно значение  $\varphi_{ki}$ :

$$\varphi_{ki} = \varphi_{i \max} - (\pi/2) - \Delta\lambda_{ki} \cdot N/2 = -k_i \cdot \pi.$$

Таким образом, найденные выражения для начальных фаз удовлетворяют условию максимума погрешности наложения для вещественного ПГС. При этом выражение для  $\varphi_{i \max}$  является частным случаем выражения для  $\varphi_{l \max}$  при  $l = i$ .

При измерении частоты первой гармоники  $i = 1$ , и

$$\varphi_{l \max} = (\pi/2) - l \cdot (k_1 + \alpha_1) \cdot \pi, \quad l = 2, \dots, L.$$

Количественные значения погрешности наложения оценки частоты  $d\alpha$  получены путем моделирования измерения частоты первой гармоники ( $i = 1$ ) комплексного и вещественного ПГС с числом гармоник  $L=10$ , взвешенного ВФ Ханна длиной  $N = 128$ , для заданных значений частоты  $\theta_1 = k_1 + \alpha_1$ ,  $k_1 = 3, 4$  (целое число периодов сигнала на длине реализации),  $\alpha_1 = 0 \pm 0,5$ . Измерения проводились базовым способом и на основе логарифмической параболической интерполяции. Результаты измерения представлены на рис. 1, а ( $k=3$ ) и 1,б ( $k=4$ ) для комплексного и вещественного ПГС.

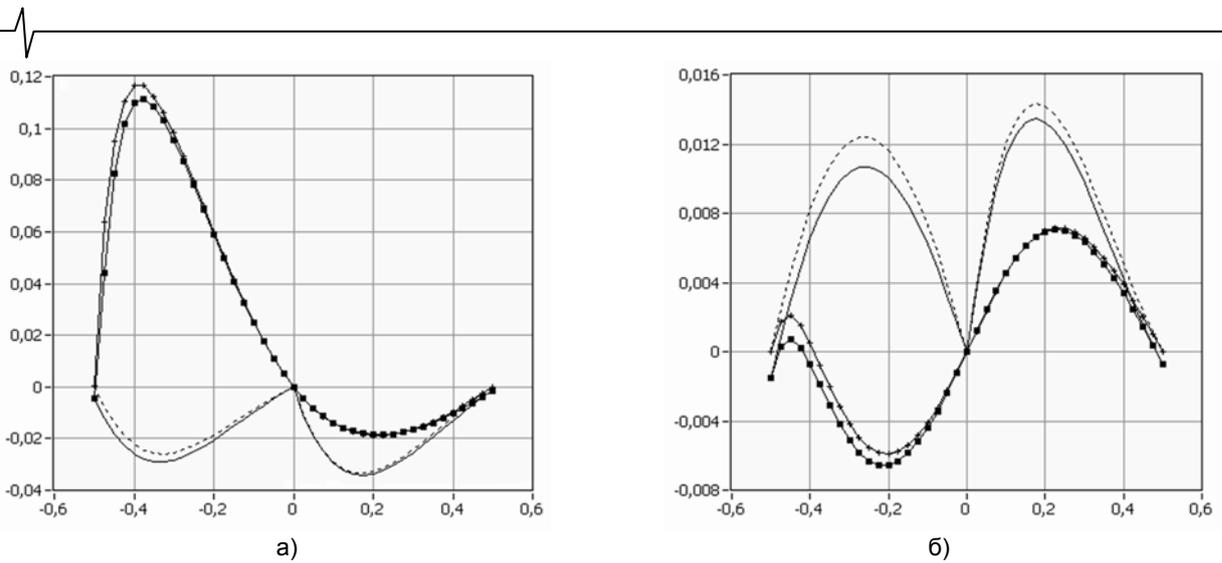


Рис. 1. Зависимости погрешности наложения оценок частоты первой гармоники  $\delta\alpha$  от  $\alpha$  для комплексного ПГС и вещественного ПГС с измерением по базовому способу и с помощью логарифмической параболической интерполяции при  $k = 3$  (а) и  $k = 4$  (б)

Графики рис. 1 показывают незначительное различие погрешностей наложения для комплексных и вещественных ПГС, что объясняется большей удаленностью побочных компонент спектра в области отрицательных частот. Однако оно связано и с большой скоростью убывания боковых лепестков, свойственной ЧХ ВФ Ханна. Для других ВФ с меньшей скоростью их убывания различие погрешностей наложения для обоих сигналов более значимо.

Погрешность интерполяционной оценки частоты при  $k = 3$  и  $\alpha < 0$  значительно превышает погрешность базовой оценки частоты (за счет наложения на ЧВ  $X_{k+1}$  при  $k < k_{\min}$ ), но уже при  $k \geq 4$  становится меньше ее (см. условие (4)).

В отличие от погрешности наложения вещественного гармонического сигнала, максимумы погрешности наложения вещественного ПГС смещены в область значений  $\alpha = \pm(0,2 - 0,25)$ , а при  $\alpha = \pm 0,5$  близки к нулю.

Количественные значения погрешности наложения

оценок амплитуды и начальной фазы первой гармоники ПГС  $\delta X_{m(1)}$ ,  $\Delta\varphi_{(1)}$  получены совместно с измерением ее частоты по выше приведенным исходным данным. Измерения выполнялись для вещественного сигнала по одной ЧВ наибольшей амплитуды (базовый способ) и по трем ЧВ интерполяционным методом (для амплитуды). Графики зависимостей погрешности  $\delta X_{m(1)}$  от  $\alpha$  представлены на рис. 2, а ( $k_1 = 3$ ,  $k_1 = 4$ ), а погрешности начальной фазы  $\Delta\varphi_{(1)}$  – на рис. 2, б.

Графики соответствуют значениям начальной фазы, полученным с использованием интерполяционной оценки частоты, погрешность которой при  $k_1 = 3$  является достаточно большой (см. рис. 1, а).

Графики рис. 2 в основном отвечают отмеченным выше закономерностям и выводам относительно погрешностей наложения оценок частоты. Однако в интерполяционной оценке амплитуды при  $k_1 = 4$  значительную долю уже составляет методическая погрешность интерполяции, которая может быть скорректирована.

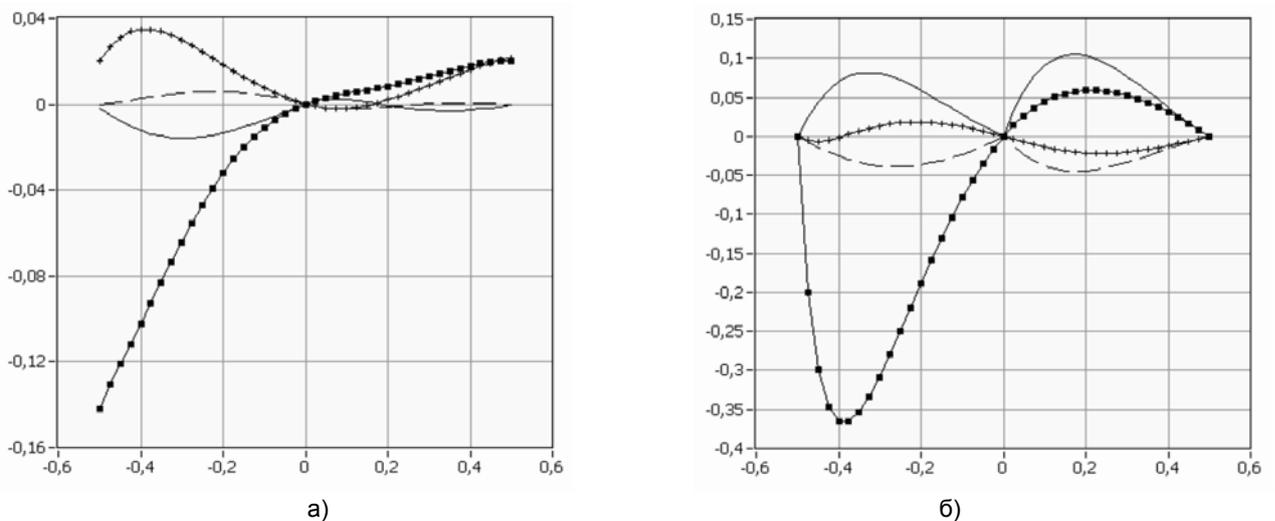


Рис. 2. Зависимости погрешности наложения оценок амплитуды  $\delta X_{m(1)}$  (а) и фазы  $\Delta\varphi_{(1)}$  (в радианах) (б) первой гармоники от  $\alpha$  для вещественного ПГС с измерением по базовому способу и с помощью логарифмической параболической интерполяции при  $k = 3$  и  $k = 4$

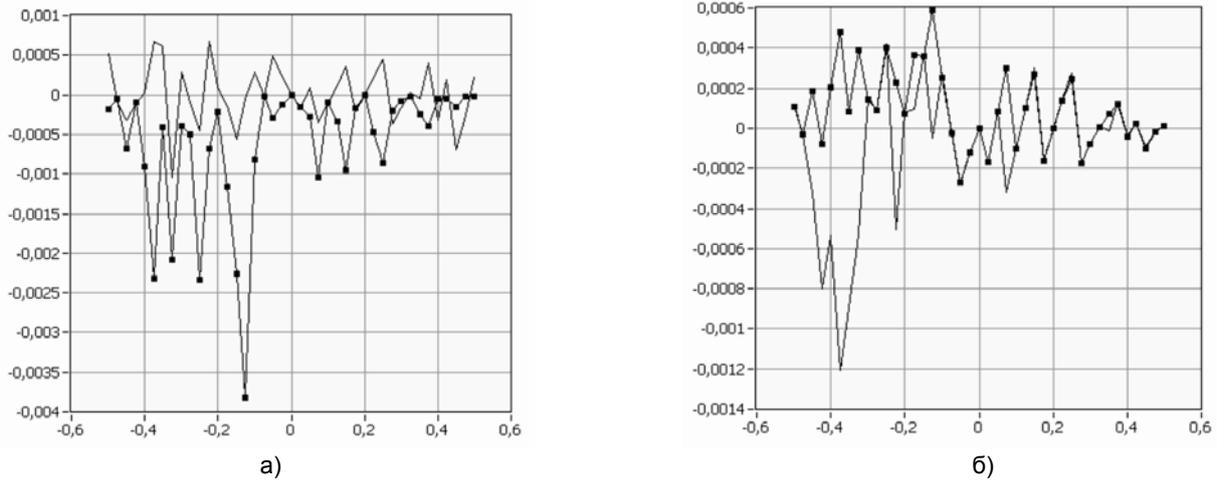


Рис. 3. Зависимости скорректированной погрешности наложения оценок частоты  $d\alpha$  (а) и оценок амплитуды  $\delta X_{m(1)}$  (б) первой гармоники от  $\alpha$  для вещественного ПГС с измерением по базовому способу  $\blacktriangle$  и с помощью логарифмической параболической интерполяции  $\blacktriangle$  при  $k = 3$

Для иллюстрации коррекции погрешности наложения на рис. 3 приведены графики зависимости погрешности скорректированной оценки частоты  $d\alpha$  (рис. 3, а) и амплитуды  $\delta X_{m(1)}$  (рис. 3, б) первой гармоники ПГС от заданных значений  $\alpha$  при  $k_1 = 3$  и тех же исходных данных, что и на рис. 1, 2. Коррекция погрешности наложения выполняется по способу 1, число циклов коррекции равно 2. Для интерполяционных оценок амплитуды также скорректирована и методическая составляющая погрешности.

Сравнение графиков рис. 3 с аналогичными графиками рис. 1, 2 показывает достаточно высокую эффективность данной коррекции.

Влияние номера измеряемой гармоники на погрешность оценки ее параметров показывают графики рис. 4 (для  $k_1 = 4$ ). Погрешности наложения оценок параметров для 5-й гармоники больше, чем для первой как без коррекции (рис. 4, а), так и с коррекцией этой погрешности (рис. 4, б) в силу отмеченных выше причин.

**Моделирование измерения параметров многотональных сигналов в шумах**

Основными вопросами, связанными с точностью из-

мерения параметров МТС в шумах, являются, как и для гармонических сигналов, выбор способа усреднения при синхронизированном и несинхронизированном вводе сигнала и исследование возможного влияния соседних составляющих спектра на случайную погрешность оценок параметров измеряемой составляющей сигнала.

На рис. 5 показаны полученные путем моделирования графики спектров ПГС, усредненных по 64 реализациям с помощью векторного усреднения (а) и усреднения амплитудных спектров (б) при значениях  $k_1 = 3$ ,  $SNR = 0,5$ ,  $\alpha = 0$  (рис. 5, а) и  $0,5$  (рис. 5, б).

Графики соответствуют исходным данным, принятым в предыдущих примерах моделирования измерений параметров ПГС.

Графики показывают возможность обнаружения и измерения параметров ПГС при отношениях сигнал-шум (SNR) меньше 1 путем правильного выбора числа циклов усреднения и длины реализации  $N$ . Путем разделения значимых по амплитуде гармоник сигнала и шумовых составляющих усредненных спектров амплитуд или мощности осуществляется оценка отношения сигнал/шум.

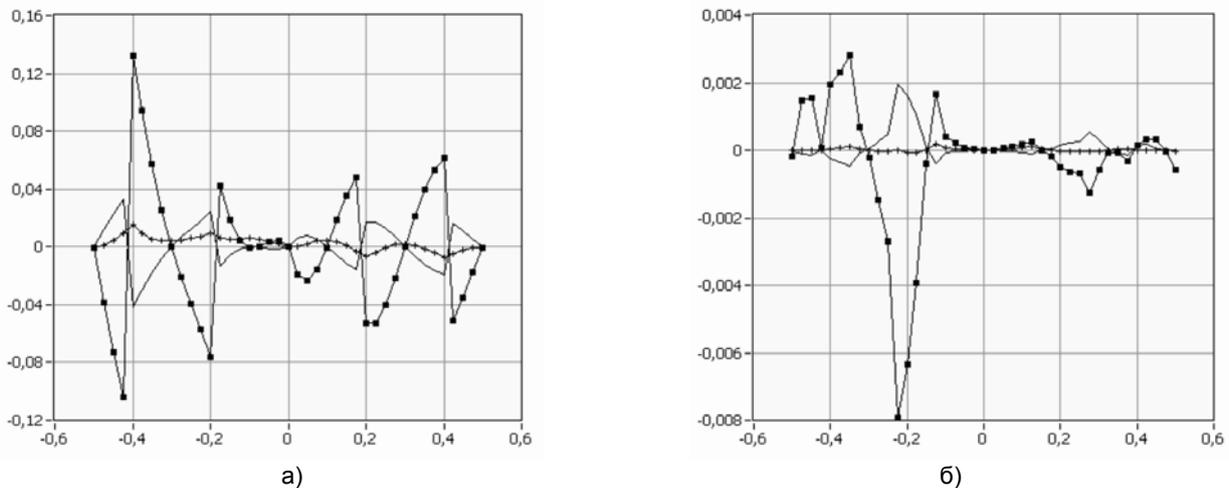


Рис. 4. Зависимости погрешности наложения оценок частоты  $d\alpha_{(5)}$ , амплитуды  $\delta X_{m(5)}$  и начальной фазы  $\Delta\varphi_{(5)}$  пятой гармоники ПГС от  $\alpha$  с измерением по базовому способу без коррекции (а) и с коррекцией (б) при  $k = 4$

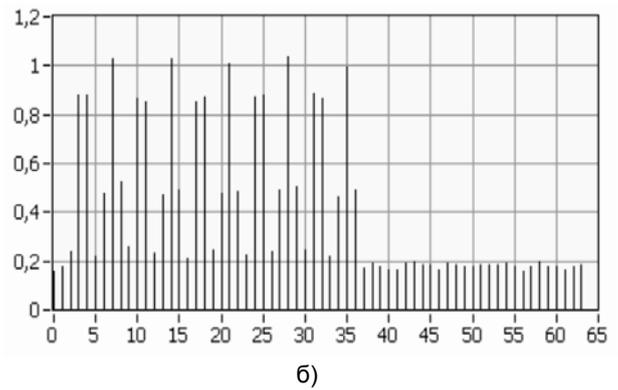
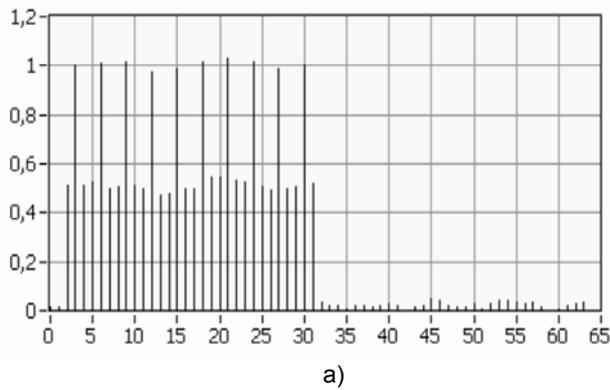


Рис. 5. Графики спектров ПГС для  $\alpha = 0$  с векторным усреднением (а) и для  $\alpha = 0,5$  с усреднением по спектру амплитуд (б) при  $k_I = 3$

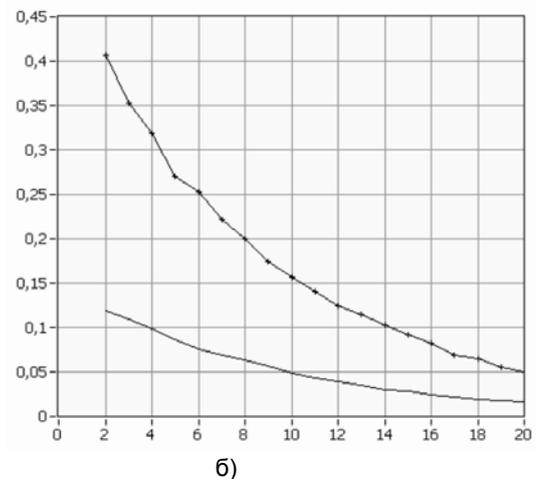
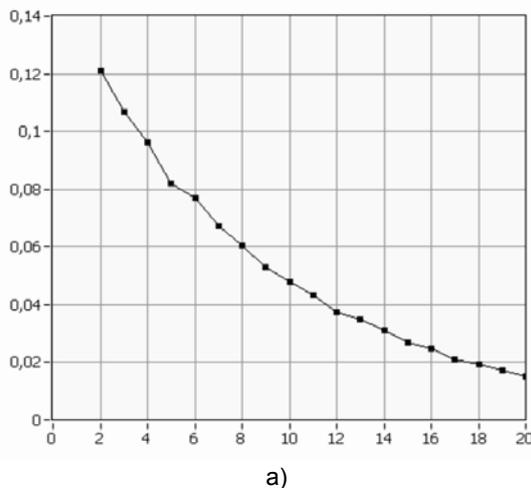


Рис. 6. Зависимости случайных погрешностей оценок частоты  $\sigma_\alpha$  (а), амплитуды  $\sigma_{x_m}$  и фазы  $\sigma_\varphi$  (б) от отношения сигнал-шум SNR (дБ) для 5-й гармоники

Наличие соседних спектральных составляющих практически не сказывается на значении рассчитанных случайных погрешностей измерения параметров  $i$ -й ( $i=5$ ) гармоники ПГС (рис. 6,  $\alpha=0$ ,  $k=4$ ,  $N=128$ , ВФ Ханна, число циклов усреднения 1024).

Они практически не отличаются от случайной погрешности оценок параметров гармонического сигнала.

Спектрально-весовые измерения параметров ПГС реализованы и апробированы в исследовательском измерительном комплексе на базе ПЭВМ [1, 2].

#### Литература

1. Глинченко, А. С. Исследование спектрально-веса измерения частоты сигналов / А. С. Глинченко, О. А. Тронин // Цифровая обработка сигналов. –2010. – № 2. – С. 22 - 28.
2. Глинченко, А. С. Повышение точности интерполяционных оценок параметров сигналов при спектрально-весовых

измерениях/ А. С. Глинченко, О. А. Тронин // Цифровая обработка сигналов. –2011. – № 1. – С.7 -12 .

### SPECTRAL-WEIGHT MEASUREMENT POLYHARMONIC SIGNALS

*Glinchenko A. S., Komarov V. A., Tronin O. A.*

In work defines the conditions of the frequency resolution of multi-tone signals, are found relations in their initial phases and the corresponding maximum error of estimates of measured parameters, are given algorithms measurements of higher harmonics, as well as results of error correction overlay measurements and modeling in noise.