

## ЦИФРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ В ИНФОРМАЦИОННО-УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ

*Шилин А.Н., заведующий кафедрой «Электротехника» Волгоградского государственного технического университета, д.т.н. профессор, e-mail: eltech@vstu.ru.*

*Лавеева К.А. старший преподаватель кафедры «Электротехника» Волгоградского государственного технического университета, e-mail: ksenlavmeister@gmail.com.*

**Ключевые слова:** информационно-управляющая система, моделирование, стохастические сигналы, динамические звенья, оценка погрешности.

### Введение

В связи с широким внедрением цифровых методов обработки информации в управляющих системах, часто возникает задача оценки точности обработки сигналов и определения шумов, описываемых случайными функциями. Обычно при расчете погрешностей используют известные методики анализа точности первичных преобразователей информации (датчиков). Однако оценка погрешностей цифровых устройств, как правило, не выполняется, поскольку в цифровых устройствах часто используется большое число разрядов при обработке данных. При моделировании динамических звеньев, описываемых дифференциальными уравнениями, применяются рекурсивные алгоритмы. При реализации этих алгоритмов происходит накопление погрешностей, а потому, даже при большом числе разрядов, возможны значительные погрешности на выходе устройства. Анализ литературных источников показал, что на сегодняшний день очень мало публикаций по анализу точности цифровых устройств в информационно-управляющих системах. Таким образом, в настоящее время существует проблема оценки точности цифровых устройств и разработки методики получения соотношений между характеристиками входных и выходных случайных сигналов.

При цифровой обработке сигналов основным численным методом является аппарат z-преобразования [1]. Поэтому решение поставленной задачи связано с использованием этого аппарата и предельных теорем в z- и p-областях. Стандартная методика анализа прохождения случайных сигналов через аналоговые устройства, представленная посредством электрических схем замещения, подразумевает вычисление интеграла Винера-Хинчина [2]. Однако было выяснено, что преобразование Лапласа и z-моделирование значительно упрощают операции Винера-Хинчина [3], и была сделана попытка решить задачу с помощью теоремы о начальном значении оригинала для z-преобразования [3, 4, 5]. При этом величина дисперсии случайного сигнала на выходе динамического звена определялась с помощью формулы:

*Рассматривается моделирование процессов прохождения стохастических сигналов в информационно-управляющих системах. Разработана методика расчета дисперсии случайного сигнала на выходе отдельных динамических звеньев и системы в целом, связанная с теоремой о начальном значении оригинала для преобразования Лапласа. Использование полученной методики в области z-переменной позволяет вычислить дисперсию сигнала на выходе цифровых устройств обработки информации.*

$$\sigma_{вых}^2 = \sigma_{вх}^2 \lim_{z \rightarrow \infty} W(z)W(z^{-1}), \quad (1)$$

где  $\sigma_{вх}^2$  - дисперсия случайного сигнала в виде белого шума на входе цепи,  $W(z)$  - передаточная функция звена в виде z-образа.

Однако, при проведении расчетов по формуле (1), было выяснено, что результаты численных и классических методов не совпадают. Другой подход к решению поставленной задачи заключался в представлении дискретных передаточных функций основных звеньев цепи и нахождении выходного сигнала посредством рекуррентных алгоритмов. Для нахождения выходного сигнала использовался метод получения рекуррентных алгоритмов путем дискретизации непрерывных формирующих фильтров [6, 7], но этот метод оказался достаточно громоздким.

Поэтому было предложено осуществить непосредственный переход от переменной  $\omega$  в классическом преобразовании Фурье к переменной  $p$  в преобразовании Лапласа, а затем и к переменной  $z$  в преобразовании Лорана, учитывая одно- и двухстороннюю природу этих преобразований.

### Методика расчета дисперсии случайного сигнала на выходе динамических звеньев

Рассмотрим линейную непрерывную систему с частотной передаточной функцией  $W(j\omega)$ . Если на вход системы подать непрерывный стохастический сигнал со спектральной плотностью мощности  $S_x(\omega)$ , то на выходе получим процесс с непрерывной спектральной плотностью мощности  $S_y(\omega)$  и корреляционной функцией  $R_y(\tau)$ , которые связаны соотношением:

$$S_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2)$$

Поскольку характеристики входного и выходного сигналов связаны следующим образом [8]:

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega), \quad (3)$$

классический метод определения корреляционной функции выходного сигнала основан на вычислении интеграла:

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (4)$$

Из формулы (2) следует, что взаимосвязь между спектральной плотностью и корреляционной функцией выходного сигнала можно записать таким образом:

$$S_y(\omega) = \left[ \int_0^{\infty} R_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} R_y(-\tau) e^{j\omega\tau} d\tau \right]. \quad (5)$$

Аналогично и для спектральной плотности входного сигнала  $S_x(\omega)$ .

Изображение правой ветви корреляционной функции по Лапласу имеет вид:

$$R_y(p) = \int_0^{\infty} R_y(\tau) e^{-p\tau} d\tau. \quad (6)$$

Поэтому, заменяя в уравнении (5)  $j\omega$  на  $p$  и, учитывая (3) и (6), приходим к соотношению:

$$R_y(p) + R_y(-p) = W(p)W(-p) \cdot [R_x(p) + R_x(-p)]. \quad (7)$$

Корреляционная функция является симметричной, а преобразование Лапласа – одностороннее преобразование, в отличие от преобразования Фурье, поэтому интерес представляет только положительная ветвь корреляционной функции (ветвь в правой полуплоскости). Соответственно, в формуле (7) должно остаться только слагаемое  $R_y(p)$ , а второе слагаемое необходимо отбросить. Чтобы совершить подобную операцию, следует разложить правую часть уравнения (7) на сумму двух слагаемых, в одном из которых перед переменной  $p$  стоит только знак «плюс», а в другом – «минус».

Возникающие в различных электрических системах погрешности, в частности погрешности квантования [9], и шумы часто представляют в виде белого шума. Корреляционная функция белого шума, как стационарная случайная функция, является четной.

$$R_x(\tau) = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\omega = S_0 \delta(\tau). \quad (8)$$

Заменив индекс  $y$  на  $x$  в формуле (5) и подставив туда выражение (8), получим спектральную плотность белого шума в виде:

$$S_x(\omega) = 2 \int_0^{\infty} S_0 \delta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = S_0. \quad (9)$$

Поэтому изображение Лапласа от корреляционной функции белого шума:

$$R_x(p) = \frac{S_0}{2}. \quad (10)$$

Если принять во внимание, что теорема о начальном значении для преобразования Лапласа имеет следующий вид:

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pY(p), \quad (11)$$

то, учитывая связь между корреляционной функцией и дисперсией, для нахождения дисперсии сигнала на выходе цепи можно использовать следующее выражение:

$$\sigma_y^2 = R_y(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pR_y(p). \quad (12)$$

Перейдем от преобразования Лапласа к  $z$ -преобразованию (Лорана). В дальнейшем под  $z$ -преобразованием будем понимать одностороннее преобразование, поэтому необходимо рассматривать корреляционную функцию при положительных значениях времени. Переход от непрерывной передаточной функции  $W(p)$  по Лапласу к эквивалентной дискретной  $W(z)$  осуществляется методом  $z$ -форм. Согласно прямому правилу перехода [7], имеем:

$$\frac{1}{p + \alpha} \rightarrow \frac{z}{z - e^{-\alpha T}}, \quad (13)$$

где  $T$  - период дискретизации,  $\alpha$  - постоянная величина.

Переход к переменной  $z$  можно также осуществить с помощью различных видов аппроксимаций при разложении в ряд функции  $z = e^{pT}$ :

$$z = e^{pT} \approx 1 + pT \quad (\text{прямая разность или метод Эйлера}), \quad (14, \text{а})$$

$$z = e^{pT} \approx 1/(1 - pT) \quad (\text{обратная разность}), \quad (14, \text{б})$$

$$z = e^{pT} \approx \frac{1 + pT/2}{1 - pT/2} \quad (\text{метод трапеций}). \quad (14, \text{в})$$

Использование методов аппроксимации позволяет получить формулы для перехода от непрерывной передаточной функции  $W(p)$  к дискретной передаточной функции  $W(z)$ , а именно:

$$p = \frac{z-1}{T}; p = \frac{z-1}{zT}; p = \frac{2}{T} \left[ \frac{z-1}{z+1} \right]. \quad (15)$$

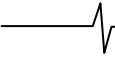
Поскольку можно записать [9], что  $S_y(z) = W(z)W(z^{-1})S_x(z)$ , то, как упоминалось выше, дисперсию на выходе системы предлагалось находить с использованием теоремы о начальном значении оригинала для  $z$ -преобразования в виде (1). Однако во многих случаях данная формула приводит к результату, отличному от значения, полученного посредством классических методов расчета.

Такой результат, во-первых, связан с тем, что формула (1) не учитывает односторонности  $z$ -преобразования. Во-вторых, при переходе от формулы (12) к выражению (1) теряется множитель  $p$  под знаком предела. Заметим, что необходимо также учесть преобразование предела в формуле (12) и, соответственно, вид областей сходимости при переходе от функции  $R_y(p)$  к функции  $R_y(z)$ .

При подстановке точного значения (13) целесообразно использовать теорему о начальном значении для  $z$ -преобразования в таком виде:

$$\sigma_y^2 = R_y(0) = \lim_{z \rightarrow +\infty} R_y(z). \quad (16)$$

Применение методов аппроксимации (14) подразумевает нахождение дисперсии дискретного сигнала непосредственной подстановкой формул перехода (15) в выражение (12). В зависимости от вида такого перехода



дисперсия сигнала на выходе определяется следующим образом.

Метод прямой разности или метод Эйлера:

$$\sigma_y^{-2} = R_y(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pR_y(p) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-1}{T} R_y(z). \quad (17)$$

Здесь  $R_y(z) = R_y(p) \Big|_{p=\frac{z-1}{T}}$ .

Метод обратной разности:

$$\sigma_y^{-2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z-1}{zT} R_y(z). \quad (18)$$

Метод трапеций:

$$\sigma_y^{-2} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{2}{T} \left[ \frac{z-1}{z+1} \right] R_y(z). \quad (19)$$

В выражениях (18) и (19)  $R_y(z)$  находится таким же образом, как и при методе прямой разности (17).

**Полученная методика может быть представлена следующим образом:**

1) Разложить анализируемую систему на отдельные типовые звенья.

2) Записать передаточные функции  $W(p)$ , полученные при прохождении каждого шумового сигнала через последовательность звеньев системы.

3) Найти изображение Лапласа от корреляционной функции каждого шумового сигнала на входе системы в виде  $R_x(p) + R_x(-p)$ .

4) Записать соотношение:

$$R_y(p) + R_y(-p) = W(p)W(-p) \cdot [R_x(p) + R_x(-p)]$$

и разложить правую часть этого уравнения на сумму двух слагаемых, в одном из которых перед переменной  $p$  стоит только знак «плюс», а в другом – «минус». Оставить только слагаемое  $R_y(p)$ , а второе слагаемое отбросить.

5) Используя теорему о начальном значении для преобразования Лапласа, найти дисперсии сигналов на выходе цепи:

$$\sigma_y^{-2} = R_y(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pR_y(p).$$

6) Перейти от преобразования Лапласа к  $z$ -преобразованию (Лорана) прямым способом или посредством различных видов аппроксимаций при разложении в ряд функции  $z = e^{pT}$ . Сделать замену переменных в выражении для корреляционной функции на выходе системы и, используя формулы (16)-(19), определить дисперсию сигналов на выходе системы.

*Пример.* Пусть на входе информационно-управляющего устройства возникает сигнал в виде белого шума со спектральной плотностью  $S_0$ . Представим схему замещения устройства в виде последовательно-параллельного соединения отдельных типовых звеньев и рассмотрим применение методики к каждому из них отдельно.

#### **Инерционное звено**

Определим дисперсию сигнала на выходе цепи с передаточной функцией вида:

$$W(p) = \frac{K}{1 + pT_1}. \quad (20)$$

Тогда, согласно формуле (7), подставив в нее выражения (20) и (10), разложим произведение  $W(p)W(-p)$  на сумму дробей с положительным знаком перед  $p$  в знаменателе и с отрицательным знаком, и возьмем ту дробь, которая выражает преобразование Лапласа для положительной ветви корреляционной функции.

$$R_y(p) + R_y(-p) = \frac{K^2 S_0}{2T_1} \left[ \frac{1}{p + \frac{1}{T_1}} + \frac{1}{\frac{1}{T_1} - p} \right]. \quad (21)$$

Сравнивая соответствующие слагаемые в суммах из правой и левой частей уравнения (21), видим, что

$$R_y(p) = \frac{K^2 S_0}{2T_1} \frac{1}{p + \frac{1}{T_1}}. \quad (22)$$

Тогда, согласно прямому правилу перехода (13), из выражения (22), по формуле (16) имеем:

$$\sigma_y^{-2} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{K^2 S_0}{2T_1} \frac{z}{z - e^{-\frac{T}{T_1}}} = \frac{K^2 S_0}{2T_1}.$$

Рассмотрим также применение методов аппроксимации при разложении в ряд функции  $z = e^{pT}$ . Аналогично, используя методы прямой, обратной разности и трапеций по формулам (14, а-в), получим:

$$\sigma_y^{-2} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{K^2 S_0}{2} \frac{z-1}{T_1 z - T_1 + T} = \frac{K^2 S_0}{2T_1},$$

$$\sigma_y^{-2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{K^2 S_0}{2} \frac{z-1}{T_1 z - T_1 + zT} = \frac{K^2 S_0}{2T_1},$$

$$\sigma_y^{-2} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{K^2 S_0}{2} \frac{2(z-1)}{2T_1 z - 2T_1 + Tz + T} = \frac{K^2 S_0}{2T_1}.$$

Как видно из расчета, все перечисленные методы позволяют получить результат, совпадающий с результатом расчета в классическом методе, посредством интеграла Хинчина-Винера [9].

#### **Колебательное звено**

Пусть передаточная функция имеет следующий вид:

$$W(p) = \frac{K}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)}.$$

Аналогичным образом получим выражение:

$$R_y(p) = \frac{K^2 S_0}{2(T_1 + T_2)} \frac{(T_1 + T_2 + pT_1T_2)}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)}.$$

По формуле (12) имеем:

$$\bar{\sigma}_y^{-2} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{K^2 S_0}{2(T_1 + T_2)} \frac{(T_1 + T_2 + pT_1T_2)p}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)} = \frac{K^2 S_0}{2(T_1 + T_2)}.$$

И после перехода к переменной  $z$ , используя правило (14, а), получим:

$$\bar{\sigma}_y^{-2} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{K^2 S_0}{2(T_1 + T_2)} \frac{T_1 T_2 \frac{z-1}{T} + T_1 + T_2}{(1 + T_1 \frac{z-1}{T})(1 + T_2 \frac{z-1}{T})} \frac{z-1}{T} = \frac{K^2 S_0}{2(T_1 + T_2)}.$$

Такой же результат можно получить, вычисляя дисперсию шума по формулам (13) и (14, б-в).

Таким образом, предложенная методика определения дисперсии шумового сигнала на выходе цепи позво-

ляет получить расчетные результаты, совпадающие с таковыми при использовании классического метода Хинчина-Винера. Представив схему замещения устройства в виде последовательно-параллельного соединения отдельных типовых звеньев и применив к каждому из них рассмотренную выше методику, можно провести анализ всей системы в целом.

### Заключение

На основе проведенного анализа преобразований случайных сигналов в информационно-управляющих системах и использования предельных теорем операторных методов была получена методика расчета дисперсии стохастических сигналов на выходе аналоговых и цифровых устройств. Эта методика позволяет заменить интегрирование при классическом способе расчета на использование пределов, что значительно упрощает решение задачи. Разработанная методика вычисления дисперсии дискретного сигнала не только позволяет автоматизировать расчет величин, так или иначе связанных с внутренними шумами приборов, но и определять погрешность цифровой обработки сигналов, что весьма актуально в связи с широким использованием цифровых систем управления.

### Литература

1. Шилин А. Н. Анализ методов синтеза цифровых фильтров по аналоговым моделям / А. Н. Шилин, О. А. Крутякова // Цифровая обработка сигналов. – 2009. - № 4. – С.3-7
2. Шаталов А. С. Частотные методы расчета шумов на выходе линейных электрических цепей и систем управления / А. С. Шаталов // Электричество. - 1966. - №4. - С. 11-15
3. Шилин А. Н. Точность цифровых систем управления с рекуррентными алгоритмами / А. Н. Шилин // Приборы и системы управления. – 1999. - №7. – С. 5-8
4. Методы цифрового моделирования и идентификации стационарных случайных процессов в информационно-

измерительных системах / А. Н. Лебедев и др. – Л. : Энергоатомиздат, 1988. – 64 с.

5. Бакалов В. П. Цифровое моделирование случайных процессов / В. П. Бакалов. – М. : Сайнс-пресс, 2002. – 88 с.
6. Шилин А. Н. Цифровое моделирование и анализ преобразований стохастических сигналов в фотоэлектрических цепях / А. Н. Шилин К. А. Лавеева // Распознавание – 2010: сб. материалов IX Междунар. конф. – Курск, 2010. - С. 96-97
7. Быков В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике / В. В. Быков. – М. : Изд-во «Советское радио», 1971. – 325 с.
8. Санковский Е. А. Вопросы теории автоматического управления. (Статистический анализ и синтез САУ). – М. : «Высш. школа», 1971. – 232 с.
9. Арутюнов П. А. Теория и применение алгоритмических измерений. - М. : Энергоатомиздат, 1990. - 256 с.

*A. N. Shilin, K. A. Laveeva*

## DIGITAL SIMULATION OF STOCHASTIC SIGNALS TRANSFORMATION IN INFORMATION-CONTROL SYSTEMS

The method of the stochastic signals transmission simulation in management information systems is considered in this paper. Based on this method, the technique of calculation of the random signal variance at the output of a dynamic link associated with the theorem on the initial value of the original for the Laplace transform was developed. This technique allows to determine the variance of the output signal in analog devices. In addition, the use of developing techniques in the  $z$ -variable also allows to calculate the variance of the signal at the output of digital information processing devices.

**Texas Instruments Inc.** расширяет линейку своих многоядерных процессоров обработки сигналов **TMS320C66x**. Расширена функциональность четырехядерного процессора **TMS320C6670** - системы на кристалле для беспроводных телекоммуникационных приложений, - и разработан новый одноядерный процессор **TMS320C6671**, задача которого упростить для разработчика процесс перехода от одноядерного к многоядерному устройству.

Кроме того, расширен набор программных средств разработки: выпущен новый набор разработчика программного обеспечения для многоядерных процессоров (**MCSDK**); предлагаются библиотеки оптимизированного ПО для многоядерных процессоров; выпущено ядро Linux, поддерживающее C66x. Подробнее: <http://focus.ti.com/dsp/docs/dspcontent.tsp?contentId=118022>

Начать работу с многоядерными процессорами C66x позволяет отладочный модуль **TMS320C6678 Lite EVM**. Модуль построен на базе процессора **TMS320C6678** и сопровождается программной средой разработки **Code Composer Studio** версии **5.0**, набором разработчика программного обеспечения для многоядерных процессоров (**MCSDK**), включающим пакет программ поддержки платы (**Board Support Package - BSP**), библиотеку поддержки кристалла (**Chip Support Library - CSL**), операционную систему реального времени **SYS/BIOS** и другие программные средства. Подробнее: <http://focus.ti.com/docs/toolsw/folders/print/tmdxevm6678.html>

