УДК 517

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДОСТОВЕРНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ЦИФРОВОГО СИГНАЛА

***Кравчук А.С.**, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры био- и наномеханики Белорусского государственного университета, г. Минск, Беларусь, e-mail: ask_Belarus@inbox.ru*

***Кравчук А.И.**, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры численных методов и программирования Белорусского государственного университета, г. Минск, Беларусь, e-mail: kanzhelika@inbox.ru*

***Рымуза З.**, доктор тех. наук, профессор, Institute for Micromechanics and Photonics, Warsaw University of Technology, Sw. A.Boboli 8, 02-525 Warszawa, Poland e-mail: z.rymuza@mchtr.pw.edu.pl*

Для проверки точности вычисления коэффициентов Фурье с помощью дискретного преобразования Фурье применено правило Рунге. В ходе исследования установлено, что не более 5% от общего числа вычисленных коэффициентов Фурье для простейшей линейной функции имеют относительную погрешность 0.005. Применение правила Симпсона позволяет существенно увеличить количество достоверно вычисленных коэффициентов Фурье для детерминированной функции.

Ключевые слова: дискретное преобразование Фурье, правило Рунге, правило Симпсона, коэффициенты Фурье, цифровой сигнал.

Введение

Измерение массивов физических параметров с помощью цифровых приборов во многих случаях требует применения методов обработки некоррелированных сигналов. Например, применение цифровых профилометров, атомных силовых микроскопов AFM при анализе микро- и нано- геометрии поверхности твердого тела [1, 2]. Однако проблема достоверного перехода от дискретных значений к непрерывной функции является одной из основных при построении математических моделей физических процессов.

Ряды Фурье традиционно используются при анализе цифровых сигналов. В этом случае экстраполяция значений отрезка ряда Фурье выполняется автоматически с помощью условий периодичности. Вместе с тем точность интерполяции связана с числом измеренных значений и правилами аппроксимации функции, используемой для вычислений коэффициентов Фурье. При этом критериев определения точности вычисленных коэффициентов Фурье ранее в публикациях сформулировано не было, хотя указывалось на существование данной проблемы [3, 4]. Известен ряд модификаций дискретного преобразования Фурье, нацеленных на уменьшение числа выполняемых математических операций [4], однако достоверность вычислений в них также не комментируется.

Основные положения теории рядов Фурье

Будем предполагать, что сигнал $f(x)$ является непрерывной функцией на $(0,\ell)$, тогда $f(x)$ принадлежит функциональному пространству $L_2(0,\ell)$ с нормой [5]:

$$\|f(x)\| = \left(\frac{1}{\ell}\int_0^\ell (f(x))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

Пусть при этом будут выполнены условия (рис. 1):

$$f(0)=0,\ f(\ell)=0. \quad (2)$$

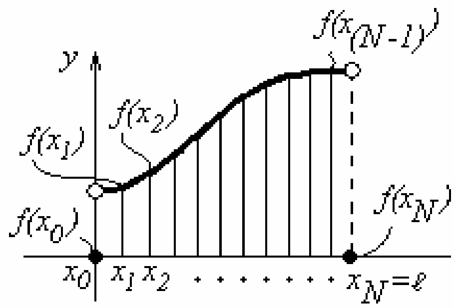

Рис. 1. Функция $f(x)$, дискретное множество ее значений в узловых точках, полученных на равномерном разбиении отрезка интегрирования

Будем также предполагать, что функция $f(x)$ является нечетной на $(-\ell,\ell)$ и периодической с периодом 2ℓ на вещественной оси $(-\infty,\infty)$. В этом случае $f(x)$ может быть представлена в виде сходящегося ряда Фурье [5, 6]:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin\left(k\cdot\frac{\pi}{\ell}x\right), \quad (3)$$

где

$$b_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{\ell}x\right)dx,\ k=1,\ldots,\infty \quad (4)$$

Дискретное преобразование Фурье. Надежность вычислений

Рассмотрим функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям пункта 1. Будем предполагать, что мы имеем множество значений $f_n = f(x_n)$ в ограниченном числе узловых точек на трассе длиной ℓ с координатами $x_n = n\cdot h$, $n=0,\ldots,N$, где $h=\ell/N$ - однородный шаг разбиения, $(N+1)$ - число узловых точек (рис. 1).

Будем предполагать, что N является четным. Рассмотрим непрерывную аппроксимацию функции $f(x)$ с помощью рядов Фурье на отрезке $[0,\ell]$ принимая во внимание множество дискретных значений $\{(x_n, f_n)\}_{n=0}^{N}$, где $f_N = f(\ell) = 0$ (2), [6].

Естественно предположить, что верно следующее интерполяционное правило для

$f(x)\cdot\sin\left(k\frac{\pi}{\ell}x\right)$, где k - фиксированное целое число:

$$f(x)\cdot\sin\left(k\frac{\pi}{\ell}x\right)\approx f_n\cdot\sin\left(k\frac{\pi}{\ell}x_n\right), x\in[x_n,x_{n+1}), n=0,\ldots,(N-1). \quad (5)$$

В соответствии с (5) интеграл (4) может быть приближенно вычислен с помощью следующего правила:

$$b_k \approx b_{h,k} = \frac{2}{N}\left(\sum_{n=0}^{N-1} f_n\cdot\sin\left(\frac{\pi}{N}\cdot k\cdot n\right)\right), \quad (6)$$

$k = 1,\ldots,(N-1)$.

Применение интерполяционного правила (5) означает, что правило левых прямоугольников использовано для вычисления коэффициентов Фурье (4). Полученное выражение для $b_{h,k}$ известно еще как дискретное преобразование Фурье (ДПФ).

В справочной литературе [6] указывается, что оно решает проблему тригонометрической интерполяции. Однако проверим, с какой точностью ДПФ вычисляет значения соответствующих коэффициентов. Для этого используем известное и широко применяемое при итерационном вычислении интегралов правило двойного пересчета (правило Рунге). Для этого необходимо обобщить ДПФ (6) на случай вычисления приближенного значение b_k (4) с однородным шагом $\lambda\cdot h$, где $\lambda > 0$ - целое число равное 1 или 2 в зависимости от того, с каким шагом ведется расчет. Рассмотрим множество значений $f(x_n^*)$ в ограниченном числе узловых точек на трассе длиной ℓ с координатами $x_n^* = \lambda\cdot h\cdot n$, $n = 0,\ldots,(N/\lambda)$. Очевидно, что $x_n^* = x_{\lambda\cdot n}$ и, следовательно,

$$\{(x_n^*, f(x_n^*))\}_{n=0}^{(N/\lambda)} = \{(x_{\lambda\cdot n}, f_{\lambda\cdot n})\}_{n=0}^{(N/\lambda)}.$$

Тогда (6) может быть записано в виде:

$$b_{\lambda\cdot h,k} = \frac{2\cdot\lambda}{N}\left(\sum_{n=0}^{N/\lambda-1} f_{\lambda\cdot n}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{N}\cdot k\cdot(\lambda\cdot n)\right)\right), \quad (7)$$

$k = 1,\ldots,(N/\lambda - 1)$.

Известно, что $b_k \approx b_{2\cdot h,k}$ с относительной погрешностью η, когда выполнено следующее равенство (правило Рунге):

$$\left|b_{h,k} - b_{2\cdot h,k}\right| < \eta\cdot\left|b_{2\cdot h,k}\right|, k = 1,\ldots,(N/2). \quad (8)$$

Следовательно, процедуру определения числа $N_{\text{effective}}$ ($N_{\text{effective}} < N/2$) достоверно вычисленных коэффициентов Фурье можно определить следующим образом: необходимо установить пороговое значение относительной ошибки η (8) (например, $\eta = 0.005$) и начиная с $k = 1$ последовательно увеличивать k пока не получим число $k = N_{\text{effective}} + 1$, при котором значения $b_{h,(N_{\text{effective}}+1)}$ и $b_{2\cdot h,(N_{\text{effective}}+1)}$ не будут удовлетворять неравенству (8).

Следует отметить, что ДПФ в виде (7) можно также получить, используя квадратурное правило трапеции, принимая во внимание условие (2).

Рассмотрим процедуру определения числа $N_{\text{effective}}$ достоверно вычисленных коэффициентов Фурье для следующей функции $f(x)$, определенной на интервале $[0,1]$:

$$f(x) = \begin{cases} x, x\in[0,1), \\ 0, x = 1. \end{cases} \quad (9)$$

Будем предполагать, что функция (9) нечетная на интервале $[-1,1]$ и периодическая на $(-\infty,\infty)$. В этом случае $f(x)$ может быть представлена рядом Фурье. Численный тест по определению достоверно определенных коэффициентов Фурье выполнен для $N = 996$ узловых точек на отрезке $[0,1]$. Установлено, что количество достоверно вычисленных коэффициентов Фурье $N_{\text{effective}} = 44$ (относительная погрешность 0.005), что существенно меньше $N/2 = 498$ (Таблица 1).

Метод увеличения числа достоверно вычисленных коэффициентов Фурье

Многие модификации ДПФ были выполнены для того, что бы сократить число необходимых математических операций, однако к настоящему моменту нет исследований, посвященных повышению количества достоверно вычисленных коэффициентов Фурье. В предыдущем разделе статьи было установлено, что не более 5% коэффициентов Фурье линейной на отрезке функции имеют относительную ошибку 0.005.

Актуальность данного раздела заключается в том, что в нем представлен метод, позволяющий увеличить в несколько раз количество достоверно вычисленных коэффициентов Фурье. Будем предполагать, что $N = 4\cdot m$, где m - целое число. В этом случае количество достоверно вычисленных коэффициентов Фурье может быть значительно увеличено с помощью применения правила Симпсона при вычислении интеграла в (4) [6].

Таблица 1.

Определение достоверно вычисленных коэффициентов с помощью ДПФ в виде (7)

k	Точное значение [6] $b_k = (-1)^{k-1}\frac{2}{\pi\cdot k}$	$b_{2\cdot h,k}$, (7)	$b_{h,k}$, (7)	$\eta = \frac{\left\|b_{h,k} - b_{2\cdot h,k}\right\|}{\left\|b_{2\cdot h,k}\right\|}$, (8)
1	0.63662	0.637	0.637	2.5e-06
2	-0.31831	-0.318	-0.318	9.9e-06
3	0.212207	0.212	0.212	2.2e-05
…	…	….	….	…
43	0.01481	0.01471	0.01478	0.00461
44	-0.01446	-0.01438	-0.01445	0.00483
45	0.01415	0.01405	0.01412	0.00505
…	…	…	…	…

Таблица 2.

Применение метода вычисления коэффициентов Фурье, основанного на правиле Симпсона

k	Точное значение [6] $b_k = (-1)^{k-1} \dfrac{2}{\pi \cdot k}$	$b^{Simpson}_{2\cdot h,k}$, (10)	$b^{Simpson}_{h,k}$, (10)	$\eta = \dfrac{\left\| b^{Simpson}_{h,k} - b^{Simpson}_{2\cdot h,k} \right\|}{\left\| b^{Simpson}_{2\cdot h,k} \right\|}$, (8)
1	0.63662	0.6366	0.6366	8.25e-012
2	-0.31831	-0.3183	-0.3183	1.32e-010
3	0.212207	0.2122	0.2122	6.68e-010
….	…	….	….	…
152	-0.0041883	-0.00421	-0.00419	0.00494
153	0.0041609	0.004183	0.004162	0.00508
154	-0.0041339	-0.004157	-0.004135	0.00522
…	…	…	…	…

Принимая во внимание условие (2), правило вычисления коэффициентов Фурье (4), с однородным шагом $\lambda \cdot h$ принимает вид:

$$b_k \approx b^{Simpson}_{\lambda\cdot h,k} = \frac{2\cdot\lambda}{3\cdot N}\sum_{n=1}^{N/(2\cdot\lambda)}\left\{4\cdot f_{\lambda\cdot(2\cdot n-1)}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{N}\cdot k\cdot\lambda\cdot(2\cdot n-1)\right)+\right.$$
$$\left.+2\cdot f_{\lambda\cdot 2\cdot n}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{N}\cdot k\cdot\lambda\cdot 2\cdot n\right)\right\}, k=1,\ldots,(N/\lambda-1). \quad (10)$$

Анализ вычислительной эффективности формулы (10) в смысле критерия (8) проведен для функции $f(x)$ (9) на отрезке $[0,1]$ и представлен в Таблице 2 ($N = 996$). Очевидно, что метод вычисления (10) позволил увеличить количество достоверно вычисленных коэффициентов Фурье до $N_{\text{effective}} = 152$ (Таблица 2), т.е. практически в 3 раза.

В ходе вычисления коэффициентов Фурье заданного сигнала $f(x)$ по множеству дискретных значений $\{(x_n, f_n)\}_{n=0}^{N}$, где $f(x_N) = f(\ell) = 0$, с установленной точностью $\eta = 0.05$ было показано, что можно достоверно (в смысле правила Рунге (8)) вычислить около 10 коэффициентов Фурье. При этом для последовательности дискретных значений, не содержащей выраженного детерминированного сигнала, формулы (7) и (10) имеют приблизительно одинаковую эффективность. Следует также отметить, что достоверно вычисленные коэффициенты Фурье расположены не подряд, как в случае с функцией (9), а вразброс. Остальные коэффициенты Фурье вычислить достоверно не возможно. По-видимому, разность множества дискретных значений и выделенного с помощью правила Рунге гармонического (детерминированного) сигнала может характеризоваться только вероятностными характеристиками (плотностью распределения, моментами произвольного порядка).

Использование известного метода интерполяции функции $f(x)$ с помощью полиномов степени n $(0 < n < N)$ [6] не дает должного эффекта, так как в этом случае не возможно отделить достоверно вычисленные коэффициенты исходного сигнала от коэффициентов, обеспечивающих приближение к гипотетически навязанному правилу интерполяции (например, к ступенчатой функции при использовании правила левых прямоугольников).

Заключение

В ходе проведенных исследований установлено, что не более 5% от общего числа вычисленных коэффициентов Фурье для простейшей линейной функции имеют относительную погрешность 0.005. Применение правила Симпсона позволяет существенно увеличить количество достоверно вычисленных коэффициентов Фурье для детерминированной функции.

Использование известного метода интерполяции функции $f(x)$ с помощью полиномов степени n $(0 < n < N)$ [7] не дает должного эффекта, так как в этом случае не возможно отделить достоверно вычисленные коэффициенты исходного сигнала от коэффициентов, обеспечивающих приближение к гипотетически навязанному правилу интерполяции.

Для дискретной последовательности значений, не содержащей выраженного детерминированного сигнала, формулы (7) и (10) имеют приблизительно одинаковую эффективность. Следует также отметить, что достоверно вычисленные коэффициенты Фурье расположены не подряд, как в случае с функцией (9), а вразброс. Разность элементов множества дискретных значений, определяющих некоррелированный сигнал, и соответствующих им значений выделенного с помощью правила Рунге гармонического (детерминированного) сигнала может характеризоваться только вероятностными характеристиками (плотностью распределения, моментами произвольного порядка), но не коэффициентами ряда Фурье.

Литература

1. Greenwood J.A.; Wu J.J. Surface Roughness and Contact: An Apology // Meccanica, 36, 2001, P. 617–630.
2. Persson B.N.J. Elastoplastic Contact between Randomly Rough Surfaces // Physical Review Letters, Vol. 87, N 11, 2001, (116101), 4 p.
3. Горинштейн А.М. Численное решение задач радиотехники и техники связи на ЭЦВМ. Москва: Связь 1972
4. Бахвалов Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). – Москва: Наука, 1975, 631 с.
5. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. - Москва: Физматлит, 1961, 936 с.
6. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.Справочник по математике для инженеров и учасщихся втузов. - Москва: Наука, 1986, 544 с.
7. Математическая энциклопедия/ Том 1-5. Редактор: Виноградов И.М. и др. – Москва: Советская энциклопедия, 1977.

CALCULATION OF SURE FOURIER COEFFICIENT OF DIGITAL SIGNAL

A.S. Kravchuk, A.I. Kravchuk, Z. Rymuza

The Runge rule have applied for verification accuracy of calculation of spectrum with help of Fourier Transformation. We have established that no more than 5% of calculated Fourier coefficients for simplest functions have a relative error 0.005. The application of Simpson rule to calculation of Fourier coefficient is allowed rasing the number of sure culculated coefficient.