УДК 621.391

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ НА КОНЕЧНЫХ ИНТЕРВАЛАХ В БАЗИСЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Пономарева О.В., *к.т.н., доцент Ижевского государственного технического университета,*
cik18@gossovet.udm.ru

На основе системного подхода рассматривается развитие теории спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в базисе параметрических экспоненциальных функций. Представлены примеры применения предлагаемой теории в практических задачах цифрового анализа сигналов, иллюстрирующие лучшую локализацию пиков гармонического анализа по отношению к ДПФ с дополнительными нулевыми отсчетами.

Ключевые слова: дискретные сигналы, спектральный анализ, дискретное преобразование Фурье, параметрический, базис, экспоненциальная функция.

Введение

Развитие методов и средств вычислительной техники значительно расширило приложения цифровых спектральных методов к обработке информации во многих областях научных исследований, таких, например, как радиолокация, сейсмология, навигация, гидролокация, вибродиагностика и связь.

Важное место среди известных методов цифровой обработки сигналов занимает спектральный анализ в базисе дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ) – дискретное преобразование Фурье (ДПФ).

Пара преобразований ДПФ в матричной форме задается следующими соотношениями:

$$S_N = \frac{1}{N} F_N X_N, \qquad (1)$$

$$X_N = F_N^* S_N,$$

где * - знак комплексного сопряжения, $X_N = [x(0), x(1), \ldots\ldots, x(N-1)]^T$ - представление дискретного сигнала $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, в виде вектора N - мерного линейного пространства; T - знак транспонирования; $S_N = [s(0), s(1), \ldots, s(N-1)]^T$ - вектор коэффициентов разложения X_N по системе дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ), задаваемой матрицей F_N:

$$F_N = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & . & . & (N-1) \end{array} \; n \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (N-1) \\ k \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & W_N^1 & . & . & W_N^{(N-1)} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & W_N^{(N-1)} & . & . & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{array}\right] \end{array},$$

$$W_N = \exp(-j\frac{2\pi}{N}). \qquad (2)$$

Важно понимать, что ДПФ сигнала X_N задает преобразование на конечном множестве точек N, а в рамках теории дискретных сигналов на конечных интервалах любые линейные преобразования сигналов не должны выводить их за пределы интервала N [1]. В случае применения ДПФ, сдвиг сигнала X_N определяется как циклическая перестановка его отсчетов. Широкое же применение преобразования Фурье к анализу стационарных процессов и систем главным образом основано на фундаментальном свойстве, отмеченном Н. Винером – свойстве инвариантности экспоненциального базиса к циклическому сдвигу [2]. Матрица сдвигов исходного сигнала X_N в случае применения ДПФ является циркулянтной матрицей и имеет вид:

$$C = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & . & . & . & (N-1) \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (N-1) \end{array} & \left[\begin{array}{cccccc} x(0) & x(1) & & & & x(N-1) \\ x(N-1) & x(0) & . & . & . & x(N-2) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ x(1) & x(2) & . & . & . & x(0) \end{array}\right] \end{array}. \qquad (3)$$

Если использовать квадратную матрицу сдвига размерности N:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & & . & . & & \\ . & & & . & . & \\ . & & & & & 1 \\ 1 & & & & & 0 \end{bmatrix}, \qquad (4)$$

то выражение (3) можно представить в следующем виде:

$$C = \begin{bmatrix} X_N^T M^0 \\ X_N^T M \\ . \\ X_N^T M^{N-1} \end{bmatrix}, \qquad (5)$$

где M^0 - единичная матрица, M^k, $k = \overline{1, N-1}$ - обозначает возведение матрицы M в степень k.

Теория спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах базируется на трех основных и взаимосвязанных положениях:

- определение сигнала на конечном множестве N точек;
- определение сдвига сигнала как некоторой перестановки его отсчетов;
- определение системы дискретных базисных функций.

Все эти положения, как показано выше, при спектральном анализе дискретных сигналов на конечных интервалах в базисе экспоненциальных функций определены теорией ДПФ. С точки же зрения практического применения аппарата ДПФ важно отметить следующий момент. ДПФ последовательности $X(n), n=\overline{0,N-1}$ в принципе может рассматриваться, как некоторое приближение к преобразованию Фурье от функции, порождающей последовательность $X(n)$. Однако, и это следует подчеркнуть, свойства ДПФ являются точными и не являются приближенными, основанными на свойствах преобразования Фурье непрерывных сигналов [3,4].

При спектральном анализе дискретных сигналов часто применяется искусственное увеличение интервала определения за счет добавления нулевых отсчетов во временной области [7,8]. В работе [1] рассмотрено видоизменение базисных систем функций Виленкина – Крестенсона (ВКФ) для дискретных сигналов, подвергшихся такому преобразованию. Показано, что для систем ВКФ, заданных на интервале $N=m^n, (n=l+k, l, k$ - целые числа; m - основание системы счисления), дополнение дискретного сигнала нулевыми отсчетами во временной области или удаление $m^n - m^l$ столбцов для матрицы ВКФ – Кронекера приводит к периодическому повторению строк m^k раз, а для ВКФ – Пэли – к k-кратному повторению каждой строки. Для ДЭФ полученные результаты не могут быть применены, так как они, как справедливо отмечено в [1], теряют смысл при $m=N$.

Задача данной работы – развитие на базе системного подхода теории спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах путем обобщения системы экспоненциальных функций и введения нового понятия сдвига дискретного сигнала, заданного на конечном интервале.

Основы теории спектрального анализа дискретных сигналов в базисе параметрических экспоненциальных функций

Пусть дискретная функция $x(n)$, $n=\overline{0,M-1}$, содержит $N(r-1)/r$ нулей, где $N/r=M$ - целое число. Представим такую дискретную функцию в виде вектора:

$$X_M=\left[x(0), x(1), ...x(M-1), \underbrace{0,...,0}_{N(r-1)/r}\right]^T. \quad (6)$$

Вычисление ДПФ X_M, согласно(1), равносильно усечению $N(r-1)/r$ столбцов матрицы F_N, т.е. превращению ее из квадратной в прямоугольную:

$$F_{N\times M}=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & . & . & (M-1) \end{array} \quad n \\ \begin{array}{c} 0 \\ . \\ (N-1) \\ k \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & W_M^{(N-1)/r} & . & . & W_M^{((N-1)/r)(M-1)} \end{array}\right] \end{array}, \quad (7)$$

$W_M=\exp(-j2\pi/M)$.

Проанализируем структуру матрицы $F_{N\times M}$.

Обозначим множество номеров строк матрицы $F_{N\times M}$ через $A: A=\{0,1,2,...,(N-1)\}$.Применим к множеству A отношение сравнимости по модулю *r*. В силу того, что это отношение является отношением эквивалентности, т.е. обладает свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности, оно разбивает множество *A* на *r* классов вычетов по модулю *r:*

$$\begin{aligned} &A_0=\{0, r, ..., r(M-1)\}, \\ &.. \\ &A_{r-1}=\{r-1, r+(r-1), ..., r(M-1)+(r-1)\} \end{aligned} \quad (8)$$

$$A_i\neq\varnothing,\ A_i\bigcap_{i\neq j}A_j=\varnothing,\ \bigcup_{i=0}^{r-1}A_i=A.$$

Используя полученное разбиение, представим матрицу $F_{N\times M}$ в виде *r* квадратных матриц, размерность каждой из которых M, а номера элементов строк являются классами вычетов по модулю *r*:

$$F_{M,\theta}=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & . & . & (M-1) \end{array} \quad n \\ \begin{array}{c} 0 \\ . \\ (M-1) \\ k \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} 1 & W_M^{\theta} & . & . & W_M^{\theta(M-1)} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & W_M^{(M-1+\theta)} & . & . & W_M^{(M-1+\theta)(M-1)} \end{array}\right] \end{array}, \quad (9)$$

где $\theta=0,1/r,...,(r-1)/r$.

Дискретные функции вида $W_N^{(p+\theta)l}=\exp\left[-j\frac{2\pi}{N}(p+\theta)l\right]$ назовем параметрическими дискретными экспоненциальными функциями (ДЭФ-П)- $def_p(p,l,\theta)$.

ДЭФ-П являются обобщением обычных ДЭФ и равны им при значении параметра θ=0. Матрица $F_{M,\theta}$ состоит соответственно из ДЭФ-П при $p=k$, $l=n$, $N=M$. Матрица $F_{M,\theta}$ - не симметрическая, в отличие от матрицы F_N (2), но является также унитарной. В дальнейшем, для удобства изложения, сигнал X_N определяется на интервале $\overline{0,N-1}$, и матрица $F_{M,\theta}$(9) обозначается через $F_{N,\theta}$.

Рассмотрим основные свойства ДЭФ-П.

1. ДЭФ-П в отличие от ДЭФ не являются функциями двух равноправных переменных p и l. Следовательно, матрица ДЭФ-П ассиметрична.

2. ДЭФ-П являются периодическими по переменной p и параметрически периодическими по переменной l с периодом N:

$$def_p(p\pm kN, l, \theta)=def_p(p,l,\theta),$$

$$def_p(p, l\pm kN, \theta)=def_p(p,l,\theta)W_N^{\pm\theta Nk}.$$

3. Система ДЭФ-П не мультипликативна по переменной p:

$$def_p(p,l,\theta)\ def_p(m,l,\theta)\neq def_p(p+m,l,\theta);$$

и мультипликативна по переменной l:

$$def_p(p,l,\theta)\ def_p(p,m,\theta)=def_p(p,l+m,\theta),\ m=\overline{0,N-1}$$

4. Среднее значение ДЭФ-П по переменной p равно нулю при $l\neq 0$;

$$\sum_{p=0}^{N-1} def_p(p,l,\theta) = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}\theta l\right)\frac{1-\exp(-j2\pi l)}{1-\exp(-j\frac{2\pi}{N}l)}$$

а по переменной l не равно нулю:

$$\sum_{l=0}^{N-1} def_p(p,l,\theta) = \frac{1-\exp[-j2\pi l(p+\theta)]}{1-\exp(-j\frac{2\pi}{N}(p+\theta))}$$

5. Система ДЭФ-П ортогональна по обеим переменным:

$$\sum_{l=0}^{N-1} W_N^{(p+\theta)l}\left[W_N^{(m+\theta)l}\right]^* = \frac{1-W_N^{-(m-p)N}}{1-W_N^{-(m-p)}} = \{N$$

при $p=m$; 0 при $p \neq m$;

$$\sum_{p=0}^{N-1} W_N^{(p+\theta)l}\left[W_N^{(p+\theta)k}\right]^* = W_N^{-\theta(k-l)}\frac{1-W_N^{-(k-l)N}}{1-W_N^{-(k-l)}} = \{N$$

при $k=l$, 0 при $k \neq l$.

6. Система ДЭФ-П является полной системой, так как число линейно независимых функций равно размерности множества дискретных сигналов.

Разложение по базисной системе ДЭФ-П назовем параметрическим дискретным преобразованием Фурье (ДПФ-П), которое в матричной форме имеет вид:

$$S_{N,\theta} = \frac{1}{N}F_{N,\theta}X_N,\ 0 \le \theta < 1, \tag{10}$$

или в обычной форме:

$$S_N(k,\theta) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{(k+\theta)n},\ \ k=\overline{0,N-1}, \tag{11}$$

Существует обратное ДПФ-П (ОДПФ-П), которое определяется следующим соотношением:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S_N(k,\theta)W_N^{-(k+\theta)n},\quad n=\overline{0,N-1},\ \ 0 \le \theta < 1. \tag{12}$$

Докажем, что (12) действительно обратное преобразование по отношению к (11). Для этого умножим левую и правую части равенства на $W^{-(k+\theta)m}$ и просуммируем результат по k:

$$\sum_{k=0}^{N-1} S_N(k,\theta)W_N^{-(k+\theta)m} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{(k+\theta)n}W_N^{-(k+\theta)m},$$

или

$$\sum_{k=0}^{N-1} S_N(k,\theta)W_N^{-(k+\theta)m} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{-\theta(m-n)m}\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-(m-n)k}.$$

С учетом ортогональности функций ДЭФ-П окончательно получим:

$$x(m) = \sum_{k=0}^{N-1} S_N(k,\theta)W_N^{-(k+\theta)m},\ m=\overline{0,N-1},$$

что совпадает с (12).

Обратное ДПФ-П в матричной форме задается следующим соотношением:

$$X_N = \overset{*}{F}_{N,\theta}S_{N,\theta},\ 0 \le \theta < 1. \tag{13}$$

Матрица сдвигов исходного сигнала X_N, в случае применения ДПФ-П, является параметрической циркулянтной матрицей [5] и определяется следующим образом:

$$C_\theta = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & . & . & . & (N-1) \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ (N-1) \end{array} & \begin{bmatrix} x(0) & x(1) & . & . & . & x(N-1) \\ x(N-1)W_N^{N\theta} & x(0) & . & . & . & x(N-2) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ x(1)W_N^{N\theta} & x(2)W_N^{N\theta} & . & . & . & x(0) \end{bmatrix} \end{array}. \tag{14}$$

Если использовать квадратную матрицу размерности N параметрического сдвига:

$$M_\theta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 1 \\ e^{-j2\pi\theta} & . & . & . & 0 \end{bmatrix}, \tag{15}$$

то выражение (14) можно представить следующим образом:

$$C_\theta = \begin{bmatrix} X_N^T M_\theta^0 \\ X_N^T M_\theta \\ . \\ X_N^T M_\theta^{N-1} \end{bmatrix}, \tag{16}$$

где M_θ^0 - единичная матрица, $M_\theta^k, k=\overline{1,N-1}$ - обозначает возведение в степень k матрицы M_θ (15).

Широкое применение стандартного ДПФ для анализа дискретных случайных сигналов во многом объясняется тем, что энергетический спектр N-периодической последовательности $x(n \pm N) = x(n);\ n=\overline{0,N-1}$ инвариантен временному сдвигу исходной последовательности. Используя метод собственных преобразований, можно показать, что ДПФ-П является собственным преобразованием параметрической циркулянтной матрицы C_θ (16)

<u>Теорема.</u> ДПФ-П является собственным преобразованием параметрической циркулянтной матрицы

$$F_{N,\theta}C_\theta F_{N,\theta}^{-1} = diagS_{N,\theta}^*,$$

где * - символ комплексного сопряжения

<u>Доказательство.</u> Обозначим через r_i корень скалярного уравнения $r^N = (-j2\pi\theta)$.

Поскольку данное уравнение имеет N различных корней, получим N собственных векторов:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ r_0 & r_1 & . & . & r_{N-1} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ r_0^{N-1} & r_1^{N-1} & . & . & r \end{bmatrix},\ \ r_i = \exp\left[-j\frac{2\pi}{N}(i+\theta)\right].$$

Учитывая, что $R = (F_{N,\theta}^T)$, получим

$$\left[R^{-1}C_\theta R\right]^* = F_N C_\theta(F_{N,\theta}^{-1}) = diagS_{N,\theta}^*,$$

<u>Следствие1.</u>

ДПФ является собственным преобразованием циркулянтной матрицы C_0:

$$F_N C_0 F_N^{-1} = diagS_N^*$$

Это следует из того, что при θ = 0 ДПФ-П является стандартным ДПФ, а параметрическая циркулянтная матрица задает циклический сдвиг последовательности $x(n),\ n=\overline{0,N-1}$.

Следствие 2.

Энергетический спектр параметрической N - периодической последовательности инвариантен к ее временному сдвигу:

$$G_N(k,\theta)=N\left|S_N(k,\theta)\right|^2,$$

где $S_N(k,\theta)$ - коэффициенты ДПФ-П параметрической N -периодической последовательности:

$$x_\theta(n)=x(n \bmod N)W_N^{\theta N\, ent[n/N]} \qquad (17)$$

где ent [.] – символ взятия целой части.

В частном случае при $\theta=1/2$ приходим к понятию N – антипериодической решетчатой функции $x_{1/2}(n+N)=-x_{1/2}(n)$.

Применение теории спектрального анализа дискретных сигналов в базисе параметрических экспоненциальных функций

Рассмотрим применение полученных результатов в практических задачах цифрового спектрального анализа.

Предварительно отметим ряд положений, которые непосредственно следуют из полученных результатов.

1. Разложение дискретного сигнала X_N в базисе параметрических экспоненциальных функций согласно соотношению (10), при каждом значении θ задает свой, определенный базис. При этом значение параметра θ может быть любым, взятым из интервала [0,1), а не только тем, которое задано в соотношении (9).

2. Сигнал X_N заданный на интервале $\overline{0,N-1}$ и дополненный нулевыми отсчетами, число которых равно $N(r-1)$, может быть представлен в виде суммы параметрических N-периодических функций:

$$x(n)=\sum_{i=0}^{r-1}x_i(n)=\sum_{i=0}^{r-1}x_\theta(n)\Bigg|_{\theta=i\frac{1}{r}}.$$

где $x_\theta(n)$ - задается формулой (17).

3. При анализе можно рассматривать и сдвиг собственно базиса ДЭФ-П матрицей параметрического сдвига (15). При этом параметрические дискретные экспоненциальные функции при любом θ «отследят» все значения экспоненциальных дискретных функций, заданных матрицей (2), размерность которой учитывает дополнение исходного сигнала X_N нулевыми отсчетами (соотношение (6)).

Рассмотрим некоторые приложения полученных результатов в практике цифровой обработки сигналов.

Цифровой спектральный анализ по экспоненциальному базису широко применяется при решении практических задач в различных областях. Так, в задачах виброакустической диагностики машин дискретное преобразование Фурье используется для выявления периодических компонент, параметры которых являются информативными признаками при определении внутреннего состояния машины [5]. Например, в задачах медицинской диагностики, при исследовании состояния больного, важным шагом является определение главной частоты биотоков мозга [6]. Отметим, что при практическом применении дискретного преобразования Фурье (ДПФ) возникает ряд характерных проблем, среди которых так называемая «паразитная» амплитудная модуляция спектра (эффект «частокола»), возникающая из-за потерь для частот, лежащих между отсчетами (потери до - 4 gБ).

На рис. 1 проиллюстрирован этот эффект. При анализе методом ДПФ гармонической компоненты, частота которой не является целой величиной (не совпадает с соответствующим отсчетом ДПФ), наблюдаются одновременно эффект «утечки» и эффект «частокола» - рис. 1 (а, в).

Как в первом, так и во втором случае для уменьшения влияния этих эффектов применяется дополнение исходного сигнала нулевыми отсчетами [7]. При этом существенно увеличивается объем вычислений и необходимый объем памяти [4,6].

Рассмотрим пример. Пусть задан гармонический сигнал с частотой 14,3 и ставится задача оценки его частоты (задача локализации спектральных пиков). Нетрудно видеть, что при использовании ДПФ, даже дополняя исходный сигнал нулевыми отсчетами, невозможно «совместить» отсчет ДПФ с частотой гармонической компоненты (т.к. увеличение интервала анализа за счет дополнения исходного сигнала нулевыми отсчетами позволяет изменять интервал между отсчетами лишь в кратное число раз). Основываясь же на изложенной в данной статье теории, задача локализации спектральных пиков решается без каких либо проблем, вариацией параметра θ (Рис. 2, а, б, в).

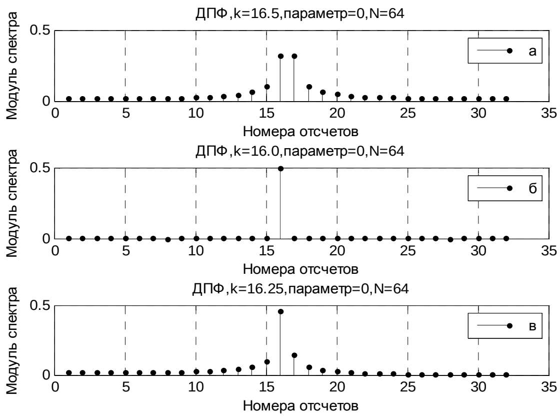

Рис. 1

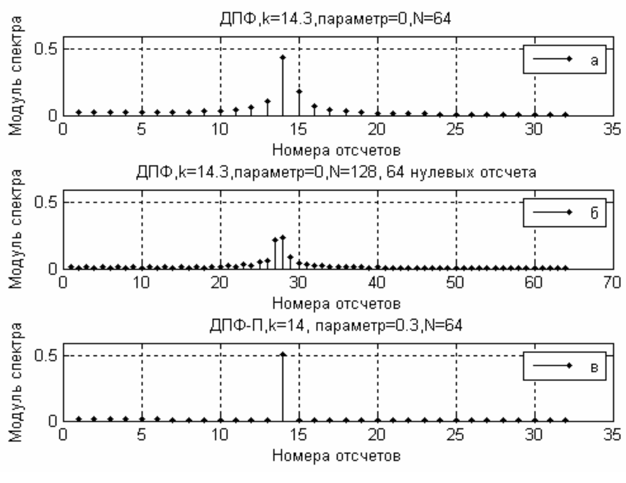

Рис.2

Еще одним приложением полученных результатов является оценка апериодической свертки дискретных сигналов [4].

В заключении отметим, что основы изложенной теории спектрального анализа дискретных сигналов, базируются на трех взаимосвязанных моментах:

- определение сигналов на конечном множестве точек;
- введение нового понятия сдвига сигнала - параметрического циклического сдвига;
- введение в качестве базисов системы дискретных параметрических экспоненциальных функций. Рассмотрены примеры применения предлагаемой теории в практических задачах цифрового спектрального анализа, которые подтверждают эффективность подхода.

Литература.

1. Трахтман А.М., Трахтман В.А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: «Сов.Радио», 1975.-208с.
2. Пойда В.Н. Спектральный анализ в дискретных ортогональных базисах. Мн., «Наука и техника», 1978.-136с.
3. Гадзиковский В.И. Теоретические основы цифровой обработки сигналов. – М.: Радио и связь. 2004.-334с.
4. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Модификация дискретного преобразования Фурье для решения задач интерполяции и свертки функций // Радиотехника и электроника. - АН СССР.-1984.-Т.29.-№ 8.-Стр.1561-1570.
5. Артоболевкий Н.Н. и др. Введение в акустическую динамику машин.- М.: Наука, 1979.
6. Gibbs F.A., Gras A.M. Frequency analysis of electroencephalograms. – Science, 1947, vol. 105, p. 132-134.
7. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов: Второе издание. Пер. с англ.-М.: ООО «Бином-Пресс», 2007 г.-656 с.-: ил.
8. Пономарева О.В. Развитие теории спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах.// Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи имени А.С. Попова. Серия: цифровая обработка сигналов и ее применение. Выпуск : 12, 1 том. М: 2010.

DEVELOPMENT OF THE THEORY OF SPECTRAL ANALYSIS OF DISCRETE SIGNALS IN A FINITE INTERVAL IN BASIS PARAMETRIC DISCRETE EXPONENTIAL FUNCTIONS

Ponomareva O.V.

This article describes a systematic manner the development of the theory of spectral analysis of discrete signals on finite intervals. The proposed theory is based on three fundamental and interrelated propositions:

- Definition signals on a finite set of points;
- - Introducing a new concept shift signal - parametric rotate;
- - Introduction as the basis of discrete parametric exponential functions.
- Examples of the proposed theory of spectral analysis for practical problems in digital signal analysis.