УДК 681.3.06

ОПИСАНИЕ СВЯЗЕЙ МЕЖДУ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ ДЕЛЬТА-ИМПУЛЬСОВ И ЧИСЛОВЫМИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ НА ОСНОВЕ СИММЕТРИЧНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Солонина А. И., *к.т.н, доц., проф., Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича, e-mail:as-io@yandex.ru.*

Устанавливаются взаимно однозначные связи между описанием взвешенных последовательностей δ-импульсов и числовых последовательностей во временной и частотной областях с привлечением симметричных рядов Фурье и на их основе выводятся основные соотношения теории ЦОС, связанные с преобразованием время-частота, включая ДПФ.

Ключевые слова: последовательность, δ-импульс, преобразование Фурье, ряд Фурье, ДПФ, симметрия, взаимосвязь.

Введение

В теории ЦОС традиционно используют последовательности δ-импульсов, которые, согласно определению δ -импульса (δ-функции), математически описываются функциями непрерывного времени (или частоты), что позволяет применять к ним классические преобразования Лапласа, Гильберта и Фурье для непрерывных функций и на их основе получать соответствующие преобразования для числовых последовательностей (в дальнейшем просто последовательностей).

При этом обычно остается за скобками вопрос, связанный с однозначностью того или иного преобразования. В статье речь пойдет о преобразовании Фурье. Приведем три типовых примера.

В [1, 3] преобразование Фурье последовательности получают на основе преобразования Фурье взвешенной последовательности δ-импульсов. В этом случае, однако, игнорируется принцип однозначности преобразования Фурье: получается, что оно соответствует двум оригиналам — последовательности δ-импульсов и последовательности, причем с последней связано взаимно однозначно. Не очевидно, почему не удается получить обратное преобразование Фурье в виде последовательности δ-импульсов.

В [3] формулу ДПФ определяют как коэффициенты Фурье взвешенных периодических последовательностей δ-импульсов. Возникает вопрос к однозначности ДПФ: оно связано взаимно однозначно с периодической последовательностью, в то время как полученные коэффициенты Фурье — с периодической последовательностью δ-импульсов (непрерывной периодической функцией времени).

В [2] утверждается, что обратное преобразование Фурье на интервале от 0 до 2π периодической последовательности δ-импульсов в частотной области (непрерывной периодической функции частоты) соответствует периодической последовательности $x(n)$ (ОДПФ):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{N}X(k)\delta\left(\hat{\omega}-k\frac{2\pi}{N}\right)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}=x(n)\cdot$$

Формально это так. Но вновь вопрос к однозначности ДПФ: периодическая последовательность $x(n)$ связана взаимно однозначно с отсчетами ДПФ $X(k)$, а какому оригиналу соответствует периодическая последовательность δ-импульсов?

Подобные примеры можно продолжать, а приводимый список литературы существенно расширить.

Постановка задачи и используемый математический аппарат

Для того чтобы разобраться в этом вопросе, поставим задачу: установить ясные, логически обоснованные связи между описаниям последовательностей δ-импульсов и последовательностей во временной и частотной областях.

Для решения это задачи можно обратиться к теории обобщенных функций, где исследуются функции, для которых не существует преобразования Фурье в обычном смысле.

В статье предлагается другой, как представляется, более простой и понятный подход, основанный на применении классического математического аппарата теории цепей:

- преобразования Фурье:

$$\begin{cases} X(j\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-j\omega t}dt; & (1)\\ x(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)\,e^{j\omega t}d\omega; & (2)\end{cases}$$

- ряда Фурье:

$$x_p(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\Delta\omega)e^{jk\Delta\omega t};$$

$$X(k\Delta\omega)=\frac{1}{T_s}\int_0^{T_s}x_p(t)e^{-jk\Delta\omega t}dt.$$

Будем использовать одновременно пару симметричных рядов Фурье для периодической функции времени и периодической функции частоты, приведенную в табл. 1. Под «симметрией» рядов Фурье понимают взаимозаменяемость независимых переменных время-частота (с инверсией знака) и соответствующих им функций, что обеспечивается при равенстве $T_s\Delta\omega=\omega_s\Delta t=2\pi$.

Таблица 1

Ряд Фурье периодической функции времени Период функции T_s Период дискретизации по частоте $\Delta\omega = 2\pi/T_s$	Ряд Фурье периодической функции частоты Период функции ω_s Период дискретизации по времени $\Delta t = 2\pi/\omega_s$
$x_p(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta\omega) e^{jk\Delta\omega t}$	$X(e^{j\omega\Delta t}) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t) e^{-jn\Delta t\omega}$
Коэффициенты Фурье	Коэффициенты Фурье
$X(k\Delta\omega) = \frac{1}{T_s}\int\limits_0^{T_s} x_p(t) e^{-jk\Delta\omega t} dt$	$x(n\Delta t) = \frac{1}{\omega_s}\int\limits_0^{\omega_s} X(e^{j\omega\Delta t}) e^{jn\Delta t\omega}\, d\omega$

Таблица 2

Ряд Фурье периодической функции времени Период функции $T_s = NT$ Период дискретизации по частоте $\Delta\omega = 2\pi/T_s$	Ряд Фурье периодической функции частоты Период функции $\omega_s = 2\pi/T$ Период дискретизации по времени $\Delta t = T$
$x_p(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} X\left(k\frac{2\pi}{T_s}\right) e^{jk\frac{2\pi}{T_s}t}$ (3)	$X(e^{j\omega T}) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j\omega nT}$ (5)
Коэффициенты Фурье	Коэффициенты Фурье
$X\left(k\frac{2\pi}{T_s}\right) = \frac{1}{T_s}\int\limits_0^{T_s} x_p(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T_s}t} dt$ (4)	$x(nT) = \frac{T}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/T} X(e^{j\omega T}) e^{j\omega nT}\, d\omega$ (6)

В табл. 2 представлена пара симметричных рядов Фурье с интересующими нас конкретными значениями периодов функций и периодов дискретизации при соблюдении равенства $T_s\Delta\omega = \omega_s\Delta t = 2\pi$.

Периодические последовательности δ-импульсов

Сначала рассмотрим взвешенные периодические последовательности δ-импульсов.

Будем одновременно исследовать пару периодических последовательностей δ-импульсов с весовыми функциями, соответствующими периодическим функциям симметричных рядов Фурье, а именно:

- периодическую последовательность δ-импульсов с весовой функцией $x_p(t)$ (3) (см. (9) в табл. 3):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p(t)\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p(nT)\delta(t-nT)\,; \qquad (7)$$

- периодическую последовательность δ-импульсов с весовой функцией $X(e^{j\omega T})$ (5) (см. (13) в табл. 3):

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(e^{j\omega T})\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T_s}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T_s}\right). \qquad (8)$$

Синхронно применим к ним один и тот же математический аппарат: преобразование Фурье и представление в виде симметричных рядов Фурье, и для наглядности результаты будем сводить в единую таблицу (см. табл. 3).

Применим преобразование Фурье (1)—(2):

- прямое (1) — к последовательности δ-импульсов (7) (результат (10) см. в табл. 3);
- обратное (2) — к последовательности δ-импульсов (8) (результат (14) см. в табл. 3).

В обоих случаях результатом преобразования Фурье (10) и (14) оказались абсолютно расходящиеся ряды, вследствие периодичности своих коэффициентов.

Таблица 3

	Временная область	Частотная область
1	$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x_p(nT)\delta(t-nT)$ (9)	Прямое преобразование Фурье $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x_p(nT) e^{-j\omega nT}$ (10)
2	Ряд Фурье $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} X\left(k\frac{2\pi}{T_s}\right) e^{jk\frac{2\pi}{T_s}t}$ (11)	Коэффициенты Фурье $X\left(k\frac{2\pi}{T_s}\right) = \frac{1}{T_s}\sum\limits_{n=0}^{N-1} x_p(nT) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{T_s} X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)$ (12)

	Частотная область	Временная область
3	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T_s}\right)$ (13)	Обратное преобразование Фурье $\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)e^{jk\frac{2\pi}{T_s}t}$ (14)
4	Ряд Фурье $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j\omega nT}$ (15)	Коэффициенты Фурье $x(nT) = \frac{T}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1} X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{T_s}{2\pi}x_p(nT)$ (16)

При этом ряд (10) в области абсолютной сходимости представляет собой усеченный ряд Фурье (5):

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-j\omega nT}, \qquad (17),$$

известный как преобразование Фурье конечной последовательности (одного периода периодической последовательности: $x(nT) = x_p(nT)$, $0 \le n \le (N-1)$), а его коэффициенты Фурье (10) — как обратное преобразование Фурье:

$$x(nT) = \frac{T}{2\pi}\int_0^{2\pi/T} X(e^{j\omega T})e^{j\omega nT}\, d\omega. \qquad (18)$$

Абсолютно расходящемуся ряду (10), согласно свойству преобразования Фурье (умножение на экспоненту), во временной области соответствует бесконечная сумма периодических последовательностей:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p(nT)e^{-j\omega nT} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega mNT}\left[\sum_{n=0}^{N-1} x_p(nT)e^{-j\omega nT}\right] =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(e^{j\omega T})e^{-j\omega mNT} \to \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_p(nT + mNT).$$

Это значит, что каждой точке nT соответствует бесконечная сумма одинаковых значений:

$$\ldots + x_p(nT) + x_p(nT + NT) + x_p(nT + 2NT) + \ldots,$$

которая может трактоваться как δ-импульс $x_p(nT)\text{д}(t - nT)$, а бесконечная сумма (10) — как последовательность δ-импульсов (9).

Представим периодические последовательности δ-импульсов в виде симметричных рядов Фурье (3) и (5), а именно:

- последовательность δ-импульсов (7) — в виде ряда Фурье (3) непрерывной периодической функции времени (см. ряд (11) в табл. 3);

- последовательность δ-импульсов (8) — в виде ряда Фурье (5) непрерывной периодической функции частоты (см. ряд (15) в табл. 3);

Определим коэффициенты симметричных рядов Фурье (3) и (5):

- ряда (3) (см. (12) в табл. 3):

$$X\left(k\frac{2\pi}{T_s}\right) = \frac{1}{T_s}\int_0^{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p(nT)\delta(t - nT)e^{-jk\frac{2\pi}{T_s}t}\,dt = \frac{1}{T_s}\sum_{n=0}^{N-1} x_p(nT)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk},$$

т. к., согласно определению δ-функции:

$$\int_0^{NT}\delta(t - nT)dt = \begin{cases}1, & 0 \le n \le (N-1);\\ 0, & \text{иначе;}\end{cases}$$

- ряда (5) (см. (16) в табл. 3):

$$x(nT) = \frac{T}{2\pi}\int_0^{2\pi/T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T_s}\right)e^{j\omega nT}d\omega = ,$$

$$= \frac{T}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1} X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

т. к., согласно определению δ-функции:

$$\int_0^{2\pi/T}\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T_s}\right)d\omega = \begin{cases}1, & 0 \le k \le (N-1);\\ 0, & \textit{иначе.}\end{cases}$$

Вследствие периодичности экспоненты и по n, и по k, коэффициенты Фурье (12), (16) оказались периодическими, а потому ряды (11) и (15) — абсолютно расходящимися.

В частном случае, если последовательности δ-импульсов невзвешенные, вычислив коэффициенты Фурье, легко получить пары симметричных абсолютно расходящихся рядов, которые в литературе, тем не менее, называют рядами Фурье последовательностей δ-импульсов (табл. 4).

Таблица 4

Ряд Фурье периодической функции времени	Ряд Фурье периодической функции частоты
$T_s = T$; $\Delta\omega = 2\pi/T$	$\omega_s = 2\pi/T$; $\Delta t = T$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$ (19)	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right) = \frac{T}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega nT}$
Ряд Фурье периодической функции времени $T_s = NT$; $\Delta\omega = 2\pi/T_s$	Ряд Фурье периодической функции частоты $\omega_s = 2\pi/T_s$; $\Delta t = T_s$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT_s) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\frac{2\pi}{T_s}t}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T_s}\right) = \frac{T_s}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega nT_s}$ (20)

Проанализируем полученные результаты (см. табл. 3) на предмет установления искомых взаимосвязей между последовательностями δ-импульсов и последовательностями.

Сравнивая преобразование Фурье (10) с коэффициентами Фурье (12), видим их связь:

$$X\left(k\frac{2\pi}{T_s}\right)=X(e^{j\omega T})\Big|_{\omega=k\frac{2\pi}{NT}}=X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right), \qquad (21)$$

В области абсолютной сходимости ряд (11), с учетом (21), представляет собой усеченный ряд Фурье (3) периодической функции времени с финитным спектром (одним периодом коэффициентов Фурье (12)):

$$x_p(t)=\frac{1}{T_s}\sum_{k=0}^{N-1}X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)e^{jk\frac{2\pi}{T_s}t}.$$

Коэффициенты Фурье (12) связаны взаимно однозначно (с точностью до множителя $T_s/2\text{p}$) с коэффициентами ряда (14), а значит, между последовательностями δ-импульсов (9) и (13) существует однозначная взаимосвязь:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_p(nT)\delta(t-nT)\leftrightarrow\frac{2\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T_s}\right). \qquad (22)$$

Отсюда следует, что и коэффициенты ряда (10) должны совпадать с коэффициентами Фурье ряда (15) с точностью до множителя $T_s/2\text{p}$, что отображается равенством в (16).

Пара коэффициентов Фурье (12) и (16) (с учетом множителя $T_s/2\text{p}$), записанная в шкале дискретного нормированного времени n, представляет собой не что иное как ДПФ, связывающее взаимно однозначно периодические последовательности во временной и частотной областях:

$$\begin{cases} X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)=\sum\limits_{n=0}^{N-1}x_p(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}; \\ x_p(n)=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1}X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \end{cases}$$

причем постоянный множитель $1/N$ автоматически располагается в ОДПФ, что согласуется с непрерывным случаем (1)—(2):

Использование ряда (19) для последовательности δ-импульсов (7) и свойства преобразования Фурье (умножение на экспоненту) позволяет установить соответствие (во избежание путаницы индекс суммы n принято заменять на m):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_p(t)\delta(t-nT)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_p(t)e^{jk\frac{2\pi}{T}t}\to\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}X\left(k\frac{T_s}{2\pi}-m\frac{T}{2\pi}\right),$$

а его сравнение с коэффициентами Фурье (12) — получить связь между периодическими коэффициентами Фурье (12) последовательности δ-импульсов и непериодическими коэффициентами ряда Фурье (4) непрерывной периодической функции времени (в шкале дискретной нормированной частоты *k*, нормируя к $\Delta\omega=2\pi/T_s$):

$$X\left(e^{j\frac{2\text{p}}{N}k}\right)=N\sum_{m=-\infty}^{\infty}X\left(k-mN\right),$$

известную как связь ДПФ со спектром периодического аналогового сигнала.

Использование ряда (20) для последовательности δ-импульсов (8) и свойства преобразования Фурье (умножение на экспоненту) позволяет установить соответствие (во избежание путаницы индекс суммы k принято заменять на m):

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(e^{j\omega T})\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T_s}\right)=$$

$$=\frac{T_s}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(e^{j\omega T})e^{-j\omega nT_s}\to\frac{T_s}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(nT-mT_s)$$

а его сравнение с коэффициентами Фурье (16) — получить связь между периодическими коэффициентами Фурье (16) последовательности δ-импульсов и непериодическими коэффициентами Фурье (6) непрерывной периодической функции частоты (в шкале дискретного нормированного времени *n*):

$$x_p(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(n-mN),$$

известную как связь периодической последовательности с конечной последовательностью, периодически продолженной.

Непериодическая последовательность δ-импульсов

Перейдем к рассмотрению непериодической взвешенной последовательности δ-импульсов (она дублируется с номерами (24) и (26) в табл. 5):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT). \qquad (23)$$

В первой и второй строках табл. 5 приведены результаты преобразований, подобные выполненным ранее, и не требующие комментариев.

Таблица 5

	Временная область	Частотная область
1	$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)$ (24)	Прямое преобразование Фурье $X(e^{j\omega T})=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)e^{-j\omega nT}$ (25)
2	Согласно (19) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-nT)=\frac{1}{T}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}x(t)e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$ (26)	Умножение на экспоненту $\to$ сдвиг по частоте (индекс суммы *k* заменен на *m*) $\frac{1}{T}\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}X\left[j\left(\omega-m\frac{2\pi}{T}\right)\right]$ (27)

	Частотная область	Временная область
3	$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T_s}\right) \quad (28)$$	Обратное преобразование Фурье $$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)e^{jk\frac{2\pi}{T_s}t} \quad (29)$$
4	Ряд Фурье $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(nT)e^{-j\omega nT} \quad (30)$$	Коэффициенты Фурье $$\tilde{x}(nT) = \frac{T}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (31)$$

Сравнивая (25) с (27), получаем связь спектральных плотностей дискретного и аналогового сигналов:

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} X\left[j\left(\omega - m\frac{2\pi}{T}\right)\right]. \quad (32)$$

Согласно (32), в общем случае, спектральная плотность $X(j\omega)$, вследствие элайсинга, необратимо искажается, поэтому точное восстановление функции $x(t)$, ее отсчетов $x(nT)$ и последовательности δ-импульсов (24) невозможно.

Следовательно, ряд Фурье (25), полученный в результате формального применения преобразования Фурье к последовательности δ-импульсов (24), в действительности ее преобразованием Фурье не является.

В области абсолютной сходимости, при $x(nT)\big|_{nT<0} = 0$, ряд Фурье (25) известен как преобразование Фурье бесконечной последовательности:

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-j\omega nT}, \quad (33)$$

а его коэффициенты Фурье (18) — как обратное преобразование Фурье.

Согласно (32), в частотной области последовательности δ-импульсов (23) логично поставить в соответствие периодическую последовательность δ-импульсов (см. (28) в табл. 5):

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}(e^{j\omega T})\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T_s}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T_s}\right), \quad (34)$$

где тильда поставлена во избежание путаницы с последовательностью δ-импульсов (13) в табл. 3 в отсутствии элайсинга. Соотношения (29)—(31) в табл. 5 подобны соотношениям (14) и (16) в табл. 3.

Если последовательность $x(nT)$ в (33) является произвольной, то абсолютная сходимость ряда (25) гарантируется только для конечной последовательности — одного периода периодической последовательности (см. (17)). Именно этот случай представляет практический интерес.

Вместе с тем, как сказано выше, точное восстановление последовательности $x(nT)$ гарантируется только в отсутствии элайсинга, т. е. при финитной, периодически повторяющейся последовательности в частотной области, когда в рассматриваемой последовательности δ-импульсов (34) будет иметь место равенство

$$\tilde{X}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) = X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)$$ (см. табл. 3).

Таким образом, установить взаимно однозначные связи возможно только, переходя к периодическим последовательностям δ-импульсов, рассмотренным в табл. 3.

Заключение

Поставленная задача решена. Новый подход с привлечением симметричных рядов Фурье позволил:

- установить ясные, логически обоснованные взаимосвязи между периодическими последовательностями δ-импульсов и последовательностями во временной и частотной областях;
- автоматически получить основные соотношения теории ЦОС для последовательностей, связанные с их преобразованием время-частота, включая ДПФ.

Литература

1. Антонью А. Цифровые фильтры: анализ и проектирование. — М.: Радио и связь, 1983.
2. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. — М.: Техносфера, 2006.
3. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов, 2-е изд. — СПб.: ПИТЕР, 2006.
4. Oppenheim A, Willsky A. Signals and Systems, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1997.

DESCRIPTION OF RELATIONS BETWEEN DELTA-PULSE AND NUMERIC SEQUENCES BASED ON SYMMETRIC FOURIER SERIES

Alla I. Solonina, ***Saint-Petersburg State University of Telecommunications***

It is proposed relations between descriptions of weighted delta-pulse sequences and numeric sequences (sequences) in time and frequency domains based on the symmetric Fourier series. On their ground the basic formulas of the DSP theory connected to the transform time-frequency including DFT are made.