

УДК 621.396

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА ЛЕВИНСОНА ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА ПРЯМОЙ ОЦЕНКИ ДАННЫХ В РАДИОМОДЕМАХ

*Султанов Б.В., д.т.н., профессор кафедры ИБСТ Пензенского государственного университета (ПГУ),
bv.sultanov@mail.ru*

Шутов С.Л., с.н.с. ПГУ, sshutov58@mail.ru

Румянцева Н.Б., студентка ПГУ

Зефиоров С.Л., к.т.н., доцент, зав. кафедрой ИБСТ ПГУ, ibst@pnzgu.ru

Щербаков М.А., д.т.н., профессор, проректор по научной работе ПГУ, mash@sura.ru

Ключевые слова: алгоритм, оценка данных, метод, радиомодем, символ, передача, фрейм, система линейных уравнений, теплицева матрица.

Введение

В ряде практических задач цифровой обработки сигналов, например, таких как линейное предсказание и адаптивная фильтрация [1], спектральный анализ [2], оценивание параметров канала и сигналов [3], помехоустойчивое кодирование [4] и др. возникает проблема решения систем линейных уравнений высокого порядка, сводимых к матричному уравнению вида

$$Af = g, \quad (1)$$

где A представляет собой теплицевую матрицу (т.е. матрицу, у которой элементы, расположенные параллельно главной диагонали, являются одинаковыми) размером $n \times n$;

f и g – векторы-столбцы с компонентами f_i и g_i , $i \in \overline{0, n-1}$.

Стандартные методы решения уравнения (1), разработанные для матриц общего вида, как прямые (метод Гаусса, метод Холецкого и др.), так и итерационные (метод Зейделя и др.) имеют высокую вычислительную сложность, пропорциональную числу n^3 операций с плавающей точкой, т.е. порядка $O(n^3)$. При этом специфические свойства теплицевой матрицы, а так же определенные виды её симметрии, возникающие вследствие особенностей конкретных практических приложений, делают возможным разработку более эффективных методов решения данной задачи с существенно меньшей вычислительной сложностью.

Один из первых наиболее известных методов решения матричного уравнения (1) с симметричной теплицевой матрицей с вычислительной сложностью $O(n^2)$ является метод Левинсона [2,4]. В дальнейшем были разработаны другие быстрые (характеризующиеся вычислительной сложностью порядка $O(n^2)$) алгоритмы, позволяющие решать как частные (метод Левинсона-Дурбина [1,4,5], предполагающий, что последний столбец матрицы A в (1) совпадает с записанным в обратном порядке вектором g), так и более общие (метод Тренча [4], не требующий симметричности матрицы A) задачи. К настоящему времени предложен ряд супербыстрых алгоритмов [6], позволяющих решать уравнение (1) в общем случае с вычислительной сложностью меньшей $O(n^2)$. Вместе с

Рассмотрены особенности использования алгоритма Левинсона в задаче многократного решения матричного уравнения высокого порядка, возникающей при реализации метода прямой оценки данных в последовательных радиомодемах, предназначенных для работы в КВ диапазоне частот, и предложены решения, позволяющие существенно сократить её вычислительную сложность.

тем существует важное практическое приложение, в котором, в силу его специфики, применение алгоритма Левинсона с учетом возникающих при этом особенностей, по-прежнему, остаётся привлекательным. Таким приложением является метод прямой (непосредственной) оценки данных в последовательных радиомодемах, предназначенных для работы в коротковолновом диапазоне частот [3] (в дальнейшем так называемых КВ-модемах). В настоящей статье анализируются особенности использования алгоритма Левинсона применительно к данной задаче, формулируются и обосновываются предложения, позволяющие повысить вычислительную эффективность её решения.

Метод прямой (непосредственной) оценки данных

Метод непосредственной оценки данных в настоящее время является одним из наиболее эффективных подходов к построению последовательных КВ-модемов и обеспечивает возможность получения относительно высоких скоростей передачи данных при наличии фединга и многолучёвости. Достаточно сказать, что стандарты НАТО, определяющие технические характеристики модемов данного класса, регламентируя структуру передаваемого сигнала, предполагают использование именно этого метода [7,8]. Данная структура базируется на использовании многократной фазовой или квадратурно-амплитудной модуляции и объединении модулированных символов данных в так называемые блоки решения (decision blocks). Как показано на рис. 1, блок решения содержит транспонированные (с индексом T): вектор $A_1^T = [a_0, a_1, \dots, a_{N-1}]$, компонентами которого являются N известных символов; вектор $B_1^T = [b_0, b_1, \dots, b_{M-1}]$, включающий M неизвестных символов, и вектор $A_2^T = [a_N, a_{N+1}, \dots, a_{2N-1}]$, состоящий из N известных символов. Сигнал передаётся в виде последовательных фреймов, каждый из которых включает обучающий и информационный блоки, состоящие соответственно из N известных и M неизвестных символов.

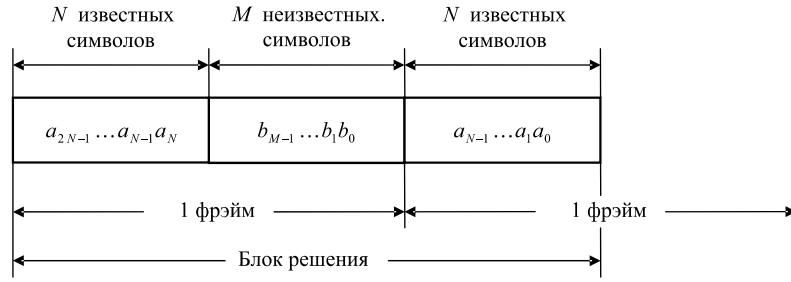


Рис.1

Рассматривая в качестве модели канала нерекурсивный фильтр с импульсной характеристикой, содержащей $L+1$ ненулевых отсчетов ($L \leq N$) и описываемой вектором $h^T = [h_L, h_{L-1}, \dots, h_0]$, в предположении постоянства h^T на интервале следования символов блока решения, вектор отсчетов выходного сигнала канала r , обусловленных воздействием входных символов a_i и b_i (т.е. не включающий отсчеты, являющиеся реакцией только на обучающие символы a_i), можно определить выражением:

$$r^T = M_1 B + M_2 A_3 + M_3 A_4 + n^T, \quad (2)$$

где M_1 , M_2 , M_3 – матрицы размера $(M+L) \times M$, $(M+L) \times L$ и $(M+L) \times L$ соответственно вида

$$M_1 = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 & 0 \\ \vdots & h_1 & \vdots & 0 \\ h_L & \vdots & h_0 & \\ 0 & h_L & h_1 & \\ 0 & 0 & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & h_L \end{bmatrix}; \quad M_2 = \begin{bmatrix} h_L & h_{L-1} & \dots & h_1 \\ 0 & h_L & \dots & h_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_L \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}; \quad (3)$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{L-1} & h_{L-2} & h_{L-3} & \dots & h_0 \end{bmatrix};$$

$$A_3^T = [a_{N-L}, a_{N-L-1}, \dots, a_{N-1}]; \quad A_4^T = [a_N, a_{N+1}, \dots, a_{N+L-1}];$$

$n = [n_{N-L}, n_{N-L+1}, \dots, n_{M+N-1}]$ – вектор отсчетов

аддитивного шума.

После того, как будет накоплен набор выходных символов канала, входящих в состав блока решения, и с использованием известных значений обучающих символов тем или иным способом получена оценка канальной импульсной характеристики h^T , которая в соответствии с (3) однозначно определяет матрицы M_1 , M_2 и M_3 , на основании (2) с учетом (3) можно определить вектор C

$$C = r^T - M_2 A_3 - M_3 A_4 = M_1 B + n^T. \quad (4)$$

Минимизация по отношению к оценке \hat{B} вектора переданных данных B среднеквадратической ошибки, определяемой как

$$\varepsilon^2 = (M_1 \hat{B} - C)^H (M_1 \hat{B} - C),$$

где индекс « H » означает эрмитово сопряжение матрицы (включающее транспонирование и комплексное сопряжение), приводит к результату [3]:

$$\hat{B} = \left(M_1^H M_1 \right)^{-1} M_1^H C. \quad (5)$$

Однако вычисление величины \hat{B} непосредственно по формуле (5) предполагает выполнение чрезвычайно трудоёмкой (особенно при больших значениях M , порядка нескольких сотен) процедуры обращения комплексно-сопряженной по отношению к R_M матрицы

$$R_M^* = M_1^H \cdot M_1, \quad (6)$$

При этом задаваемое выражением (5) значение \hat{B} является решением матричного уравнения, аналогичного (1) и имеющего вид:

$$R_M^* \cdot \hat{B}_M^T = G_M^T,$$

где $G_M = M_1^H \cdot C$.

Подставив M_1 из (3) в (6), получим:

$$R_M = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{M-1} \\ \gamma_1^* & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_{M-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{M-1}^* & \gamma_{M-2}^* & \gamma_{M-3}^* & \dots & \gamma_0 \end{bmatrix},$$

где

$$\gamma_0 = \sum_{i=0}^L |h_i|^2; \quad \gamma_1 = \sum_{i=0}^{L-1} h_{i+1} h_i^*; \quad \dots; \quad \gamma_L = h_L h_0^*; \quad \gamma_t = 0 \text{ для } t > L. \quad (7)$$

Таким образом, матрица R_M является эрмитовой, теплолицевой. Также можно показать, что она положительно определена. Кроме того, данная матрица является ленточной с шириной $2L-1$ (т.е. $(2L-1)$ -диагональной [7]), поскольку в соответствии с (7) её элементы с индексами, превышающими значение L , являются нулевыми.

Как показано в [3], при реализации рассмотренного метода получения вектора оценки \hat{B} переданных данных, вследствие влияния межсимвольной интерференции, дисперсия различных его компонент $\hat{b}_0, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_{M-1}$ является неодинаковой и минимальна для крайних составляющих \hat{b}_0 и \hat{b}_{M-1} . Данное обстоятельство делает целесообразной реализацию поэтапной оценки блока переданных данных. На каждом из этапов описанным выше способом определяется вектор \hat{B} , однако окончательное решение о значениях переданных символов принимается лишь относительно двух крайних компонент. Принятые решения приписываются к блокам известных символов A_3 и A_4 , увеличивая размерность каждого из них на 1, а размерность оцениваемого блока B при этом сокращается на 2. Затем соответствующим образом пересчитываются входящие в

уравнение (5) матрицы R_{M-2} и G_{M-2} , и оно вновь решается относительно вектора уменьшенной размерности \widehat{B}_{M-2} . Данная процедура повторяется $M/2$ раз до тех пор, пока не будут получены все максимально достоверные оценки $\widehat{b}_0, \widehat{b}_1, \dots, \widehat{b}_{M-1}$.

Рассмотренный метод называется методом нелинейной непосредственной оценки данных (Nonlinear-Data-Directed-Estimator (NDDE))[3]. Позволяя обеспечить высокую помехоустойчивость, он характеризуется большой вычислительной сложностью, причём основные реализационные проблемы связаны с необходимостью многократного решения уравнения (5). Однако отмеченные выше особенности матрицы R_M позволяют существенно сократить ожидаемые вычислительные затраты, эффективно применив в данных условиях «несупербыстрый» алгоритм Левинсона.

Алгоритм Левинсона для решения систем линейных уравнений с теплицевой эрмитовой матрицей

Следуя методике, приведённой в [4] (где этот алгоритм рассмотрен в поле действительных чисел), получим соотношения, определяющие алгоритм Левинсона для решения уравнения (1), в котором матрица A является эрмитовой теплицевой. При этом оно принимает вид:

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1^* & a_2^* & \dots & a_{n-2}^* & | & a_{n-1}^* \\ a_1 & a_0 & a_1^* & \dots & a_{n-3}^* & | & a_{n-2}^* \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & a_{n-4}^* & | & a_{n-3}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & | & \vdots \\ a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & \dots & a_0 & | & a_1^* \\ - & - & - & - & - & - & - \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_1 & | & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0^{(n)} \\ f_1^{(n)} \\ f_2^{(n)} \\ \vdots \\ f_{n-2}^{(n)} \\ - \\ f_{n-1}^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-2} \\ - \\ g_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Разделение матрицы и векторов на блоки здесь сделано для того, чтобы проиллюстрировать сущность метода окаймливания [2], заложенного в основу рассматриваемого итеративного алгоритма. На r -й итерации ($1 \leq r \leq n$) вычисляется решение r -го усечения задачи (описываемого соотношением (8) при $n = r$; верхний индекс у составляющих вектора-столбца $f^{(r)}$ характеризует номер итерации), причём это вычисление основывается на использовании полученного на предыдущей итерации ($r-1$ -го усечения). Алгоритм Левинсона при начальном условии $a_0 \cdot f_0^{(0)} = g_0$ рекурсивно модернизирует $f^{(r)}$ таким образом, чтобы $f^{(n)}$ равнялся решению исходной задачи.

Помимо вектора $f^{(n)}$ в итерациях участвуют несколько рабочих переменных: скалярные переменные α_r, β_r и γ_r и вектор $t^{(r)}$, содержащий r компонент: $t^{(r)T} = [t_0^{(r)}, t_1^{(r)}, \dots, t_{r-1}^{(r)}]$. Эти переменные выбираются так, чтобы на r -м шаге выполнялись следующие матричные равенства:

$$A_r \cdot t^{(r)} = \begin{bmatrix} \alpha_r \\ 0_{r-1} \end{bmatrix}; \quad (9)$$

$$A_{r+1} \cdot \begin{bmatrix} f_0^{(r)} \\ \vdots \\ f_{r-1}^{(r)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_{r-1} \\ \gamma_r \end{bmatrix}; \quad (10)$$

$$A_{r+1} \cdot \begin{bmatrix} t^{(r)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_r \\ 0_{r-1} \\ \beta_r \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где $A_r = \begin{bmatrix} a_0 & a_1^* & \dots & a_{r-1}^* \\ a_1 & a_0 & \dots & a_{r-2}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r-1} & a_{r-2} & \dots & a_0 \end{bmatrix}$; 0_{r-1} – вектор столбец,

содержащий $(r-1)$ нулей.

Используя обменную матрицу

$$J_r = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{размера } r \times r)$$

и последующее комплексное сопряжение, соотношение (10) можно записать в виде:

$$[J_r A_r J]^* \cdot [J_r t^{(r)}]^* = \left[J_r \begin{bmatrix} \alpha_r \\ 0_{r-1} \end{bmatrix} \right]^*. \quad (12)$$

Поскольку $J_r A_r J_r = A_r^*$, из (12) следует:

$$A_r \cdot \begin{bmatrix} t_{r-1}^{*(r)} \\ t_{r-2}^{*(r)} \\ \vdots \\ t_0^{*(r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{r-1} \\ \alpha_r^* \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Аналогичное преобразование соотношения (11) приводит к результату:

$$A_{r+1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ t_{r-1}^{(r)} \\ \vdots \\ t_1^{(r)} \\ t_0^{(r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_r^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_r^* \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Положим, что на $(r+1)$ -й итерации векторы $t^{(r+1)}$ и $f^{(r+1)}$ можно определить как

$$\begin{bmatrix} t_0^{(r+1)} \\ \vdots \\ t_{r-1}^{(r+1)} \\ t_r^{(r+1)} \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} t_0^{(r)} \\ \vdots \\ t_{r-1}^{(r)} \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ t_{r-1}^{*(r)} \\ \vdots \\ t_1^{*(r)} \\ t_0^{*(r)} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\text{и} \quad \begin{bmatrix} f_0^{(r+1)} \\ \vdots \\ f_{r-1}^{(r+1)} \\ f_r^{(r+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0^{(r)} \\ \vdots \\ f_{r-1}^{(r)} \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 \\ t_r^{*(r+1)} \\ \vdots \\ t_1^{*(r+1)} \\ t_0^{*(r+1)} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

где k_1, k_2 и k_3 – подлежащие дальнейшему вычислению коэффициенты.

Умножив обе части равенства (15) на A_{r+1} и приняв во внимание соотношения (9), (11), (14), получим:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{r+1} \\ 0_r \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} \alpha_r \\ 0_r \\ \beta_r \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} \beta_r^* \\ 0_r \\ \alpha_r^* \end{bmatrix}, \quad (17)$$

откуда следует, что k_1 и k_2 должны выбираться так, чтобы выполнялись равенства

$$0 = k_1 \beta_r + k_2 \alpha_r^*; \quad (18)$$

$$\alpha_{r+1} = k_1 \alpha_r + k_2 \beta_r^*. \quad (19)$$

Умножив обе части соотношения (16) на A_{r+1} с учетом равенств (8) (при $n = r$), (10) и (13) (с заменой r на $r + 1$), получим выражение, завершающее $(r + 1)$ -ю итерацию:

$$\begin{bmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_{r-1} \\ g_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_{r-1} \\ \gamma_r \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0_r \\ \alpha_{r+1}^* \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Для выполнения (20) необходимо, чтобы k_3 выбиралось из условия

$$g_r = \gamma_r + k_3 \alpha_{r+1}^*.$$

Таким образом,

$$k_3 = (g_r - \gamma_r) / \alpha_{r+1}^*. \quad (21)$$

Выражение (18) устанавливает соотношение между коэффициентами k_1 и k_2 , но не даёт основания для их однозначного выбора. В работе [4] предлагается принять $k_1 = \alpha_r^*$ (в [4] рассматривается не эрмитова, а симметричная действительная теплицева матрица A и там предлагается выбрать $k_1 = \alpha_r$, поскольку знак сопряжения в аналоге соотношения (18) отсутствует). Тогда в соответствии с (18) $k_2 = -\beta_r$ и на основании (19)

$$\alpha_{r+1} = |\alpha_r|^2 - |\beta_r|^2. \quad (22)$$

Однако такой выбор коэффициентов k_1 и k_2 является неудачным, поскольку при решении систем уравнений высокого порядка (при $n > 10$) приводит к появлению в процессе выполнения итераций экстремально больших или малых (выходящих, например, даже за пределы представимых в универсальном компьютере максимальных и минимальных по модулю чисел) значений α_r , β_r , $t_i^{(r)}$ и k_3 . В зависимости от вида матрицы A , при вытекающем из (11) соотношении

$$\beta_r = \sum_{i=1}^r a_i \cdot t_{r-i}^{(r)}$$

и соответствующем (15) правиле $t_i^{(r+1)} = \alpha_r^* t_i^{(r)} - \beta_r t_{r-i}^{(r)}$, вычисление по формуле (22) последующих значений α_{r+1} приводит к их экспоненциальному росту или уменьшению (в зависимости от задаваемого значением a_0 начального условия) параметра α_r . В ту же сторону и с такой же скоростью изменяются β_r и компоненты вектора t_r , а значение k_3 в соответствии с (21) изменяется аналогичным образом в обратном направлении. В результате при больших n алгоритм становится практически неработоспособным.

Ситуация меняется, если в (18) положить $k_1 = 1$. В этом случае

$$k_2 = -\beta_r / \alpha_r^*, \quad (23)$$

и в соответствии с (17)

$$\alpha_{r+1} = \alpha_r - |\beta_r|^2 / \alpha_r^*. \quad (24)$$

Отметим, что при начальном условии $\alpha_1 = 1$ все последующие, вычисляемые по формуле (24), значения α_r являются действительными и

$$\alpha_r^* = \alpha_r. \quad (25)$$

Выражения (11), (10), (15), (16), (21), (23), (25) и определяют алгоритм Левинсона, изображенный в виде блок-схемы, представленной на рис. 2.

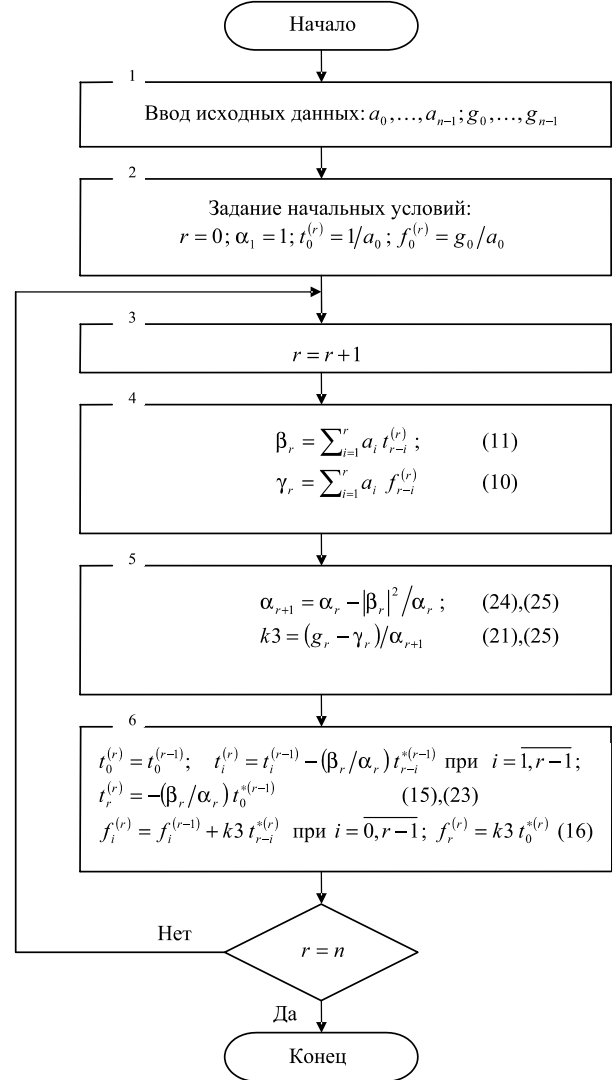


Рис. 2

Особенности использования алгоритма Левинсона при реализации метода нелинейной непосредственной оценки данных NDDE

Как отмечалось выше, возникающая при реализации метода NDDE необходимость многократного решения матричного уравнения (5) обуславливает высокую вычислительную сложность данной задачи. Однако её специфика и некоторые свойства рассмотренного алгоритма Левинсона обеспечивают возможности существенного повышения эффективности вычислений.

Одна из таких возможностей заключается в следующем. Как видно из уравнений (11), (15), (23) и (24), при решении матричного уравнения (1) методом Левинсона все промежуточные значения компонент вектора $t^{(r)}$, а также скалярных величин α_r и β_r полностью определяются элементами матрицы A и не зависят от вектора

g , представляющего правую часть (1). При этом отмеченные выше особенности матрицы R_m , фигурирующей в уравнении (5), приводят к тому, что при осуществляемом в методе NDDE сокращении её размера путем удаления верхней и нижней строк и правого и левого боковых столбцов и последующем решении уравнения (5) меньшей размерности, получаемые в ходе выполнения итераций Левинсона значения $t^{(r)}$, α_r и β_r оказываются точно такими же, как и их одноимённые аналоги, полученные в ходе выполнения тех же итераций на предыдущем этапе (уменьшается лишь их количество, что связано с уменьшением общего числа итераций на данном этапе). Таким образом, при реализации метода NDDE полный объём вычислений, предусматриваемый алгоритмом, изображенным на рис.2, необходимо осуществить лишь на первом этапе, когда матрица R_m имеет максимальный размер. При этом все значения компонент вектора $t^{(r)}$ и переменных α_r и β_r , получаемые в ходе промежуточных итераций, следует занести в память вычислителя с тем, чтобы использовать их при выполнении последующих $(M/2 - 1)$ этапов. В результате на этих этапах при каждом новом решении уравнения (5) уменьшенной размерности в процессе выполнения итераций Левинсона необходимо заново вычислять лишь γ_r (формула (10)), k_3 (формула 21) и компоненты вектора решения $f^{(r)}$ (формула (16)), что значительно снижает общую вычислительную сложность реализации метода NDDE.

Дополнительного заметного сокращения вычислительных затрат можно добиться, если использовать еще

одно интересное свойство, которым обладает алгоритм Левинсона. Это свойство заключается в том, что если теплицева эрмитова матрица A в (1) является ленточной и положительно определённой (а именно такими свойствами и обладает фигурирующая в (5) матрица R_m), то начальные компоненты вектора решения $(f_0, f_1, \dots, f_m, m \ll M)$ с хорошей точностью определяются задолго до окончания итерационного процесса. На рис.3а и 3б показан характер изменения действительной части $\text{Re}(f_0^{(r)})$ значения $f_0^{(r)}$ (мнимая часть $\text{Im}(f_0^{(r)})$ изменяется аналогичным образом) в ходе выполнения итераций для случаев, когда матрица A является положительно определённой (рис.3а) и не обладает этим свойством (рис.3б). Размер $n \times n$ матрицы A , участвующей в иллюстрируемых этими рисунками процессах, а также количество её диагоналей (ширина ленты) $tt = 2L - 1$ выбраны исходя из практически важной ситуации, возникающей при реализации метода NDDE в соответствии с требованиями, задаваемыми стандартом [9], а именно: $n = M = 256$, $L = 16$ и $tt = 31$. В обоих случаях по окончании итераций $f_0^{(n)}$ принимает значение, равное верному решению (на рис.3а и 3б $\text{Re}(f_0^{(256)}) = -0,707$). При положительной определённости матрицы A с увеличением номера итерации наблюдается тенденция уменьшения (стремления к нулю) модулей реальной и мнимой частей участвующих в процессе переменных β_r и старших компонент $t_r^{(r)}$ вектора $t^{(r)}$; значение переменной α_r при этом стремится к некоторой const.

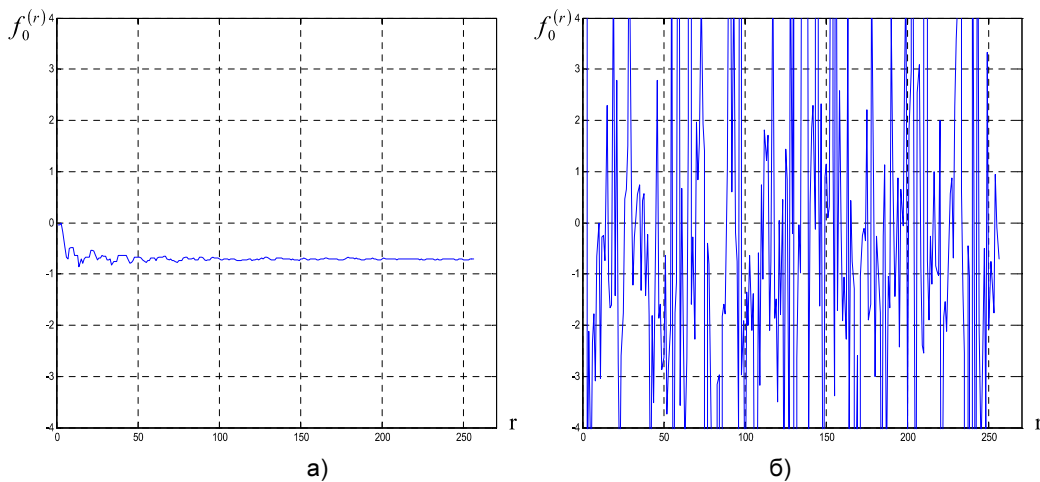


Рис. 3

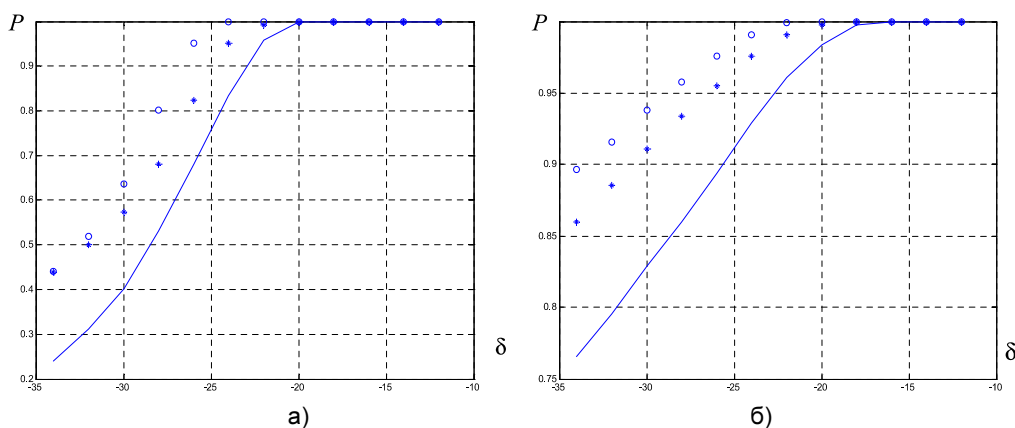
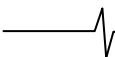


Рис. 4



Погрешность оценки значения начальной компоненты $f_0^{(r)}$ вектора решения $f^{(r)}$, получаемой при усечении числа итераций, является случайной величиной и зависит от конкретного вида матрицы A и вектора g в правой части уравнения (1). Количественные характеристики этой погрешности представлены на рис. 4а и 4 б, где изображены экспериментально полученные (путём моделирования на компьютере) графики её интегральной функции распределения $P(\delta)$. Аргумент δ этой функции представляет собой относительную погрешность оценки, выраженную в дБ:

$$\delta = 20 \lg \Delta / f_0,$$

где $\Delta = \hat{f}_0 - f_0$; \hat{f}_0 и f_0 соответственно оценка и истинное значение начальной компоненты вектора решения.

Поскольку величины \hat{f}_0 и f_0 являются комплексными, при расчетах и построении графиков использовались их либо действительные, либо мнимые части. Получающиеся при этом результаты оказались практически одинаковыми.

В качестве матрицы A в этих экспериментах использовалась матрица R_m , определяемая выражениями (6) и (3) (матрица M_1), причем необходимая для её формирования импульсная характеристика канала h задавалась в соответствии с требованиями, предъявляемыми стандартом [10] к КВ радиоканалу с умеренными (moderate) и плохими (poor) характеристиками. Рис.4а соответствует каналу moderate, а 4б – каналу poor. При этом значения M и L (а, следовательно, и tt) оставались такими же как и в процессе, иллюстрируемом рис.3а. Вектор g формировался в соответствии с уравнением (1), в котором в качестве вектора f использовался набор из n комплексных чисел, действительные и мнимые части которых с равной вероятностью принимали значения $\pm 0,7071$. (На практике это соответствует набору отсчетов сигнала с двукратной фазовой модуляцией). Основной линией на рис. 4а и 4б показаны зависимости, характеризующие точность оценки, получаемой на 48-й, линией из звёздочек – на 64-й и линией из круглых точек – на 80-й итерациях. Графики показывают, что с очень большой вероятностью при усечении числа итераций алгоритма Левинсона точность получаемой оценки начальной составляющей вектора решения является достаточно высокой.

Как отмечалось выше, при реализации метода NDDE на каждом его этапе необходимо определение как начальной f_0 , так и финальной f_{n-1} компонент вектора решения. Нетрудно показать, что если в уравнении (1) с треугольной эрмитовой матрицей A вектор $g^T = [g_0, g_1, \dots, g_{n-1}]$ заменить вектором $g_1^T = [g_{n-1}, g_{n-2}, \dots, g_0]$, то начальная компонента

решения f_1 вновь образованного матричного уравнения $Af_1 = g_1$ совпадёт с оригинальной компонентой f_{n-1} вектора решения уравнения (1). Поэтому рассмотренное свойство алгоритма Левинсона может быть использовано для определения обеих необходимых в методе NDDE составляющих вектора решения и обеспечивает возможность существенного сокращения вычислительной сложности его реализации.

Заключение

В работе выявлены особенности алгоритма Левинсона, позволяющие существенно сократить вычислительную сложность одного из наиболее эффективных методов построения радиомодемов – метода нелинейной прямой оценки данных.

Литература

1. Солонина А.И. и др. Основы цифровой обработки сигналов. Санкт-Петербург, «БВХ-Петербург», 2005
2. Марпл-мл. Цифровой спектральный анализ и его приложения / Пер. с англ. – М.: Мир, 1990.
3. Hsu Frank M. Data directed estimation techniques for single-tone HF modems. Military Communications Conference, 1985. MILCOM 1985. IEEE, volume:1, pp. 271-280.
4. Р. Блейхут. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов / Пер. с англ. – М.: Мир, 1989.
5. Петров О.А. Использование алгоритма Левинсона-Дурбина для решения системы линейных уравнений и «Инфокоммуникационные технологии», том 1, №1, 2003г.
6. Петров О.А. Быстрый алгоритм решения систем уравнения с треугольной матрицей. «Инфокоммуникационные технологии», том 4, №1, 2006г.
7. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.:Наука, 1984. – 320с.
8. STANAG 4285 Characteristics of 1200/2400/3600 Bit Per Second Single Tone Modulators/ Demodulators for HF Radio Links.
9. STANAG4539. Technical standards for Non-Hopping HF Communications Waveforms.
10. ITU_R F.520-2. Use of high frequency ionospheric channel simulators.

APPLICATION OF LEVINSON'S ALGORITHM AT REALIZATION DATA DIRECTED ESTIMATION METHOD IN RADIO MODEMS

Features of Levinson's algorithm are considered at the repeated decision of the matrix equation of the high order during realization of data direct estimation for single-tone HF modems, and the decisions allowing essentially to reduce its computing complexity are offered.