

## ОБОБЩЕННАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА ПО СИГНАЛАМ ВХОД-ВЫХОД

Минко А.А., Витязев В.В.

### Введение

Рассмотрим задачу идентификации многомерного объекта (рис. 1), имеющего вектор входа  $V(t) = (v_1(t) \dots v_q(t))^T$  и вектор выхода  $Y(t) = (y_1(t) \dots y_k(t))^T$ .

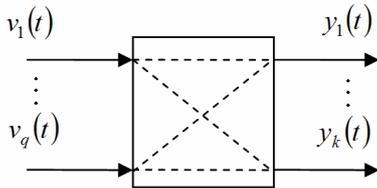


Рис. 1 – Структурная схема многомерного объекта

Будем считать, что дрейф параметров на требуемом интервале наблюдения  $T$  объекта пренебрежимо мал, а входной вектор не выводит объект за границы линейных диапазонов, так что допустимо использование линейных стационарных моделей по всем каналам вход-выход. Целью работы является разработка алгоритма идентификации отдельных каналов объекта, испытываемого по технологии «один вход - все выходы». Это позволяет в некоторых случаях сократить время испытаний объекта в  $k$  раз и, соответственно, увеличить время управления объектом, согласно идее дуального управления Фельдбаума.

### Постановка задачи

Рассмотрим один из каналов стационарного многомерного объекта, динамические свойства которого при известном входном сигнале  $v(t), t \in [0, T]$  допускают описание ЛДУ вида

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(n-i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j v^{(m-j)}(t), \quad n = \overline{1, 10}, \quad m \leq n-1. \quad (1)$$

Задача обобщенной идентификации заключается в нахождении не только вектора  $P = (a_0 \dots a_{n-1} \ b_0 \dots b_m)^T$ , составленного из коэффициентов левой и правой частей ЛДУ канала объекта (1), но и вектора  $Y_{T-} = (y(T-) \dots y^{(n-1)}(T-))^T$ , составленного из фазовых координат канала объекта в предоконечный момент времени  $t = T - 0 = T -$ .

Одним из вариантов решения поставленной задачи является использование проекций ЛДУ объекта на координатные функции Гаусса [1]:

$$Q_l(t-r, s) = \frac{(-1)^l}{\sqrt{2\pi s}} \frac{d^l}{dt^l} e^{-\frac{(t-r)^2}{2s}}, \quad l = 0, 1, 2, \dots,$$

которые допускают представление

$$Q_l(t-r, s) = \frac{1}{s^l \sqrt{2\pi s}} H_l(t-r, s) e^{-\frac{(t-r)^2}{2s}}, \quad (2)$$

Предложен алгоритм обобщенной идентификации на основе интегральных двухпараметрических преобразований Гаусса линейного стационарного объекта по его реакции на произвольный из заданного класса сигнал. Проведена экспериментальная проверка работоспособности разработанного алгоритма, подтверждающая его весьма высокую эффективность.

где  $H_l(t-r, s), l = 0, 1, 2, \dots$  - полиномы Эрмита,  $R_+^2$  - верхняя полуплоскость над прямой  $t \in R$ . Параметр  $r$  функций Гаусса является параметром сдвига, а  $s$  - параметром масштаба.

Графики функций  $Q_l(t-r, s), l = \overline{0, 4}$  при  $r=0$  и  $s=1$  представлены на рис. 2.

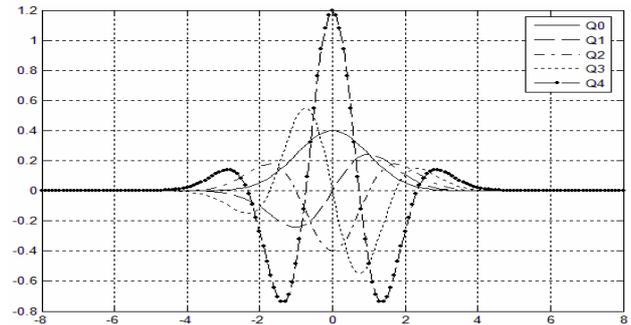


Рис. 2 – Графики функций  $Q_l(t-r, s), l = \overline{0, 4}$

Графики функций  $Q_l(t-r, s), l = \overline{5, 10}$  при  $r=0$  и  $s=1$  представлены на рис. 3.

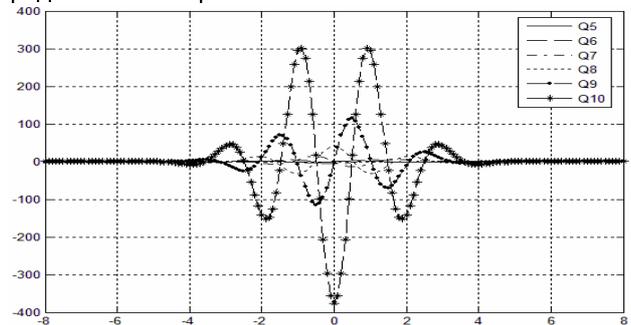


Рис. 3 – Графики функций  $Q_l(t-r, s), l = \overline{5, 10}$

Проекции сигнала  $x(t), t \in [0, T]$  на координатные функции Гаусса определяются выражением

$$G_x^{(l)}(r, s) = \int_0^T x(t) Q_l(t-r, s) dt, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

и называются интегральными преобразованиями Гаусса (ПГ) порядка  $l$ . Они обладают следующими свойствами.

1. ПГ линейны.

$$2. G_x^{(l)}(r, s) = G_x^{(l+k)}(r, s).$$

$$3. \lim_{s \rightarrow 0+} G_x^{(l)}(r, s) = x^{(l)}(t), \quad t = r - \text{формула обращения.}$$

ПГ позволяют алгебраизовать ЛДУ (1) и допускают численное определение на основе подходящих квадратурных формул, поскольку сигналы  $v(t)$  и  $y(t), t \in [0, T]$ , вследствие типового подхода к сбору информации, заданы в виде сеток

$$[t_i, v_i]_0^N, [t_j, y_j]_0^N,$$

где  $v_i = v(t_i), y_j = y(t_j), t_i \neq t_j$  при  $i = j$ . Порядок « $l$ » ПГ целесообразно ограничить числом одиннадцать. Это ограничение обусловлено тем, что вычисление ПГ более высоких порядков требует вычисления полиномов Эрмита порядков  $l > 11$ , а это, в свою очередь, будет вносить всё более возрастающую ошибку в вычисление самих ПГ.

Как правило, определены не отсчеты, а их оценки

$$\hat{v}_i = v_i + n_{vi}; \quad \hat{y}_j = y_j + n_{yj}, \quad (4)$$

где  $n_v, n_y$  - помехи, обусловленные рядом факторов. Поскольку сами ПГ обладают сглаживающими свойствами [2] при приемлемом уровне помех, аспекты получения наиболее достоверных оценок

$$\hat{G}_v^{(l)}(r, s), \hat{G}_y^{(l)}(r, s), l = 0, 1, 2, \dots$$

в работе не рассматриваются.

Учет финитных свойств входного и выходного сигналов объекта позволяет рассматривать их в виде

$$x(t) = x_p(t)1_T(t), \quad (5)$$

где  $x_p(t)$  – регулярная функция, заданная на открытом интервале  $(0, T)$ , а

$$1_T(t) = \begin{cases} 1(t), & t \in (0, T), \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases} \quad (6)$$

финитный единичный скачок. Характер изменения сигналов в точках  $0$  и  $T$  в данной работе не рассматривается. Производные финитных функций порядка « $k$ », входящие в выражение (1), вычисляются по формуле [3]:

$$x^{(k)}(t) = x_p^{(k)}(t)1_T(t) + \sum_{i=1}^k x_p^{(k-i)}(0+) \delta^{(i-1)}(t) - \sum_{i=1}^k x_p^{(k-i)}(T-) \delta^{(i-1)}(t-T), \quad (7)$$

где  $x_p^{(k-i)}(0+) \delta^{(i-1)}(t)$  - составляющая, содержащая постначальные фазовые координаты объекта, а  $x_p^{(k-i)}(T-) \delta^{(i-1)}(t-T)$  - составляющая, содержащая предоконечные фазовые координаты.

Далее приведены варианты алгоритма идентификации на основе ПГ рассматриваемого стационарного объекта по его реакции на произвольный допустимый входной сигнал вначале при нулевых предначальных условиях, а затем при ненулевых.

**Теоретическая часть**

Не останавливаясь на вариантах алгоритма обобщенной идентификации объектов простой структуры ( $n \leq 4$ ), перейдем к обсуждению алгоритма идентифи-

кации объекта, описываемого ЛДУ

$$\sum_{i=0}^{10} a_i y^{(10-i)}(t) = \sum_{j=0}^9 b_j v^{(9-j)}(t), \quad a_{10} = 1 \quad (8)$$

10-го порядка, при нулевых  $Y_{0-} = 0$  предначальных условиях с полным оператором  $B(p)$  в правой части ДУ. Для этих объектов условия баланса сингулярных и регулярных составляющих имеют следующий вид:

$$a) \left( \sum_{i=0}^{k-1} y_p^{(k-1-i)}(0+) - \sum_{j=0}^{k-2} b_j v_p^{(k-2-j)}(0+) \right) \delta^{(10-k)}(t) = 0;$$

$$б) \left( \sum_{i=0}^{k-1} y_p^{(k-1-i)}(T-) - \sum_{j=0}^{k-2} b_j v_p^{(k-2-j)}(T-) \right) \delta^{(10-k)}(t) = 0,$$

$$k = \overline{1, 10}; \quad (9)$$

$$в) \sum_{i=0}^{10} a_i y_p^{(10-i)}(t) = \sum_{j=0}^9 b_j v_p^{(9-j)}(t), \quad a_{10} = 1.$$

Будем считать, что заданный интервал  $(0, T)$  позволяет выбрать такие значения  $(r_{k_q}, s_{k_q}) \in R_+^2$  параметров ПГ, что выполняется условие:

$$|Q_l(T - r_{k_q}, s_{k_q})| \leq \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  - некоторое малое число, то есть не учитывать вектор  $Y_{T-}$  предоконечных значений фазовых координат выходного сигнала объекта. Данный прием уменьшает размерность формируемой матрицы СЛАУ с  $4n$  до  $3n$ . При выборе таких значений  $(r_{k_q}, s_{k_q}) \in R_+^2$  параметров ПГ, что появляется возможность неучета вектора  $Y_{0+}$  постначальных значений фазовых координат выходного сигнала объекта, приводит к тому, что алгоритм идентификации становится нечувствительным к быстро затухающим составляющим переходного процесса, а это, в свою очередь, уменьшает порядок определяемого ДУ модели объекта. Проекция ЛДУ (9,в) на координатные функции Гаусса  $Q_l(t - r_{k_q}, s_{k_q}), l = 0, 1, 1$ , для всех точек  $(r_{k_q}, s_{k_q}) \in R_+^2$  определяются алгебраическим соотношением

$$\sum_{i=0}^{10} a_i G_y^{(h+10-i)}(r_{k_q}, s_{k_q}) = \sum_{j=0}^9 b_j G_v^{(h+9-j)}(r_{k_q}, s_{k_q}), \quad (10)$$

$$k_q = \overline{1, q}, \quad q \in [10, 20],$$

где  $h = 0$  при  $k_q = \overline{1, 20}$  и  $h = \overline{0, 1}$  при  $k_q = \overline{1, 10}$ .

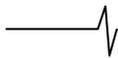
Начальное значение  $r_{k_1}$  параметра  $r$  ПГ целесообразно выбирать в начале сеток

$$[t_i, v_i]_0^N, [t_j, y_j]_0^N$$

реализации вход-выход объекта. Шаг  $h_r$  изменения параметра  $r$  должен выбираться так, чтобы все значения  $r_{k_q}, k_q = 1, q$  удовлетворяли условию

$$r_{k_q} \leq \frac{t_0 + t_N}{2}.$$

При малом шаге  $h_r$  изменения параметра  $r$  СЛАУ, формируемые из ПГ сеток сигналов вход-выход объекта, имеют матрицы, минимальные значения сингулярных чисел которых близки к нулю, что свидетельствует о вырожденности СЛАУ. Начальное значение  $s_{k_1}$  параметра  $s$  ПГ следует выбирать в диапазоне от 0,1 до 1÷3. Малые значения параметра  $s$  используются тогда,



когда реализация вход-выход имеет пренебрежимо малые шумовые компоненты (отношение сигнал-шум  $\geq 50+100$ ). Сверху значение параметра  $s$  ограничивают условия, позволяющие не учитывать правые краевые эффекты при вычислении ПГ реализации вход-выход объекта.

При минимальном значении числа точек

$$(r_{k_q}, s_{k_q}) \in R_+^2, k_q = \overline{1, 10}$$

потребуется 230 ПГ для формирования системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{pmatrix} G_y^1 & G_v^1 \\ \vdots & \vdots \\ G_y^{10} & G_v^{10} \end{pmatrix} P = (-1) \begin{pmatrix} G_{y0}^1 \\ \vdots \\ G_{y0}^{10} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где блоки определены как

$$G_y^{k_q} = \begin{pmatrix} G_y^{(10)}(r_{k_q}, s_{k_q}) \dots G_y^{(1)}(r_{k_q}, s_{k_q}) \\ G_y^{(11)}(r_{k_q}, s_{k_q}) \dots G_y^{(2)}(r_{k_q}, s_{k_q}) \end{pmatrix}; \quad (12)$$

$$G_v^{k_q} = (-1) \begin{pmatrix} G_v^{(9)}(r_{k_q}, s_{k_q}) \dots G_v^{(0)}(r_{k_q}, s_{k_q}) \\ G_v^{(10)}(r_{k_q}, s_{k_q}) \dots G_v^{(1)}(r_{k_q}, s_{k_q}) \end{pmatrix};$$

$$G_{y0}^{k_q} = \left( G_y^{(0)}(r_{k_q}, s_{k_q}) \quad G_y^{(1)}(r_{k_q}, s_{k_q}) \right)^T;$$

$$P = (a_0 \dots a_9 \quad b_0 \dots b_9)^T, k_q = \overline{1, 10}.$$

При другом подходе, полярном первому, для формирования СЛАУ

$$\left( G_{y_{k_q}}^{(10)} \dots G_{y_{k_q}}^{(1)} - G_{v_{k_q}}^{(9)} \dots - G_{v_{k_q}}^{(0)} \right) \times (p_{k_q}) = - \left( G_{y_{k_q}}^{(0)} \right), \quad (13) \quad \text{где}$$

$$k_q = \overline{1, 20},$$

$$G_{y_{k_q}}^{(l)} = G_y^{(l)}(r_{k_q}, s_{k_q}), l = \overline{0, 10};$$

$$G_{v_{k_q}}^{(p)} = G_v^{(p)}(r_{k_q}, s_{k_q}), p = \overline{0, 9},$$

требуется 420 ПГ сигналов вход-выход объекта.

Затем формируется банк моделей-кандидатов, исходя из гипотез о возможном описании модели объекта ДУ с 1-го по 10-й порядок:

1) одна модель 1-го порядка ( $n=1, m=0$ );

2) две модели 2-го порядка ( $n=2, m=0,1$ );

3) три модели третьего порядка ( $n=3, m=0,2$ ) и т.д.

Всего банк содержит 55 моделей-кандидатов. Для каждой из них формируется и решается СЛАУ соответствующего порядка, позволяющая вычислить вектор  $P = (a_0 \dots a_{n-1} \quad b_0 \dots b_m)^T$  параметров и вектор  $Y_{0+} = (y(0+) \dots y^{(n-1)}(0+))^T$  постначальных значений фазовых координат выходного сигнала. Для моделей-кандидатов определяются выходные сигналы  $y_{Mi}(t), i = \overline{1, 55}, t \in (0, T)$ . В результате, объект идентифицируется той моделью, для которой критерий соответствия модель-объект:

$$J = \|y(t) - y_M(t)\|, \quad (14)$$

где  $\|\cdot\|$  - подходящая норма, принимает значение  $J \rightarrow \min_{j \in [1, 55]}$ .

Если значение критерия определенной модели-кандидата удовлетворяет условию  $J \leq \varepsilon_\delta$ , где  $\varepsilon_\delta$  - до-

пустимая погрешность аппроксимации выходного сигнала объекта выходным сигналом модели, то модель объекта пригодна для оценки вектора  $Y_{T-}$  предоконечных значений фазовых координат выходного сигнала объекта и прогнозирования реакций объекта на входные сигналы  $v(t), t > T$ . В противном случае необходимо взять другой набор точек  $(r_{k_q}, s_{k_q}) \in R_+^2$  и повторить процедуру идентификации.

После выбора модели объекта определяется вектор  $Y_{T-} = (y(T-) \dots y^{(n-1)}(T-))^T$  для прогнозирования реакций объекта на входные сигналы  $v(t)$  при  $t > T$ . Для реализации этого алгоритма требуется информация о векторе  $Y_{0+} = (y(0+) \dots y^{(m)}(0+))^T$  постначальных значений координат фазового состояния входного сигнала, причем, в общем случае, он должен иметь  $y^{(q_m)}(t), t = 0+, q_m = 0, m$ . Таким образом, «произвольность» входного сигнала следует рассматривать как «произвольность в заданном классе».

Наглядную оценку необходимого числа ПГ сигналов вход-выход для различных порядков  $n$  ЛДУ моделей объекта приведены в таблице 1.

Таблица 1

$n/q$	1	2	3	4	5	6
0	2	-	-	-	-	-
1	5	6	-	-	-	-
2	11	14	17	20	-	-
3	17	22	27	32	37	42
4	23	30	37	44	51	58
5	-	38	47	56	65	74
6	-	46	57	68	79	90
7	-	-	67	80	93	106
8	-	-	-	92	107	122
9	-	-	-	-	-	138
$n/q$	7	8	9	10	11	12
4	65	72	-	-	-	-
5	83	92	101	110	-	-
6	101	112	123	134	145	156
7	119	132	145	158	171	184
8	137	152	167	182	197	212
9	155	172	189	206	223	240
10	-	-	-	230	249	268
$n/q$	13	14	15	16	17	18
7	197	210	-	-	-	-
8	227	242	257	272	-	-
9	257	274	291	308	325	342
10	287	306	325	344	363	382

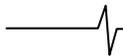
В таблице 1 обозначено:

$q$  - число значений  $(r_{k_q}, s_{k_q}) \in R_+^2$  параметров ПГ, используемых для формирования СЛАУ полного ранга;

$n$  - порядок ЛДУ, представляющего модель динамических свойств объекта;

$M_{nq}$  - число ПГ сигналов вход-выход, покрывающих соответствующую часть расширенной матрицы СЛАУ с учетом того, что максимальный порядок ПГ равен одиннадцати.

Прочерки в ячейках правого верхнего угла таблицы указывают на отсутствие необходимости использования больших значений  $q$ , а прочерки в ячейках



в левом нижнем углу таблицы – на то, что для формирования СЛАУ с полным рангом, равным  $2n$ , с данным значением числа  $q$ , потребуются ПГ порядка, большего одиннадцати. По-видимому, числа  $M_{nq}$  могут представлять самостоятельный интерес, так как матрица состоит из разных чисел, отстоящих друг от друга на шаги, одинаковые в каждой строке и в каждом столбце. Ненулевые числа  $M_{nq}$  можно определить как  $M_{nq} = 2n(2n+1)$ ,  $n=1,2,\dots$ . Соседние столбцы состоят либо только из четных, либо только из нечетных чисел.

Нулевые предначальные условия предполагают идентификацию объекта по его «стартовой реакции» или «реакции разгона», заданной входным сигналом. Отклонения от нуля предначальных условий  $Y_{0-} \neq 0$  приводит к модификации алгоритма обобщенной идентификации, которая рассматривается ниже.

Возможны две ситуации с ненулевыми предначальными значениями фазовых координат объекта: в первой из них вектор  $Y_{0-} = (y(0-), \dots, y^{(n-1)}(0-))^T$  известен, во второй – нет. Если вектор  $Y_{0-} \neq 0$  известен, это приводит к уточнению условий баланса регулярных и сингулярных составляющих в ЛДУ объекта, задающего финитные сигналы. Более наглядно подобные уточнения проявляются во второй ситуации, когда  $Y_{0-} \neq 0$  неизвестен и требует определения в процессе идентификации.

Требуемое число ПГ сигналов вход-выход в зависимости от порядка  $n$  и числа  $q$  значений параметров  $(r_{kq}, s_{kq}) \in R_+^2$  ПГ приведены в таблице 2. Обозначения в таблице 2 совпадают с обозначениями таблицы 1. Числа  $M_{nq}$  имеют постоянные шаги в каждой из строк и в каждом из столбцов таблицы 2. Конечные значения  $M_{nq}$  в каждой из строк равны  $(2n+1)3n = 6n^2 + 3n$ .

Таблица 2

$n/q$	1	2	3	4	5	6
1	7	8	9	-	-	-
2	15	18	21	24	27	30
3	23	28	33	38	43	48
4	-	38	45	52	59	66
5	-	-	57	66	75	84
6	-	-	-	80	91	102
7	-	-	-	-	107	120
8	-	-	-	-	-	138
9	-	-	-	-	-	-
$n/q$	7	8	9	10	11	12
1	-	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-	-
3	53	58	63	-	-	-
4	73	80	87	94	101	108
5	93	102	111	120	129	138
6	113	124	135	146	157	168
7	133	146	159	172	185	198
8	153	168	183	198	213	228
9	173	190	207	224	241	258

Анализируя данные таблицы 2, нетрудно заметить, что учет ненулевых предначальных условий для каждо-

го  $n$  по объему вычислительных затрат на формирование СЛАУ приблизительно эквивалентен случаю нулевых предначальных условий для ДУ порядка  $(n+1)$ . Порядок СЛАУ, используемого для оценки всех параметров обобщенной модели, равен  $3n$ . В этой связи целесообразно ограничить порядок  $n$  ЛДУ, представляющего модель объекта, величиной, равной семи. В этом случае ЛДУ, задающее связь между финитными сигналами  $y(t) = y_p(t)l(t)$ ,  $v(t) = v_p(t)l(t)$ ,  $t \in R$ , имеет вид

$$\sum_{i=0}^7 a_i \sum_{k=0}^{6-i} (y_p^{(6-i-k)}(0+) - y_p^{(6-i-k)}(0-)) \delta^{(k)}(t) + \sum_{i=0}^7 a_i y_p^{(7-i)}(t)l(t) = \sum_{j=0}^6 b_j v_p^{(m-j)}(t)l(t) + \sum_{j=0}^6 b_j \sum_{k=0}^{m-1-j} v_p^{(m-1-k)}(0+) \delta^{(k)}(t), \quad (15)$$

$$m \in [0, 6], a_7 = 1.$$

Функция  $y_p(t)$ ,  $t \in R$  будет решением ЛДУ (15), если он обращает его в тождество на всей числовой оси  $t \in R$ . Это означает, что должны выполняться условия баланса сингулярных и регулярных составляющих ДУ (15):

$$a) \sum_{i=0}^k a_i (y_p^{(k-i)}(0+) - y_p^{(k-i)}(0-)) \delta^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{k+q} b_j v_p^{(k+w-j)}(0+), \quad (16)$$

где  $w = m - n$  - разность порядков операторов в правой и левой частях ДУ модели объекта,  $w \in \{-7, -1\}$ ,  $k = 0, 6$ ,

$$б) \sum_{i=0}^7 a_i y_p^{(7-i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j v_p^{(m-j)}(t), a_7 = 1, t > 0. \quad (17)$$

Проекция ДУ (17) на координатные функции Гаусса  $Q_l(t - r_{kq}, s_{kq})$ ,  $l = 0, 1, (r_{kq}, s_{kq}) \in R_+^2$  описываются зависимостью между ПГ сигналов вход-выход:

$$- \sum_{i=0}^7 a_i \sum_{w=0}^{6-i} y_p^{(6-i-w)}(0+) Q_{k+w}(-r, s) + \sum_{i=0}^7 a_i G_y^{(k+7-i)}(r, s) = \sum_{j=0}^m b_j G_v^{(k+m-j)}(r, s) - \sum_{j=0}^m b_j \sum_{p=0}^{m-1-j} v_p^{(m-1-p-j)}(0+) Q_{k+p}(-r, s), \quad (18)$$

$$m \in \overline{0, 6}.$$

Используя некоторое число точек

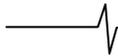
$$(r_{kq}, s_{kq}) \in R_+^2, k_q = \overline{1, q}, q \in [5, 21]$$

таких, что  $|Q_l(T - r_{kq}, s_{kq})| \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  - некоторое малое число, на основе соотношения (18) формируем СЛАУ

$$GP = G^0, \quad (19)$$

где неизвестные параметры модели отмечены вектором  $P = (a_0 \dots a_6, b_0 \dots b_m, z_0 \dots z_6)^T$ . Размерность вектора  $P$  зависит от порядка  $m$  оператора правой части ДУ (17). Кроме этой зависимости матрицы  $G$  и  $G^0$  зависят от числа  $q \in [5, 21]$  точек  $(r_{kq}, s_{kq}) \in R_+^2$ . При  $m = 6$  и  $q = 5$  матрицы имеют вид

$$G = (G^1 \dots G^5)^T; \quad G^0 = (-1)(G_y^{(0)}(r_1, s_1) \dots G_y^{(0)}(r_5, s_5))^T, \quad (20)$$



где блоки определяются выражениями

$$G^{k_q} = \begin{pmatrix} G_{y k_q}^{(7)} \dots G_{y k_q}^{(1)} - G_{v k_q}^{(6)} - G_{v k_q}^{(0)} Q_{6 k_q} \dots Q_{0 k_q} \\ \vdots \\ G_{y k_q}^{(11)} \dots G_{y k_q}^{(6)} - G_{v k_q}^{(10)} - G_{v k_q}^{(4)} Q_{10 k_q} \dots Q_{4 k_q} \end{pmatrix},$$

$$k_q = \overline{1, 4}; \quad (21)$$

$$G^5 = (G_{y 5}^{(7)} \dots G_{y 5}^{(1)} - G_{v 5}^{(6)} \dots - G_{v 5}^{(0)} Q_{6 5} \dots Q_{0 5})$$

где

$$G_{y k_q}^{(k)} = G_y^{(k)}(r_{k_q}, s_{k_q}), \quad k = \overline{1, 11}, \quad k_q = \overline{1, 4};$$

$$G_{v k_q}^{(l)} = G_v^{(l)}(r_{k_q}, s_{k_q}), \quad l = \overline{0, 10}, \quad k_q = \overline{1, 4};$$

$$Q_{m k_q} = Q_m(-r_{k_q}, s_{k_q}), \quad m = \overline{0, 10}, \quad k_q = \overline{1, 4}.$$

При другом подходе, полярном первому, когда  $q = 21$ ,  $m = 6$ , структуру матриц  $G$  и  $G^0$  иллюстрируют следующие выражения:

$$G = (G^1 \dots G^{21})^T; \quad (22)$$

$$G^0 = (-1)(G_y^{(0)}(r_1, s_1) \dots G_y^{(0)}(r_{21}, s_{21}))^T,$$

где

$$G^{k_q} = (G_{y k_q}^{(7)} \dots G_{y k_q}^{(1)} - G_{v k_q}^{(6)} \dots - G_{v k_q}^{(0)} Q_{6 k_q} \dots Q_{0 k_q}),$$

$$k_q = \overline{1, 21};$$

$$G_{y k_q}^{(k)} = G_y^{(k)}(r_{k_q}, s_{k_q}), \quad k = \overline{1, 7}, \quad k_q = \overline{1, 21}; \quad (23)$$

$$G_{v k_q}^{(l)} = G_v^{(l)}(r_{k_q}, s_{k_q}), \quad l = \overline{0, 6}, \quad k_q = \overline{1, 21};$$

$$Q_{m k_q} = Q_m(-r_{k_q}, s_{k_q}), \quad m = \overline{0, 6}, \quad k_q = \overline{1, 21}.$$

Вектор  $Z = (z_0 \dots z_6)^T$  определяется постначальными значениями фазовых координат сигналов вход-выход:

$$z_k = \sum_{w=0}^{w+k} b_q v_p^{(w+k-w)}(0+) - \sum_{h=0}^k a_w y_p^{(k-h)}(0+), \quad (24)$$

$$k = \overline{0, 6},$$

где  $w = m - n$  - разность между порядками операторов правой и левой частей ДУ модели объекта.

Анализируя выражение (24), нетрудно заметить, что произвольный сигнал  $v(t)$ ,  $t \in (0, T)$  должен быть идентифицирован так, чтобы все его производные  $v^{(q_m)}(t)$ ,  $t = 0+$ ,  $q_m = \overline{0, m}$  были априори известны. В противном случае, вычислить вектор  $Y_{0+} = (y(0+) \dots y^{(n-1)}(0+))^T$  постначальных значений фазовых координат выходного сигнала на основе только результатов решения СЛАУ (17) становится невозможным. Аналогичное условие должно иметь место и для вектора  $Y_{0-}$  предначальных значений фазовых координат выходного сигнала.

Последовательно выдвигая гипотезы о возможном описании модели объекта ДУ с 1-го по 7-й порядки, формируется банк моделей-кандидатов (всего 28 моделей). Для каждой из них формируется и решается СЛАУ соответствующего порядка, позволяющая вычислить вектор  $P = (a_0 \dots a_{n-1} \ b_0 \dots b_m \ z_0 \dots z_{n-1})^T$  параметров и вектор  $Y_{0+} = (y(0+) \dots y^{(n-1)}(0+))^T$  постначальных значений фазо-

вых координат выходного сигнала. Для моделей-кандидатов определяются выходные сигналы  $y_{M_i}(t)$ ,  $i = \overline{1, 28}$ ,  $t \in (0, T)$ . Объект идентифицируется той моделью, для которой критерий соответствия модель-объект (14) принимает значение  $J \rightarrow \min_{j \in \{1, 28\}}$ . Если значение критерия определенной модели-кандидата удовлетворяет условию  $J \leq \varepsilon_\delta$ , где  $\varepsilon_\delta$  - допустимая погрешность аппроксимации выходного сигнала объекта выходным сигналом модели, то модель объекта пригодна для оценки вектора  $Y_{T-}$  предоконечных значений фазовых координат выходного сигнала объекта и прогнозирования реакций объекта на входные сигналы  $v(t)$ ,  $t > T$ . В противном случае необходимо взять другой набор точек  $(r_{k_q}, s_{k_q}) \in R_+^2$  и повторить процедуру идентификации

### Экспериментальные исследования

Вначале рассмотрим пример обобщенной идентификации объекта простой структуры, имеющий достаточно высокую точность по сравнению с идентификацией объектов усложненной и сложной структуры [4]. Сгенерируем случайным образом объект, описываемый ДУ четвертого порядка:

$$\sum_{i=0}^4 a_i p^{4-i} y(t) = \sum_{j=0}^3 b_j p^{3-j} v(t),$$

$$a_4 = 1, t \in (0, T),$$

а операторы передаточной функции явно имеют вид:

$$B(p) = 0,243 p^3 + 1,593 p^2 + 3,953 p + 2,119; \quad (25)$$

$$A(p) = 0,112 p^4 + 0,739 p^3 + 2,93 p^2 + 3,168 p + 1.$$

Подадим на вход объекта сигнал  $v(t) = \sin \omega t$ ,  $\omega = 1$  и с помощью какого-либо решателя ДУ получим выходной сигнал  $y(t)$ ,  $t \in (0, 10)$ . Положим, что объект стартует из нулевых  $Y_{0-} = 0$  предначальных условий. Воспользовавшись рассмотренным алгоритмом идентификации и выбрав параметры ПГ  $r=0,5$  и  $s=0,5$ , а так же шаг изменения параметра  $r$ :  $h=0,5$ , получаем банк моделей-кандидатов (до десятого порядка), из которых выбирается одна на основе критерия:

$$J = \frac{\sum_{i=0}^N (y(t_i) - y_M(t_i))^2}{\sum_{i=0}^N y_i^2} 100\%. \quad (26)$$

Операторы передаточной функции полученной в результате идентификации «наилучшей» модели объекта, имеют вид:

$$B(p) = 0,243 p^3 + 1,59 p^2 + 3,947 p + 2,118; \quad (27)$$

$A(p) = 0,112 p^4 + 0,738 p^3 + 2,925 p^2 + 3,165 p + 1$ , значение критерия (26) -  $J = 5,1 \cdot 10^{-9}\%$ . Минимизация критерия  $J$  возможна за счет выбора параметров ПГ  $r$  и  $s$ , а также выбора шага изменения  $h$  параметра  $r$ . Рекомендации по выбору этих параметров были подробно рассмотрены в работе [4].

Вычислим вектор  $Y_{0+} = (y(0+) \dots y^{(n)}(0+))^T$  постначальных фазовых координат модели объекта по расчетной формуле:

$$y(0+) = y'(0+) = 0;$$

$$y''(0+) = \frac{b_0}{a_0} \omega; \quad (28)$$

$$y'''(0+) = \frac{1}{a_0} (b_1 \omega - a_1 y''(0+)).$$

В результате имеем:

$$\begin{aligned} y(0+) &= y'(0+) = 0; \\ y''(0+) &= 2,168; \\ y'''(0+) &= -0,086. \end{aligned}$$

Наложим на выходной сигнал объекта (25) аддитивный гауссовский шум с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией, равной 0,05. Теперь необходимо идентифицировать объект по входному сигналу  $v(t) = \sin t$  и оценке

$$\hat{y}(t) = y(t) + n_y$$

выходного сигнала. Воспользовавшись вышеизложенным алгоритмом и выбрав параметры ПГ  $r=0,1$  и  $s=1,5$ , а так же шаг изменения параметра  $r$   $h=0,6$ , получаем банк моделей-кандидатов, из которых выбирается одна на основе критерия (26). Операторы передаточной функции полученной модели имеют вид:

$$\begin{aligned} B(p) &= 0,236p^3 + 0,663p^2 + 1,198p + 2,215; \\ A(p) &= 0,057p^4 + 0,419p^3 + 0,715p^2 + 1,864p + 1, \end{aligned} \quad (29)$$

а значение критерия (26) -  $J = 4,11\%$ . Компоненты вектора фазовых координат определенной модели объекта в постначальный момент времени в данном случае имеют вид:

$$\begin{aligned} y(0+) &= y'(0+) = 0; \\ y''(0+) &= 4,102; \\ y'''(0+) &= -18,358. \end{aligned}$$

На рис. 4 представлены входной сигнал объекта и выходные сигналы идентифицированной модели  $y_M(t)$  и объекта  $y(t)$ .

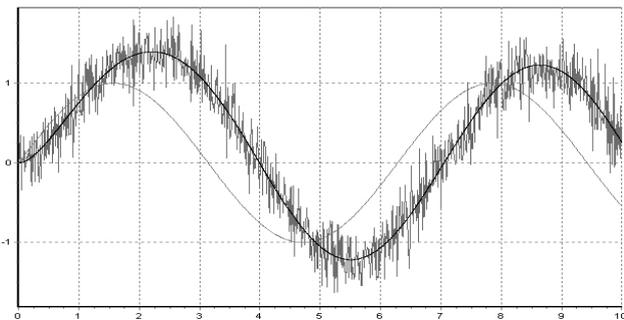


Рис. 4 – Графики  $v(t), y_M(t), \hat{y}(t)$

На рис. 4 видно, что выходной сигнал  $y_M(t)$  полученной модели повторяет характер изменения зашумленного выходного сигнала  $y(t)$  объекта, очищенного от шума.

Теперь рассмотрим сгенерированный случайным образом объект, описываемый ДУ десятого порядка:

$$\sum_{i=0}^{10} a_i p^{10-i} y(t) = \sum_{j=0}^9 b_j p^{9-j} v(t),$$

$$a_{10} = 1, t \in (0, T),$$

операторы передаточной функции которого, имеют вид:

$$\begin{aligned} B(p) &= 6,443 \cdot 10^{-4} p^9 + 1,87 \cdot 10^{-2} p^8 + \\ &6,04 \cdot 10^{-2} p^7 + 0,344 p^6 + 0,648 p^5 + 1,137 p^4 + \\ &+ 1,12 p^3 + 2,484 p^2 + 4,875 p + 2,358; \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} A(p) &= 8,664 \cdot 10^{-4} p^{10} + 7,49 \cdot 10^{-3} p^9 + \\ &+ 7,695 \cdot 10^{-2} p^8 + 0,382 p^7 + 1,722 p^6 + \\ &+ 5,247 p^5 + 11,972 p^4 + 19,652 p^3 + \\ &+ 18,041 p^2 + 7,423 p + 1. \end{aligned}$$

Подадим на вход полученного объекта сигнал  $v(t) = e^{-t}$ , и с помощью какого-либо решателя ДУ получим выходной сигнал  $y(t), t \in (0, 10)$ . Положим, что объект стартует из нулевых  $Y_{0+} = 0$  предначальных условий. Воспользовавшись предложенным в данной работе алгоритмом и выбрав параметры ПГ  $r=0,1$  и  $s=0,5$ , а так же шаг изменения параметра  $r$   $h=0,2$ , получаем банк моделей-кандидатов, из которых выбирается одна на основе критерия (26). Операторы передаточной функции полученной в результате идентификации «наилучшей» модели объекта имеют вид:

$$\begin{aligned} B(p) &= 6,96 \cdot 10^{-4} p^8 + 1,916 \cdot 10^{-2} p^7 + \\ &+ 4,212 \cdot 10^{-2} p^6 + 0,32 p^5 + 0,319 p^4 + \\ &+ 0,867 p^3 + 0,282 p^2 + 2,393 p + 2,359; \\ A(p) &= 3,6 \cdot 10^{-7} p^{10} + 9,288 \cdot 10^{-4} p^9 + \\ &+ 6,934 \cdot 10^{-3} p^8 + 7,426 \cdot 10^{-2} p^7 + \\ &+ 0,322 p^6 + 1,469 p^5 + 3,90 p^4 + 8,322 p^3 + \\ &+ 11,451 p^2 + 6,382 p + 1, \end{aligned} \quad (31)$$

значение критерия (26) -  $J = 2,665 \cdot 10^{-5}\%$ .

Вычислим вектор  $Y_{0+} = (y(0+) \dots y^{(9)}(0+))^T$  постначальных фазовых координат модели объекта по расчетной формуле:

$$\begin{aligned} y^{(q)}(0+) &= 0, \quad q = n - m - 1; \\ y^{(n-m)}(0+) &= \frac{b_0}{a_0}; \end{aligned} \quad (32)$$

$$y^{(n-m+k)}(0+) = \frac{1}{a_0} \left( \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} b_j - \sum_{p=1}^{k-1} a_p y^{(k-p)}(0+) \right),$$

$$a_0 \neq 0, k = \overline{0, n-1}, m = \overline{0, n-1}, n = \overline{1, 10}.$$

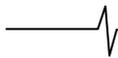
В результате имеем:

$$\begin{aligned} y(0+) &= 0; \quad y'(0+) = 1931,79; \quad y''(0+) = -4,93 \cdot 10^6; \\ y'''(0+) &= 1,27 \cdot 10^{10}; \quad y^{(4)}(0+) = -3,25 \cdot 10^{13}; \\ y^{(5)}(0+) &= 8,35 \cdot 10^{16}; \quad y^{(6)}(0+) = -2,14 \cdot 10^{20}; \\ y^{(7)}(0+) &= 5,51 \cdot 10^{23}; \quad y^{(8)}(0+) = -1,42 \cdot 10^{27}; \\ y^{(9)}(0+) &= 3,63 \cdot 10^{30}. \end{aligned}$$

Наложим на выходной сигнал объекта (30) аддитивный гауссовский шум с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией, равной 0,005. Теперь необходимо идентифицировать объект по входному сигналу  $v(t) = e^{-t}$  и оценке

$$\hat{y}(t) = y(t) + n_y$$

выходного сигнала. Воспользовавшись вышеизложенным алгоритмом и выбрав параметры ПГ  $r=0,01$  и  $s=0,8$ , а так же шаг изменения параметра  $r$   $h=0,25$ , получаем банк моделей-кандидатов, из которых выбирается одна на основе критерия (26). Операторы передаточной



функции полученной модели имеют вид:

$$\begin{aligned}
 B(p) &= 1,674 \cdot 10^{-4} p^8 + 7,389 \cdot 10^{-4} p^7 + \\
 &+ 2,58 \cdot 10^{-2} p^6 + 2,895 \cdot 10^{-2} p^5 + 0,36 p^4 + \\
 &+ 1,827 \cdot 10^{-2} p^3 + 1,038 p^2 - 0,224 p + 2,473; \\
 A(p) &= 6,366 \cdot 10^{-5} p^9 + 9,669 \cdot 10^{-4} p^8 + \\
 &+ 1,032 \cdot 10^{-2} p^7 + 7,104 \cdot 10^{-2} p^6 + 0,339 p^5 + \\
 &+ 1,235 p^4 + 3,026 p^3 + 5,349 p^2 + 5,533 p + 1,
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

значение критерия (26) -  $J = 5,01\%$ . Из выражения (33) следует, что передаточная функция «наилучшей» модели имеет девятый, а не десятый, как у объекта, порядок.

Вычислим по формуле (32) вектор постначальных значений фазовых координат модели объекта:

$$\begin{aligned}
 y(0+) &= 0; \quad y'(0+) = 2,63; \quad y''(0+) = -30,98; \\
 y'''(0+) &= 440,44; \quad y^{(4)}(0+) = -4544,69; \\
 y^{(5)}(0+) &= 23798,3; \quad y^{(6)}(0+) = -7719,86; \\
 y^{(7)}(0+) &= -515208; \quad y^{(8)}(0+) = -613843.
 \end{aligned}$$

На рис. 5 представлены входной сигнал объекта, выходной сигнал определенной модели объекта  $y_M(t)$  и выходной  $\hat{y}(t)$  зашумленный сигнал объекта.

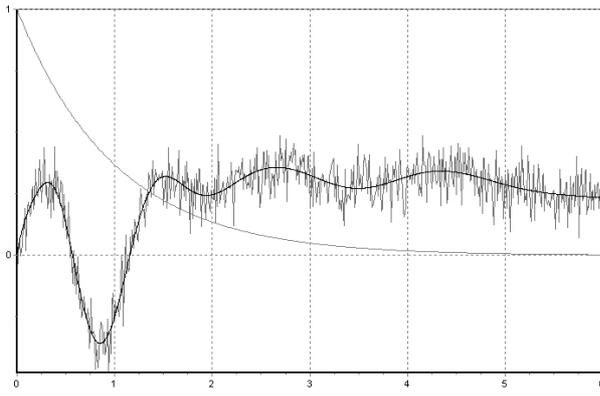


Рис. 5 – Графики  $v(t), y_M(t), \hat{y}(t)$

На рис. 5 видно, что выходной сигнал  $y_M(t)$  полученной модели является математическим ожиданием зашумленного выходного сигнала  $\hat{y}(t)$  объекта.

### Заключение

В статье предлагается метод обобщенной идентификации канала многомерного линейного стационарного объекта, основанный на двухпараметрических

интегральных преобразованиях Гаусса, позволяющих осуществлять удобную алгебраизацию ЛДУ, описывающего динамику канала объекта. Приведен конкретный алгоритм идентификации при произвольном входном сигнале из заданного класса, позволяющий определить коэффициенты ЛДУ канала и векторы значений его фазовых координат в предоконечный момент времени. Данный подход позволяет далее решать задачу управления объектом согласно идеи дуального управления Фельдбаума. Его удалось реализовать за счет предложенной в работе модификации ЛДУ, задающих финитный выходной сигнал при финитном входе. Для каналов объекта простой структуры предложенный метод довольно точен. Для каналов высокого порядка, коэффициенты ЛДУ модели мало совпадают, но его решение достаточно точно аппроксимирует реакцию канала объекта.

Следует особо подчеркнуть неизбежный субъективизм процедур подтверждения модели объекта. Как показывает практика, решение данного вопроса никогда не следует полностью передоверять каким бы то ни было статистическим процедурам [5].

### Литература

1. Уваев А.И. Идентификация линейных стационарных объектов на основе преобразований Гаусса. //Сб. трудов Всесоюзной научно-технической конференции «Автоматизация исследования, проектирования и испытаний сложных технических систем».- Калуга, 1989. - с.167-168.
2. Уваев А.И., Минко А.А. Исследование преобразований Гаусса гармонических сигналов. // Проблемы математического моделирования и обработки информации в научных исследованиях: сборник научных трудов. Рязань, 1999. - с. 83-88.
3. Уваев А.И., Минко А.А. Особенности обобщенной параметрической идентификации объектов управления на основе модели вход-выход. // Новые информационные технологии в научных исследованиях и образовании. Материалы XII Всероссийской научно-технической конференции студентов. Рязанский государственный радиотехнический университет, 2007. - с. 210-212.
4. Минко А.А. Идентификация линейного объекта по реакции на гармонический сигнал. Вестник РГРТУ №1(выпуск 23), 2008. - с. 63-68.
5. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя: Пер. с англ./ Под ред. Я.З. Цыпкина. – М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. Лит., 1991. – 432 с.