УДК 621.397.2

ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ ДВУМЕРНЫМИ НЕРЕКУРСИВНЫМИ ЦИФРОВЫМИ ФИЛЬТРАМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Приоров А.Л.

Определены области существования двумерных нерекурсивных цифровых фильтров нижних и верхних частот второго порядка с симметричными коэффициентами и монотонными амплитудно-частотными характеристиками. Установлено максимальное подавление сигнала, возможное в фильтрах такого типа, получено уравнение линии среза. Приведены примеры применения таких фильтров для обработки искаженных изображений.

Введение

Существует множество областей, в которых используется цифровая обработка двумерных массивов данных. Это, например, обработка изображений, геофизические исследования земной коры, компьютерная томография в медицине и множество других важных научно-практических задач [1].

Хотя двумерные нерекурсивные цифровые системы для достижения тех же частотных свойств, что и рекурсивные, требуют большего объема вычислений, но они имеют и свои преимущества, к которым следует отнести их устойчивость при любых значениях своих параметров, а также возможность реализации линейной фазовой характеристики, что весьма важно при обработке изображений.

Частотные свойства одномерных нерекурсивных цифровых систем второго порядка хорошо изучены. В зависимости от значений двух коэффициентов этой системы, она может реализовать фильтры верхних или нижних частот, а также полосовой или режекторный фильтры. В тоже время частотные свойства двумерных фильтров изучены недостаточно и требуют дальнейших исследований.

Исследование частотных свойств двумерных нерекурсивных фильтров

Для исследования частотных свойств двумерных цифровых фильтров верхних и нижних частот второго порядка с симметричными коэффициентами использована методика, впервые предложенная в [2] для двумерной рекурсивной цифровой системы первого порядка. Структурная схема двумерной нерекурсивной цифровой системы второго порядка с симметричными коэффициентами приведена на рис. 1. Здесь $a = a_{10} = a_{01}$, $b = a_{20} = a_{02}$, $c = a_{11}$.

Частотная характеристика такой системы имеет вид:

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = 1 + a\left(e^{-j\omega_1} + e^{-j\omega_2}\right) + b\left(e^{-j2\omega_1} + e^{-j2\omega_2}\right) + ce^{-j(\omega_1+\omega_2)}. \qquad (1)$$

Квадрат модуля частотной характеристики (1) в этом случае запишется следующим образом:

$$\left|H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})\right|^2 = H(\omega_1, \omega_2) = (1 + a(\cos(\omega_1) + \cos(\omega_2)) + \\ + b(\cos(2\omega_1) + \cos(2\omega_2)) + c\cos(\omega_1 + \omega_2))^2 + \\ + (a(\sin(\omega_1) + \sin(\omega_2)) + c\sin(\omega_1 + \omega_2) + \\ + b(\sin(2\omega_1) + \sin(2\omega_2)))^2. \qquad (2)$$

Из условий симметрии коэффициентов достаточно рассмотреть поведение функции $H(\omega_1, \omega_2)$ на осях ω_1 и ω_2, а также на диагоналях $\omega_1 = \omega_2$ и $\omega_1 = -\omega_2$ в верхней полуплоскости частотной плоскости (ω_1, ω_2).

Установлено, что рассматриваемая система имеет 12 экстремумов по направлениям осей и диагоналей. Система обладает монотонной амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) при отсутствии экстремумов у функций, получаемых из (2). Для исследования частотных свойств двумерной нерекурсивной цифровой системы второго порядка с симметричными коэффициентами, также как и в рекурсивном случае, применим аппарат дифференциальной геометрии в пространстве [2].

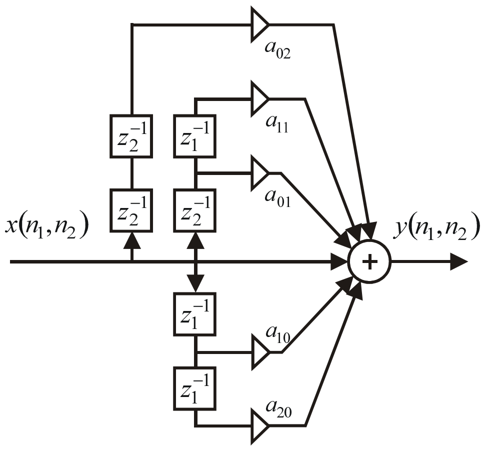


Рис. 1. Структурная схема двумерной нерекурсивной цифровой системы второго порядка с симметричными коэффициентами.

В точке $(0,0)$ условие положительности имеет вид:

$$\begin{cases} (a+c)(1+a+2b) + 4b(1+a+b) < 0, \\ \left[(a+c)(1+a+2b) + 4b(1+a+b)\right]^2 - \left[(a+2b) + c(2b-1)\right]^2 > 0, \end{cases} \qquad (3)$$

а условие отрицательности:

$$\begin{cases} (a+c)(1+a+2b) + 4b(1+a+b) > 0, \\ \left[(a+c)(1+a+2b) + 4b(1+a+b)\right]^2 - \left[(a+2b) + c(2b-1)\right]^2 > 0, \end{cases} \qquad (4)$$

В точке (π, π) условие положительности имеет вид:

$$\begin{cases} (a-c)(1-a+2b) + 4b(a-1-b) > 0, \\ \left[(a-c)(1-a+2b) + 4b(a-1-b)\right]^2 - \left[(a+2b) + c(2b-1)\right]^2 > 0, \end{cases} \qquad (5)$$

а условие отрицательности:

$$\begin{cases}(a-c)(1-a+2b)+4b(a-1-b)<0,\\ [(a-c)(1-a+2b)+4b(a-1-b)]^2-[(a+2b)+c(2b-1)]^2>0.\end{cases} \quad (6)$$

Для того чтобы система была фильтром нижних частот, необходимо выполнение условий (4) и (6). Для того чтобы система была фильтром верхних частот, необходимо, чтобы были выполнены условия (3) и (5).

Для фильтра нижних частот максимум АЧХ приходится на точку $(0,0)$, а максимальное подавление входного сигнала на точку (π,π), поэтому подавление ФНЧ:

$$G=20\lg\left(\frac{1+2a+c+2b}{1-2a+c+2b}\right). \quad (7)$$

Для фильтра верхних частот максимум АЧХ приходится на точку (π,π), а максимальное подавление входного сигнала на точку $(0,0)$, поэтому подавление ФВЧ:

$$G=20\lg\left(\frac{1-2a+c+2b}{1+2a+c+2b}\right). \quad (8)$$

В качестве примера рассмотрим типичные ФНЧ и ФВЧ и найдем для них по формулам (7-8) подавление входного сигнала. Для ФНЧ с параметрами $a=0.62,\ b=0.09,\ c=0.1$ затухание $G=-35.99$ дБ (рис. 2). Для ФВЧ с параметрами $a=-0.63,\ b=0.1,\ c=0.1$ затухание $G=-36.12$ дБ (рис. 3).

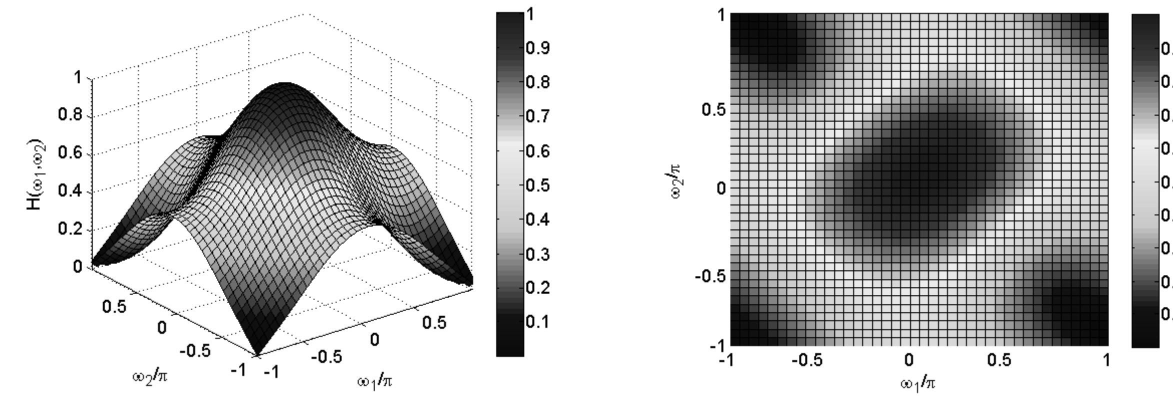
При проектировании цифровых систем одним из важнейших параметров является линия среза. Выполним нормировку значения квадрата модуля частотной характеристики фильтра нижних частот. Для этого вычислим значение $|H(0,0)|^2=(1+2a+c+2b)^2$. Далее получим:

$$\frac{|H|^2}{|H_{0,0}|^2}=\frac{1}{2};\quad 2|H|^2=|H_{0,0}|^2. \quad (9)$$

В уравнении (9) используем разложение функций $\sin(\omega)$ и $\cos(\omega)$ в ряд Тейлора второго порядка в окрестности нуля. Подставляя результаты этого разложения в (3), получим:

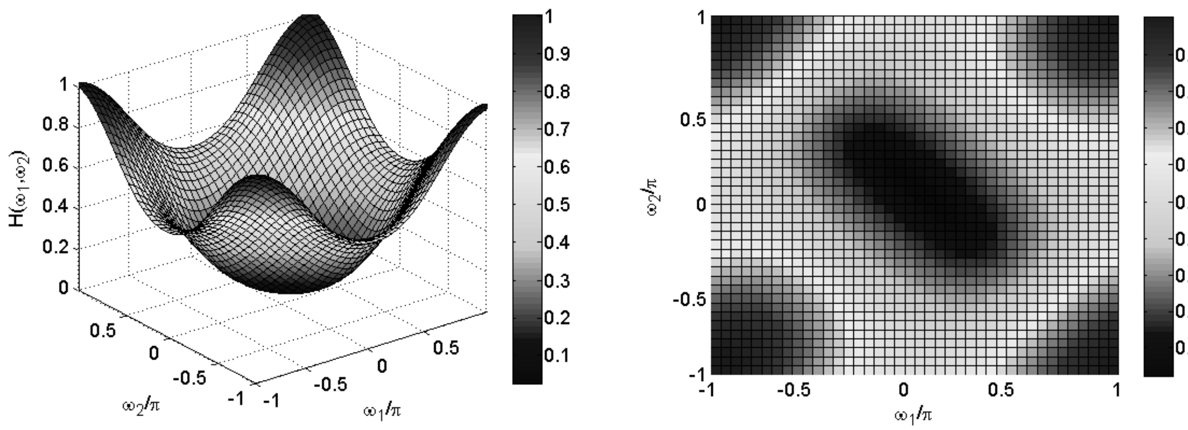
$$\begin{aligned}&[(a+c+2b)(2b-1)+2b(2a-1)+ac]\,\omega_1^2+\\ &+[(a+c+2b)(2b-1)+2b(2a-1)+ac]\,\omega_2^2+\\ &+2[c(1-2b)]-(a+2b)^2\,\omega_1\omega_2=(1+2a+c+2b)^2.\end{aligned} \quad (10)$$

Соотношение (10) является уравнением линии среза (окружности) двумерного нерекурсивного цифрового фильтра второго порядка с симметричными коэффициентами во втором приближении.



а) б)

Рис. 2. Типичный вид АЧХ двумерного цифрового фильтра нижних частот



а) б)

Рис. 3. Типичный вид АЧХ двумерного цифрового фильтра верхних частот

Результаты моделирования

Описанные выше двумерные нерекурсивные цифровые фильтры второго порядка с симметричными коэффициентами могут быть применены для решения задачи удаления периодических помех из изображений.

В качестве модели периодической помехи использована двумерная синусоида:

$$r(x,y) = A\sin[2\pi\omega_{10}(x+\Delta x)/M + 2\pi\omega_{20}(y+\Delta y)/N], \quad (11)$$

где A – амплитуда, ω_{10} и ω_{20} определяют пространственные частоты соответственно по осям x и y, Δx и Δy – сдвиги фаз относительно начала отсчета, M и N – число строк и столбцов матрицы $r(x,y)$.

Дискретным преобразованием Фурье размером $M \times N$ от $r(x,y)$ является функция

$$R(\omega_1,\omega_2) = j\frac{A}{2}[\left(e^{2\pi\omega_1\Delta x/M}\right)\delta(\omega_1+\omega_{10},\omega_2+\omega_{20}) - \\ -\left(e^{2\pi\omega_2\Delta y/N}\right)\delta(\omega_1-\omega_{10},\omega_2-\omega_{20})],$$

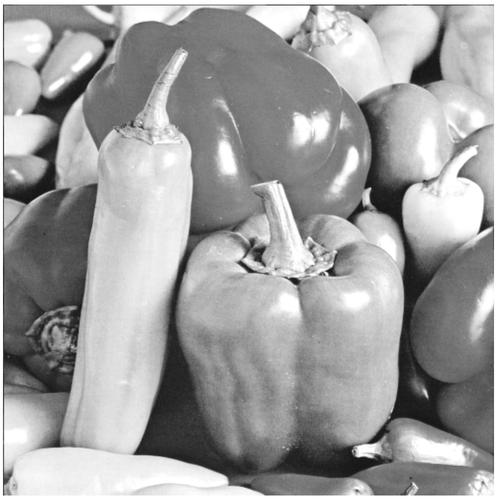
которая имеет вид пары комплексно сопряженных единичных импульсов, находящихся в точках $(\omega_{10},\omega_{20})$ и $(-\omega_{10},-\omega_{20})$ соответственно.

За основу метрики оценки качества цифрового изображения в работе принято пиковое отношение сигнал/шум (ПОСШ), определяемое по следующей формуле:

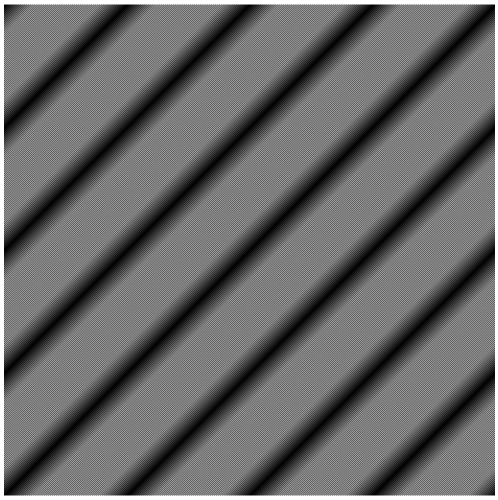
$$ПОСШ = 20\log_{10}\frac{255}{\sqrt{СКО}}, \quad СКО = \frac{1}{MN}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\left(x_{i,j} - y_{i,j}\right)^2,$$

где M и N – число строк и столбцов матриц исходного $x_{i,j}$ и восстановленного $y_{i,j}$ изображений.

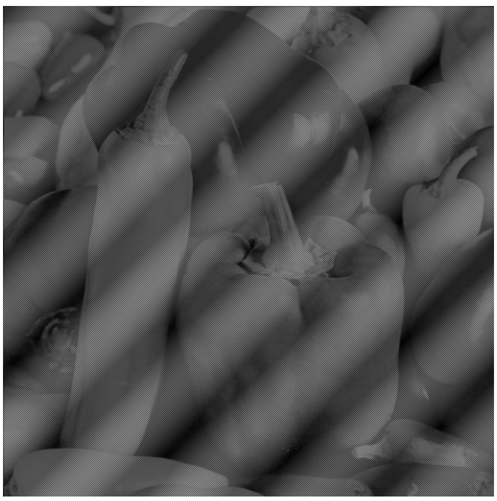
Примеры исходных изображений, периодических помех (построенных на основе модели, введенной выше), искаженных и восстановленных изображений приведены на рис. 4 и рис. 5. Помеха на рис. 4 представляет собой единичную высокочастотную синусоиду, описанную с использованием формулы (11). Помеха на рис. 5 представляет собой суперпозицию двух низкочастотных синусоид.



а)



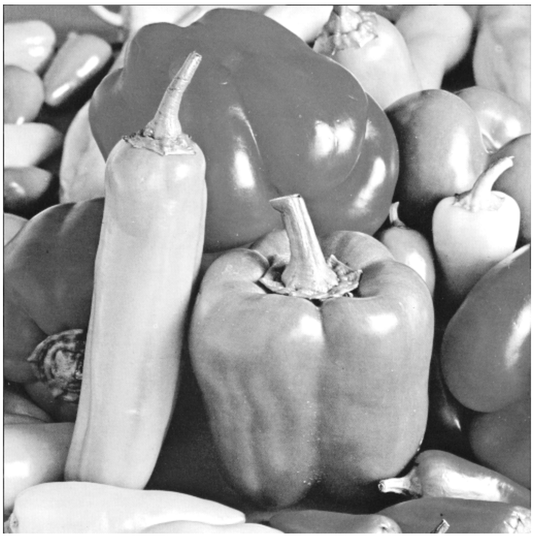
б)



в)

г)

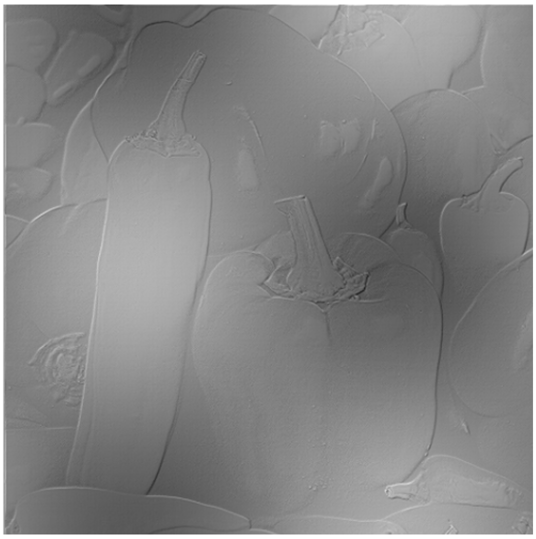
Рис. 4. Обработка тестового изображения ФНЧ: а) исходное тестовое изображение «Перцы»; б) синусоидальная помеха; в) искаженное изображение, ПОСШ = 7,67 дБ; г) восстановленное изображение с использованием рассматриваемого ФНЧ, ПОСШ = 31,96 дБ



а)

б)

в)



г)

Рис. 5. Обработка тестового изображения ФВЧ: а) исходное тестовое изображение «Перцы»; б) синусоидальная помеха; в) искаженное изображение; г) восстановленное изображение с использованием рассматриваемого ФВЧ

Изображение, восстановленное с использованием ФНЧ с параметрами $a = 0.62,\ b = 0.09,\ c = 0.1$, приведено на рис. 4г. Видно, что высокочастотная синусоидальная помеха полностью удаляется указанным фильтром.

Результаты использования ФВЧ с параметрами $a = -0.63,\ b = 0.1,\ c = 0.1$ представлены на рис. 5. Как видно из рис. 5г, восстановленное изображение, полученное с использованием ФВЧ, содержит информацию о деталях (границах, контурах и т.д.) исходного тестового изображения. Помимо удаления низкочастотных компонент собственно изображения частично удалена и низкочастотная помеха, представленная на искаженном изображении рис. 5в. Неполное удаление помехи связано с видом АЧХ рассматриваемого ФВЧ (рис. 3).

Литература

1. Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов. – М.: Мир, 1988.
2. Брюханов Ю.А., Приоров А.Л., Мясников Е.А., Калинин С.А. Частотные свойства двумерных рекурсивных цифровых систем первого порядка // Изв. высш. учеб. заведений. Радиоэлектроника. 1995. № 4. С. 26-30.