УДК 621.317.08

ВЕСОВЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ АДАПТИВНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА СИГНАЛОВ С МНОГОМОДОВЫМ СПЕКТРОМ

Давыдочкин В.М., Давыдочкина С.В.

Предложен метод расчёта весовых функций, который позволяет адаптировать их параметры для получения одновременного минимума методической погрешности измерения частоты и амплитуды сигнала при спектральном анализе. Приведён каталог весовых функций с минимальным уровнем боковых лепестков при заданной ширине основного лепестка и заданной скорости уменьшения уровня боковых лепестков.

Введение

Один из наиболее эффективных и часто используемых методов обработки сигналов при измерении их параметров выполняется на основе преобразования Фурье (ПФ). Основные недостатки этого метода обусловлены значительной методической погрешностью из-за низкой разрешающей способности и искажающих действий боковых лепестков. Эффективным способом снижения методической погрешности является применение сглаживающих весовых функций (ВФ). Этому вопросу посвящено много публикаций, поток которых не ослабевает и в настоящее время [1, 2, 3]. Обработка данных с помощью ВФ позволяет ослабить влияние боковых лепестков, но лишь за счёт ухудшения спектрального разрешения. Считается, что в результате этих трудно разрешимых противоречий при использовании классического спектрального анализа погрешность оценки частоты сигнала, представленного коротким отрезком гармонического колебания не может быть низкой [4]. В [5] предложен метод минимизации методической погрешности оценки частоты отрезка моногармонического сигнала итерационной процедурой изменения формы ВФ. Для этого могут быть использованы ВФ с варьируемыми параметрами, к которым относятся ВФ Дольфа-Чебышева (ДЧ) и ВФ Кайзера-Бесселя (КБ). В то же время наиболее типичной является задача измерения частоты и амплитуды сигнала на фоне помех.

Цель настоящей работы – получение ВФ, позволяющих устранить или минимизировать методическую погрешность измерения частот и амплитуд слагаемых отрезка полигармонического сигнала, а также получение ВФ с минимальным уровнем боковых лепестков (УБЛ) спектральной плотности (СП) при заданной ширине основного лепестка и заданной скорости уменьшения УБЛ.

Метод расчёта адаптируемых весовых функций

ВФ, которые позволяют изменять их параметры для получения заданных спектральных свойств назовём адаптируемыми ВФ (АВФ).

При спектральном анализе за оценку частоты наиболее часто принимают частоту, соответствующую максимуму спектра сигнала [6]. В соответствии с таким определением для оценки частоты сигнала необходимо решить уравнение

$$\frac{d}{dx}\left|\sum_{i=1}^{N_c} e^{j(\Phi_i-\Phi_1)} S_i(x-x_i)+\sum_{i=1}^{N_c} e^{-j(\Phi_i+\Phi_1)} S_i(x+x_i)\right|^2=0, \quad (1)$$

где $e^{j(\Phi_i-\Phi_1)} S_i(x)$ - слагаемые СП

$$\dot{S}(x)=\int_{-\infty}^{\infty} w(t)\, u(t) \exp(-j2\pi xt)dt,$$

аргументами которых являются, соответственно, частоты $(x+x_i)$, $(x-x_i)$; $\dot{S}(x)$ – СП взвешенной выборки суммы гармонических сигнала и помехи

$$u(t)=\sum_{i=1}^{N} U_i(t)\cos[\varphi_i(t)+\Phi_i],$$

полученной на симметричном нормированном временном интервале $\lfloor -0{,}5T...0{,}5T \rfloor$; N_c - число гармонических слагаемых сигнала; $x=\omega T(2\pi)^{-1}$; $t=t_{абс}/T$ – нормированная частота сигнала и нормированное время; U_i, Φ_i – амплитуда и постоянная составляющая фазы i - го компонента сигнала; $w(t)$ – ВФ симметричная относительно середины временного интервала. Разумеется, результаты, полученные для симметричного временного интервала, будут справедливы для несимметричного временного интервала с учётом известных фазовых соотношений [7].

Будем считать, что $S_1(x_1)$ соответствует сигналу, частоту которого x_1 требуется определить.

Среди множества возможных решений уравнения (1) существует ряд частных, из которых следует, что для того чтобы оценка частоты сигнала x_1 была не смещена необходимо, чтобы на этой частоте первые производные всех мешающих слагаемых СП были равны нулю

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx} S_i(x-x_i)=0, \quad i=\overline{2,N_c}; \\ \dfrac{d}{dx} S_i(x+x_i)=0, \quad i=\overline{1,N_c}. \end{cases} \quad (2)$$

При использовании известных ВФ совокупность решений, определяемая системой уравнений (2), соответствует значениям частот, при которых совпадают положения максимума основного лепестка слагаемого спектра $S_1(x-x_1)$ с положениями экстремумов боковых лепестков слагаемых $S_1(x+x_1)$, $S_i(x-x_1)$ и $S_i(x+x_1)$. В этом случае частота x_1 для любой применяемой ВФ измеряется без погрешности независимо от фаз слагаемых сигнала. Однако погрешность оценки амплитуды сигнала определяется уровнем боковых лепестков и при использовании известных ВФ достигает экстремума, который, в частности, может совпадать с максимумом. Очевидно, что для того чтобы оценка амплитуды сигнала на частоте x_1 соответствовала истинному значению, на этой частоте должны быть равны нулю все мешающие слагаемые СП.

В общем случае можно заключить, что если мешающие слагаемые СП на заданной частоте x_1 аппроксимируются нулем на основе формулы Тейлора, то оценки частоты и амплитуды сигнала не будут смещены. Таким образом, задача устранения методической погрешности измерения частот и амплитуд слагаемых отрезка полигармонического сигнала может быть решена, если существует ВФ, форма которой может задаваться варьируемыми параметрами таким образом, чтобы на частоте каждого из N_c слагаемых сигнала СП других слагаемых были равны нулю вместе с заданным количеством M их производных, т.е. если существует не тривиальное решение системы уравнений

$$\begin{cases} S(x)\big|_{x=b_1}=0, \\ \dots\dots\dots \\ S(x)\big|_{x=b_{2N_c-1}}=0, \\ \frac{d}{dx}S(x)\Big|_{x=b_1}=0, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d}{dx}S(x)\Big|_{x=b_{2N_c-1}}=0, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d^{(M)}}{dx^{(M)}}S(x)\Big|_{x=b_1}=0, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d^{(M)}}{dx^{(M)}}S(x)\Big|_{x=b_{2N_c-1}}=0. \end{cases} \quad (3)$$

где b_i - частота задаваемого нуля СП АВФ.

Так как форма спектра отрезка гармонического сигнала с точностью до постоянного сомножителя совпадает с формой спектра ВФ [7], достаточно получить решение для заданных частот спектра ВФ, при этом $b_1=2x_1$; $b_i=|x_1-x_i|$, $i=\overline{2,N_c}$ для слагаемых СП сигнала с положительной полуоси частот; $b_i=x_1+x_i$, $i=\overline{2,N_c}$ для слагаемых СП с отрицательной полуоси частот.

Для определения возможностей исключения методических погрешностей рассмотрим ВФ, представимые тригонометрическими рядами

$$w_{sN}(t,b_1,\dots,b_{2N_c-1})=1+\sum_{n=1}^{N}a_{sn}\left(b_1,\dots,b_{2N_c-1}\right)\cos(2\pi nt), \quad (4)$$

$$w_{cN}(t,b_1,\dots,b_{2N_c-1})=\frac{1}{K}\left\{\cos(\pi\cdot t)+\sum_{n=1}^{N}a_{cn}\left(b_1,\dots,b_{2N_c-1}\right)\cos[\pi(2n+1)t]\right\}. \quad (5)$$

где $N=(2N_c-1)(M+1)$

Преобразование Фурье ВФ (4) и (5) представим, соответственно, выражениями

$$S_{sN}\left(x,b_1,\dots,b_{2N_c-1}\right)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\left[1+\sum_{n=1}^{N}a_{sn}\left(b_1,\dots,b_{2N_c-1}\right)\cos(n\pi)\frac{x^2}{x^2-n^2}\right], \quad (6)$$

$$S_{cN}(x,b_1,\dots,b_{2N_c-1})=\frac{-\cos(\pi x)}{\pi K}\left[\frac{0{,}5}{x^2-0{,}25}+\sum_{n=1}^{N}a_{cn}(b_1,\dots,b_{2N_c-1})\cos(n\pi)\frac{n+0{,}5}{x^2-(n+0{,}5)^2}\right]. \quad (7)$$

СП (6) и (7) представлены бесконечно дифференцируемым произведением сомножителей, первые из которых, соответственно, $\sin(\pi x)/\pi x$ или $\cos(\pi x)/\pi K$. Так как ни эти сомножители, ни их производные не равны нулю на произвольной частоте x, для выполнения условия равенства нулю уравнений системы (3) должны быть равны нулю вторые сомножители СП

$S_{sN}\left(x,b_1,\dots b_{2N_c-1}\right)$ и $S_{cN}(x,b_1,\dots b_{2N_c-1})$

вместе со своими производными. Тогда система уравнений (3) для ВФ (4) и (5) преобразуется, соответственно, к системам уравнений

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{N}a_{sn}\left(b_1,\dots,b_{2N_c-1}\right)\cos(n\pi)\frac{b_1^2}{b_1^2-n^2}=-1, \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{n=1}^{N}a_{sn}\left(b_1,\dots,b_{2N_c-1}\right)\cos(n\pi)\frac{b_{2N_c-1}^2}{b_{2N_c-1}^2-n^2}=-1, \\ \sum_{n=1}^{N}a_{sn}\left(b_1,\dots,b_{2N_c-1}\right)\cos(n\pi)\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{x^2-n^2}\right)\Big|_{x=b_1}=0, \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{n=1}^{N}a_{sn}\left(b_1,\dots,b_{2N_c-1}\right)\cos(n\pi)\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{x^2-n^2}\right)\Big|_{x=b_{2N_c-1}}=0, \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{n=1}^{N}a_{sn}\left(b_1,\dots,b_{2N_c-1}\right)\cos(n\pi)\frac{d^{(M)}}{dx^{(M)}}\left(\frac{x^2}{x^2-n^2}\right)\Big|_{x=b_1}=0, \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{n=1}^{N}a_{sn}\left(b_1,\dots,b_{2N_c-1}\right)\cos(n\pi)\frac{d^{(M)}}{dx^{(M)}}\left(\frac{x^2}{x^2-n^2}\right)\Big|_{x=b_{2N_c-1}}=0. \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{N}a_{cn}\left(b_1,\dots,b_{2N_c-1}\right)\cos(n\pi)\frac{(n-0{,}5)^2}{b_1^2-(n-0{,}5)^2}\Bigg|=-1, \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{n=1}^{N}a_{cn}\left(b_1,\dots,b_{2N_c-1}\right)\cos(n\pi)\frac{(n-0{,}5)^2}{b_{2N_c-1}^2-(n-0{,}5)^2}=-1, \\ \sum_{n=1}^{N}a_{cn}\left(b_1,\dots,b_{2N_c-1}\right)\cos(n\pi)\frac{d}{dx}\left[\frac{(n-0{,}5)^2}{x^2-(n-0{,}5)^2}\right]\Bigg|_{x=b_1}=0, \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{n=1}^{N}a_{cn}\left(b_1,\dots,b_{2N_c-1}\right)\cos(n\pi)\frac{d}{dx}\left[\frac{(n-0{,}5)^2}{x^2-(n-0{,}5)^2}\right]\Bigg|_{x=b_{2N_c-1}}=0, \\ \sum_{n=1}^{N}a_{cn}\left(b_1,\dots,b_{2N_c-1}\right)\cos(n\pi)\frac{d^{(M)}}{dx^{(M)}}\left[\frac{(n-0{,}5)^2}{x^2-(n-0{,}5)^2}\right]\Bigg|_{x=b_1}=0, \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{n=1}^{N}a_{cn}\left(b_1,\dots,b_{2N_c-1}\right)\cos(n\pi)\frac{d^{(M)}}{dx^{(M)}}\left[\frac{(n-0{,}5)^2}{x^2-(n-0{,}5)^2}\right]\Bigg|_{x=b_{2N_c-1}}=0. \end{cases} \quad (9)$$

При $N \ge 2$ решениями систем (8), (9) относительно коэффициентов, соответственно, $a_{sn}(b_1,...,b_{2N_c-1})$ и $a_{cn}(b_1,...,b_{2N_c-1})$ являются:

$$a_{sn}(b_1,...,b_{2N_c-1}) = (-1)^{n+N} \cdot \prod_{\substack{k=1\\k\ne n}}^{N} \frac{k^2}{n^2-k^2} \cdot \left[\prod_{i=1}^{2N_c-1}\left(1-\frac{n^2}{b_i^2}\right)\right]^{M+1}, \quad (10)$$

$$a_{cn}(b_1,...,b_{2N_c-1}) =$$
$$\frac{(-1)^{n+N}}{2n+1}\prod_{\substack{k=1\\k\ne n}}^{N}\frac{k^2+k}{(n^2+n)-(k^2+k)} \cdot \left[\prod_{i=1}^{2N_c-1}\left(\frac{b_i^2-(n+0,5)^2}{b_i^2-0,25}\right)\right]^{M+1}. \quad (11)$$

Для $N=1$ $\quad a_{s1}(b) = \left(1-\frac{1^2}{b^2}\right)$ и $a_{c1}(b) = \frac{1}{3}\left(\frac{b^2-2,25}{b^2-0,25}\right)$.

В задачах одновременного оценивания частоты и амплитуды сигнала выражение для нормирующего множителя определяется из условия равенства единице нормированной СП ВФ на нулевой частоте.

Спектральные свойства АВФ

Отметим некоторые свойства АВФ, которые в наибольшей степени влияют на возможность снижения методической погрешности и свойства, использование которых позволяет получать ВФ с оптимальными параметрами.

1. Положение нулевых значений (нулей) СП АВФ определяется положением нулей двух сомножителей. Положение нулей первого сомножителя $\sin(\pi x)$ или $\cos(\pi x)$, соответственно, для СП (6) или (7) периодическое и не влияет на положение нулей второго сомножителя, которым определяется огибающая боковых лепестков СП (6) или (7).

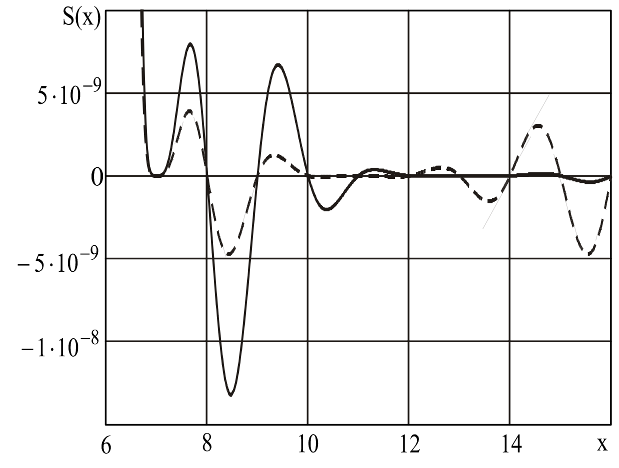

Рис. 1 – СП АВФ в области ближних боковых лепестков

Независимость положений нулей СП (6), (7) АВФ, определяемых, соответственно, сомножителем $\sin(\pi x)$ или $\cos(\pi x)$ от положения задаваемых нулей b_1, b_2,..., b_{2N_c-1}, позволяет для краткости называть эти положения нулей стационарными, а положения нулей вторых сомножителей – варьируемыми.

В частном случае системы уравнений (3) при $M=0$ для АВФ с N варьируемыми параметрами получаются решения, которые позволяют выполнить формирование нулевых значений СП на N задаваемых частотах b_1, b_2,..., b_N. Совмещение на одной частоте m нулей СП приводит к образованию на этой частоте нулей $m-1$ производных. В зависимости от решаемой задачи это свойство позволяет применять не равный порядок нулей на различных задаваемых частотах и использовать при этом более компактное выражение для коэффициентов $a_{sn}(b_1,...b_N)$ и $a_{cn}(b_1,...b_N)$

$$a_{sn}(b_1,...b_N) = (-1)^{n+N} \cdot \prod_{\substack{k=1\\k\ne n}}^{N} \frac{k^2}{n^2-k^2} \cdot \prod_{i=1}^{N}\left(1-\frac{n^2}{b_i^2}\right), \quad (12)$$

$$a_{cn}(b_1,...b_N) =$$
$$\frac{(-1)^{n+N}}{2n+1}\prod_{\substack{k=1\\k\ne n}}^{N}\frac{k^2+k}{(n^2+n)-(k^2+k)}\prod_{i=1}^{N}\left(\frac{b_i^2-(n+0,5)^2}{b_i^2-0,25}\right), \quad (13)$$

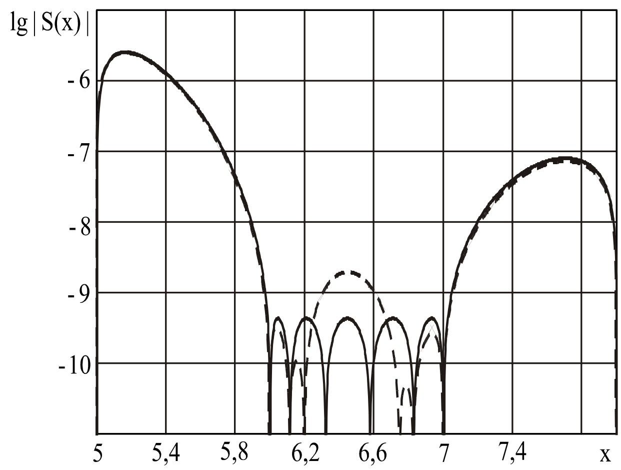

Рис. 2 – Область боковых лепестков СП АВФ

Возможность задания нулей СП на любых частотах иллюстрируется рис. 1 с СП АВФ (4) при $N=6$ и заданными нулями третьего порядка на двух относительных частотах: 7 и 13 для сплошной кривой, 7 и 11 для пунктирной кривой.

2. Уровень боковых лепестков зависит от распределения по частоте сформированных нулевых значений СП и их кратности. Увеличение интервала между частотами соседних нулей, определяющего ширину бокового лепестка в этом интервале, приводит к возрастанию УБЛ в этом интервале и влияет на уровень соседних боковых лепестков. Это свойство иллюстрируется рис. 2 для СП АВФ (4) с $N=4$, на котором для сплошной кривой, кроме нулей, на частотах $N+k$, где $k=1;2;....$, определяемых первым сомножителем $\sin(\pi x)$, заданы нули на частотах $b_1=6{,}1148135$, $b_2=6{,}319898$, $b_3=6{,}575851$, $b_4=6{,}828999$ и получен минимальный УБЛ в интервале частот [6, 7], а для пунктирной кривой нули второго сомножителя заданы на частотах $b_1=6{,}1148135$, $b_2=6{,}2$, $b_3=6{,}75$, $b_4=6{,}828999$. В результате, интервал частот между центральными нулями увеличен и уровень бокового лепестка в этом интервале также увеличен. Но при этом ширина соседних боковых лепестков и их уровень существенно уменьшились. Постепенно затухающее влияние изменения ширины бокового лепестка распространяется на соседние боковые лепестки (в интервалах от 5 до 6 и от 7 до 8).

3. Асимптотическая скорость уменьшения УБЛ СП (6) или (7) ($C_S = 20\lg\lim_{x\to\infty}|S(2x)/S(x)|$ в децибелах на октаву) составляет, соответственно, $(6+12N_\infty)$ дБ/окт и $(12+12N_\infty)$ дБ/окт, где N_∞ - число нулей, заданных на бесконечной частоте или на частоте $b >> N$.

Методика расчёта ВФ на основе АВФ с минимальным УБЛ при заданных ширине основного лепестка и скорости уменьшения УБЛ

Выбор параметров ВФ особенно важен при спектральном анализе для измерения параметров отдельных тонов в сигнале, содержащем несколько гармоник. Для того, чтобы динамический диапазон измеряемых сигналов был максимален, ПФ применяемой ВФ должно иметь узкий главный лепесток и низкий УБЛ [1]. Применение только такого критерия к выбору ВФ неизбежно приводит к использованию ВФ ДЧ. Однако из-за когерентного суммирования боковых лепестков его СП, имеющих постоянный уровень, она не подтверждает своих высоких характеристик при измерении параметров нескольких сигналов различных частот. Поэтому кроме минимального УБЛ СП при заданной ширине основного лепестка важным параметром ВФ является скорость уменьшения УБЛ СП.

Однозначная связь формы СП АВФ с положением задаваемых нулей позволяет на основе АВФ получать ВФ с оптимальными параметрами. Считаем, что задаются: ширина ΔF_0 основного лепестка СП на нулевом уровне, скорость C_S уменьшения УБЛ и количество N слагаемых ВФ. Необходимо определить положения варьируемых нулей АВФ таким образом, чтобы УБЛ при этом был минимален.

Учитывая, что при $b_1 < N$ один из нулей определяет ширину основного лепестка СП и его положение неизменно, а число N_∞ определяется заданной C_S, число варьируемых положений нулей АВФ будет составлять $N_{вар} = N - (1 + N_\infty)$. Тогда для минимизации УБЛ, целевую функцию можно записать в виде:

$$\max S_N\left(x, b_2, b_3, .. b_{N_{вар}}, N\right) \Rightarrow \min_{b_i} \qquad (14)$$

При решении этой задачи в качестве эталона по ширине основного лепестка и УБЛ можно использовать СП ВФ ДЧ, для которой предельные значения соотношений ширины основного лепестка и УБЛ определены фундаментальным свойством полиномов Чебышева.

Для поиска оптимальных параметров могут быть использованы стандартные программы, например, программа многомерной оптимизации fminsearch в системе программирования МАТЛАВ.

В таблицах 1, 2 приведены ВФ с оптимизированными параметрами большинство из которых не имеют аналогов. При оптимизации задавался ряд значений исходных параметров - ΔF_0 = 2,8; 3,2; 3,6; 4; 5; 6; 7; 8; 9, скорость уменьшения УБЛ (6 дБ/окт для СП АВФ (4) и 12 дБ/окт для СП АВФ (5)) и от двух до четырёх варьируемых параметров АВФ. Отметим две закономерности в свойствах СП оптимальных ВФ. Во-первых, УБЛ СП ВФ снижается при увеличении числа слагаемых ВФ и асимптотически стремится к УБЛ СП ВФ ДЧ. Во-вторых, ширина основного лепестка СП на любом уровне, отличном от нуля, уменьшается с ростом числа слагаемых ВФ и асимптотически стремится к ширине основного лепестка СП ВФ ДЧ. При увеличении C_S обе закономерности проявляются сильнее.

Таблица 1.

ВФ $w_{SN}(*)$, $C_S = 6$ дБ/окт, $N_\infty = 0$

N	Частоты b_i	УБЛ, дБ	ΔF_6
2	1,4; 2,0632	-27,09	1,486
4	1,4; 2,0444;2,94; 3,9281	-27,637	1,4794
2	1,6; 2,2083	-32,9795	1,6058
4	1,6; 2,1788; 3,0232; 3,9739	-33,4899	1,6021
2	1,8; 2,4041	-38,2672	1,7165
4	1,8; 2,3216; 3,1144; 4,0246	-39,387	1,7123
2	2; 2,6491	-43,1875	1,8188
4	2; 2,4758; 3,2257; 4,1180	-45,1383	1,8153
2	2,25; 3,0493	-49,421	1,9368
4	2,25; 2,6825; 3,3926; 4,3057	-52,0279	1,9371
2	2,5; 3,7226	-56,6824	2,0518
4	2,5; 2,8995; 3,5797; 4,5672	-58,6678	2,0521
3	3; 3,3524; 5,3290	-71,4828	2,2638
3	3,5; 4,0150; 6,0405	-85,2222	2,4257
4	4; 4,2803; 5,0893; 8,7183	-98,1739	2,6243
4	4,5; 4,858; 6,093; 10,661	-110,903	2,7799

Таблица 2.

ВФ $w_{CN}(*)$, $C_C = 12$ дБ/окт, $N_\infty = 0$

N	Частоты b_i	УБЛ, дБ	ΔF_6
3	1,4; 2,1577; 3,1993	-24,1852	1,5265
4	1,4; 2,1212; 3,1065; 4,2018	-25,1503	1,5138
2	1,6; 2,3355	-28,3002	1,6731
4	1,6; 2,2518; 3,1872; 4,2475	-30,6118	1,6249
2	1,8; 2,4514;	-34,1185	1,7843
4	1,8; 2,3911; 3,2759; 4,2984	-36,1187	1,7591
2	2; 2,2573	-40,2450	1,8816
4	2; 2,5377; 3,3720; 4,3540	-41,657	1,8647
2	2,25; 2,7549	-47,9658	1,9905
4	2,25; 2,7292; 3,5013; 4,4294	-48,7074	1,9845
2	2,5; 3,0309	-54,3019	2,0959
3	2,5; 2,9301; 3,6503	-55,8631	2,0936
4	2,5; 2,9281; 3,6396; 4,5107	-55,9594	2,0929
2	3; 3,8862	-67,8151	2,2880
3	3; 3,3765; 4,1783	-69,1854	2,2941
4	3; 3,3540; 3,9742; 4,8074	-70,2846	2,2912
4	3,5; 3,8116; 4,3845; 5,4297	-83,5472	2,4769
3	4; 4,4703; 6,3214	-95,412	2,6368
4	4; 4,2709; 4,7753; 6,6762	-97,3896	2,6480

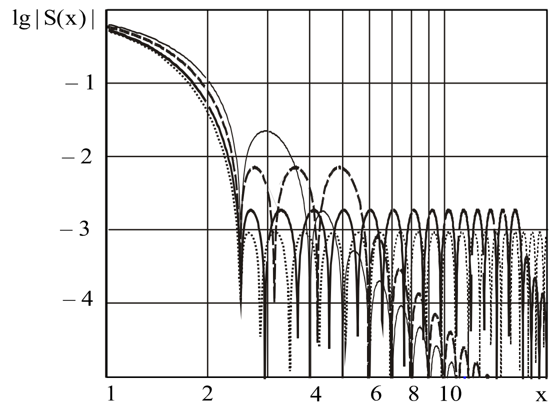

Рис. 3 – СП ВФ Дольфа-Чебышева и СП АВФ

Эти закономерности на рис.3 иллюстрируются СП оптимальных ВФ, полученных из АВФ (4) с заданными: нормированной шириной основного лепестка по нулевому уровню 5 бин, скоростью уменьшения УБЛ $C_S = 30$ дБ/окт и $N = 3$ (тонкая сплошная кривая), $N = 5$ (пунктир), $N = 16$ (жирная сплошная кривая). ВФ для $N = 3$, $N = 5$ и $N = 16$ описываются параметрами w_{S3}(t; 2,5; ∞; ∞), w_{S5}= (t; 2,5; 3,1604; 4,2408; ∞; ∞) и w_{S16}(t; 2,5; 2,944937; 3,677263; 4,561547; 5,526585; 6,53828; 7,579867; 8,642864; 9,723159; 10,819388; 11,932493; 13,066362; 14,230791; 15,454889; ∞; ∞) соответственно. Видно снижение УБЛ СП ВФ и уменьшение ширины основного лепестка при увеличении N. Пределом являются УБЛ и ширина основного лепестка СП ВФ ДЧ (точечная кривая). Но существенные недостатки ВФ ДЧ – наличие δ-функций на краях временного интервала и, соответственно, незатухающий УБЛ СП в приведённых ВФ исключены.

Характерный вид СП оптимальных ВФ по приведённому критерию – постоянный УБЛ в интервале нормированных частот $x \le N$ и уменьшающийся с заданной скоростью C_s УБЛ при $x > N$. Однако оптимизация распределения нулей СП АВФ возможна не только по минимуму УБЛ, но и по минимуму отклонения от заданного закона изменения УБЛ.

Сравнение спектральных свойств АВФ со свойствами лучших известных ВФ [1, 2, 3, 8] показывает, что АВФ с оптимальными параметрами имеют существенно меньший УБЛ. Разница доходит до 14 дБ. В качестве примера на рис. 4 приведены логарифмы модулей СП лучшей из известных ВФ для $\Delta F_0 = 4{,}744$ и $C_S = 6$ дБ/окт [8] (сплошная линия) и оптимальной ВФ $w_{C3}(t;2{,}372;2{,}829;3{,}578)$ (пунктир).

Приведённые в таблицах частоты задаваемых нулей и получаемые параметры СП ВФ округлены до 4-х знаков. В общем случае такие округления увеличивают минимально достижимый УБЛ не более чем на 0,01 дБ.

Коэффициенты (12), (13) по заданным в таблицах частотам могут быть пересчитаны в числовые.

Отметим, что большинство традиционных ВФ являются частными случаями полученных АВФ при определённых фиксированных значениях параметров последних. Это утверждение легко иллюстрируется на ряде широко используемых традиционных ВФ. Подстановка нулевых значений b_i СП любой известной ВФ, представленной тригонометрическим рядом в выражение $w_S(t, b_1, ..b_2, N)$, приводит к совпадению СП на любой частоте и совпадениям известной ВФ с АВФ.

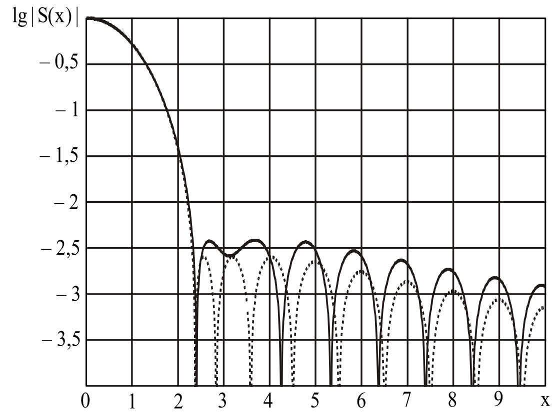

Рис.4 – СП алгебраической ВФ [8] и СП АВФ

И наоборот, использование коэффициентов при соответствующих слагаемых ряда позволяет получить значения частот b_i. Например, для популярной ВФ Блэкмана [1] (вида $w_{S2}(t, b_1, b_2)$) с коэффициентами $a_1 = 0{,}5/0{,}42$ и $a_2 = 0{,}08/0{,}42$ из (4) и (12) нетрудно получить, что $b_1 = \sqrt{28/3}$ и $b_2 = \infty$. Весовую функцию Наттолла

$$w(t) = 0{,}363581 + 0{,}4891775\cos 2\pi t +$$
$$+0{,}1365995\cos 4\pi t + 0{,}0106411\cos 6\pi t$$

можно получить, задав b_1=4,28200081517, b_2=5,082904286136, b_3=8,73773653982.

Выводы

Результаты исследования показывают, что по основным параметрам, определяющим погрешность оценки частоты и амплитуды сигнала, АВФ и ВФ с оптимизированными параметрами, полученные на основе АВФ, имеют преимущество перед известными ВФ.

АВФ и ВФ с оптимизированными параметрами могут использоваться не только в спектральном анализе, но и в других прикладных областях: в задачах синтеза различных измерительных устройств, интерполяции сигналов и других приложениях, для которых представленная работа может стать отправным пунктом.

Литература

1. Хэррис Дж. // ТИИР – 1978. – Т. 66. – №1. – С. 60.
2. Дворкович А.В. // Цифровая обработка сигналов. – 2001. – № 2. – С. 49.
3. Кравченко В.Ф. Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям. - М.: Радиотехника, 2003.
4. Иванов Ю.Е. // Проблемы управления и информатики. – 1998. – № 2. – С. 102.
5. Давыдочкин В.М., Езерский В.В. // Цифровая обработка сигналов. –2005. – № 3. – С. 22.
6. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. - М.: Радио и связь, 1991.
7. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. - М.: Радио и связь, 1986.
8. Кириллов С.Н., Соколов М.Ю., Стукалов Д.Н. // Радиотехника. –1996. – № 6. – С. 36.