УДК 621.396.2

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ

Просочкин А.С.

Рассматривается изменение спектра сигнала, аппроксимируемого полиномиальным сплайном произвольной степени m, представленным через базисные B-сплайны, коэффициенты которых определяются в виде взвешенной суммы произведений отсчётов исходного сигнала на соответствующие значения B-сплайнов.

Для приближения, восстановления и фильтрации сигналов, заданных в виде функций времени $f(t)$ на равномерной сетке t_i ($i=-\infty, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, +\infty$, $\Delta t = t_i - t_{i+1} = const$ - период дискретизации сигнала) значениями $f(t_i)$ с некоторой погрешностью, широко используются методы полиномиальной сплайн-аппроксимации [1]. Распространённым способом построения полиномиальных сплайнов произвольной степени m является их представление через базисные *B*-сплайны в виде [1]

$$S^m(t) = \sum_i C_i \cdot B_i^m(t), \tag{1}$$

где C_i - коэффициенты аппроксимации;

$B_i^m(t)$ - базисные *B*-сплайны степени *m,* которые имеют отличные от нуля значения на $(m+1)$ участках сплайна, называемых интервалом носителем *B*-сплайна.

Значения *B*-сплайна на границах участков называются его узлами.

В общем случае каждый участок базисного *B*-сплайна может включать d интервалов $\Delta t = t_i - t_{i+1}$ ($d=1, 2, 3, \ldots$). На рис. 1 приведено множество *B*-сплайнов третьей степени ($m=3$) при $d=2$.

Спектр дискретного сигнала $f(t)$, заданного в виде значений $f_i = f(t_i)$ на сетке t_i, определяется как [2]

$$\dot{F}(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i \cdot e^{-j\omega i}. \tag{2}$$

Из формулы (2) следует, что спектр дискретного сигнала является периодическим с периодом равным 2π.

Спектр сплайна (1), заданного в виде значений $S^m(t_i)$ на сетке t_i, принимает вид

$$\dot{F}_{Sm}(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} S^m(t_i) \cdot e^{-j\omega i}. \tag{3}$$

Так как при аппроксимации сигнала полиномиальным сплайном происходит изменение спектра, рассмотрим вопрос, как изменится спектр $\dot{F}_{Sm}(\omega)$ сплайна $S^m(t)$ произвольной степени *m*, заданного в виде значений $S^m(t_i)$ на равномерной сетке t_i по отношению к спектру $\dot{F}(\omega)$ исходного сигнала $f(t_i)$ ($i=-\infty, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, +\infty$).

Значение сплайна степени m в момент времени t_i при $d=1$ определяется в виде [1]

$$S^m(t_i) = \sum_{k=-(l-1)}^{(l-1)} C_{i+k} \cdot B_{-k}^m,$$

где l – число узлов базисного *B*-сплайна на половине интервала носителя, в которых его значения отличны от нуля;

B_k^m – величина *B*-сплайна степени m в k-м узле его интервала носителя.

Величина l зависит от степени сплайна и определяется выражением

$$l = \begin{cases} \dfrac{m+1}{2} & \text{- для сплайнов нечётной степени } m, \\ \dfrac{m}{2}+1 & \text{- для сплайнов чётной степени } m. \end{cases} \tag{4}$$

Если каждый участок включает d интервалов Δt, то величина интервала носителя *B*-сплайна равна $d \cdot \Delta t \cdot (m+1)$, а значение сплайна степени m в момент времени t_i определяется по формуле

$$S^m(t_i) = \sum_{k=-(l-1)}^{(l-1)} C_{i+d\cdot k} \cdot B_{-d\cdot k}^m. \tag{5}$$

Например, для кубического сплайна ($m=3$, $l=2$) при $d=2$ (см. рис. 1) из формулы (5) получим

$$S^3(t_i) = C_{i-2} \cdot B_2^3 + C_i \cdot B_0^3 + C_{i+2} B_{-2}^3.$$

Значения B_2^3, B_0^3, B_{-2}^3 отмечены на рис.1 точками.

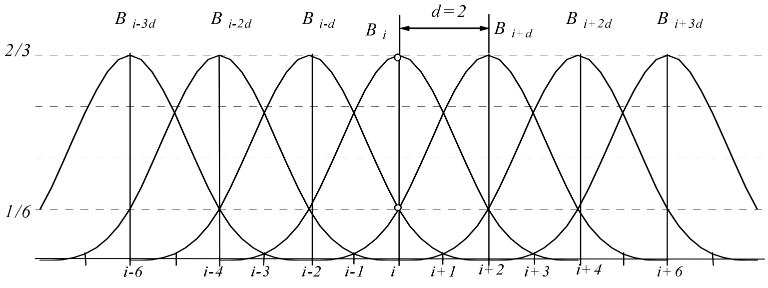

Рис. 1. Множество базисных кубических B-сплайнов при d=2.

Подставив значения $S^m(t_i)$ из формулы (5) в формулу (3), получим спектр полиномиального сплайна произвольной степени m в виде

$$\dot{F}_{Sm}(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-(l-1)}^{(l-1)} C_{i+d\cdot k}\cdot B^{m}_{-d\cdot k}\right)\cdot e^{-j\omega i}. \qquad (6)$$

Для определения полиномиальных сплайнов (1) применяются разные способы вычисления коэффициентов C_i , основанные на минимизации функционалов, характеризующих отклонение сплайна $S^m(t_i)$ от исходного сигнала $f(t_i)$ [1]. В общем случае вычисление коэффициентов C_i производится путём решения систем алгебраических уравнений и требует значительных затрат. На практике широко используются способы приблизительного вычисления коэффициентов с помощью явных формул [3]. В таких случаях значение коэффициента C_i вычисляется по значению исходного сигнала f_i в точке t_i и значениях сигнала в точках, близких к t_i.

Рассмотрим случай, когда коэффициент C_i, соответствующий i-му B-сплайну $B_i^m(t)$, определяется в виде взвешенной суммы произведений отсчётов исходного сигнала, которые попадают в интервал носитель i-го B-сплайна, на соответствующие значения B-сплайна (далее индекс m в обозначении B-сплайна опущен)

$$C_i = \frac{1}{d}\cdot\sum_{n=-(d\cdot l-q)}^{(d\cdot l-q)} B_n\cdot f_{i+n}\,.$$

где q – постоянная величина, значение которой зависит от m и d.

Для сплайнов нечётной степени m: $q=1$.

Для сплайнов чётной степени m:

$$q=\begin{cases}\dfrac{d+1}{2} & \text{- если } d \text{ - нечётное число,}\\[2mm] \dfrac{d}{2}+1 & \text{- если } d \text{ - чётное число.}\end{cases}$$

Число $2\cdot(d\cdot l\text{-}q)+1$ – определяет количество значений исходного сигнала, попадающих в интервал носитель соответствующего B-сплайна.

Таким образом

$$S^m(t_i) = \frac{1}{d}\cdot\sum_{k=-(l-1)}^{(l-1)} B_{-d\cdot k}\cdot\sum_{n=-(d\cdot l-q)}^{(d\cdot l-q)} B_n\cdot f_{i+d\cdot k+n}\,. \qquad (7)$$

С учётом формулы (7) спектр полиномиального сплайна произвольной степени m, заданного на сетке t_i своими значениями $S^m(t_i)$, определяется выражением

$$\dot{F}_{Sm}(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{d}\cdot\sum_{k=-(l-1)}^{(l-1)} B_{-d\cdot k}\cdot\sum_{n=-(d\cdot l-q)}^{(d\cdot l-q)} B_n\cdot f_{i+d\cdot k+n}\right\}\cdot e^{-j\omega i}. \qquad (8)$$

Учитывая свойство симметрии базисных B-сплайнов

$$B_n = B_{-n}\,,\quad n\in\left[-(d\cdot l-q);+(d\cdot l-q)\right] \qquad (9)$$

и группируя слагаемые в сумме по k, получим

$$\dot{F}_{Sm}(\omega)= \frac{1}{d}\cdot\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left\{B_{d(l-1)}\cdot\left[\sum_{n=-(d\cdot l-q)}^{(d\cdot l-q)} B_n\cdot f_{i-d(l-1)+n}+\sum_{n=-(d\cdot l-q)}^{(d\cdot l-q)} B_n\cdot f_{i+d(l-1)+n}\right]+\right.$$

$$+B_{d(l-2)}\cdot\left[\sum_{n=-(d\cdot l-q)}^{(d\cdot l-q)} B_n\cdot f_{i-d(l-2)+n}+\sum_{n=-(d\cdot l-q)}^{(d\cdot l-q)} B_n\cdot f_{i+d(l-2)+n}\right]+\dots$$

$$\left.\dots+B_0\cdot\left[\sum_{n=-(d\cdot l-q)}^{(d\cdot l-q)} B_n\cdot f_{i+n}\right]\right\}\cdot e^{-j\omega i}\,. \qquad (10)$$

Выполнив преобразования в квадратных скобках формулы (10) с учётом свойства симметрии (9) базисных B-сплайнов и применив перестановку операций суммирования, получим

$$\dot{F}_{Sm}(\omega)=$$

$$\frac{1}{d}\cdot\left\{B_{d\cdot(l-1)}\cdot\left[\sum_{n=1}^{(d\cdot l-q)} B_n\cdot\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(f_{i-d\cdot(l-1)+n}+f_{i+d\cdot(l-1)-n}\right)\cdot e^{-j\omega i}+\right.\right.$$

$$+\sum_{n=1}^{(d\cdot l-q)} B_n\cdot\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(f_{i-d\cdot(l-1)+n}+f_{i+d\cdot(l-1)-n}\right)\cdot e^{-j\omega i}+$$

$$\left.+B_0\cdot\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(f_{i-d\cdot(l-1)}+f_{i+d\cdot(l-1)}\right)\cdot e^{-j\omega i}\right]+$$

$$B_{d\cdot(l-2)}\cdot\left[\sum_{n=1}^{(d\cdot l-q)} B_n\cdot\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(f_{i-d\cdot(l-2)+n}+f_{i+d\cdot(l-2)-n}\right)\cdot e^{-j\omega i}+\right.$$

$$+\sum_{n=1}^{(d\cdot l-q)} B_n\cdot\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(f_{i-d\cdot(l-2)+n}+f_{i+d\cdot(l-2)-n}\right)\cdot e^{-j\omega i}+$$

$$\left.+B_0\cdot\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(f_{i-d\cdot(l-2)}+f_{i+d\cdot(l-2)}\right)\cdot e^{-j\omega i}\right]+\cdots$$

$$\left.\cdots+B_0\cdot\left[\sum_{n=1}^{(d\cdot l-q)} B_n\cdot\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(f_{i+n}+f_{i-n}\right)\cdot e^{-j\omega i}+B_0\cdot\sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i\cdot e^{-j\omega i}\right]\right\}. \qquad (11)$$

Можно показать, что с учётом свойств преобразования Фурье для сигнала с задержкой [2], которое утверждает, что спектр сигнала, сдвинутого во времени на величину τ, соответствует спектру исходного сигнала, умноженному на комплексную экспоненту $e^{-j\omega\tau}$, формула (11) преобразуется к виду

$$\dot{F}_{Sm}(\omega)=\dot{F}(\omega)\cdot\frac{4}{d}\cdot\left[\frac{B_0}{2}+\sum_{k=1}^{(l-1)} B_{d\cdot k}\cdot COS(\omega\cdot d\cdot k)\right]\cdot\left[\frac{B_0}{2}+\sum_{n=1}^{(d\cdot l-q)} B_n\cdot COS(\omega\cdot n)\right]. \qquad (13)$$

Таким образом, формула (13), устанавливает связь спектра исходного аппроксимируемого сигнала и спектра соответствующего ему полиномиального сплайна произвольной степени, который характеризуется произведением двух функций, определяемых в виде рядов Фурье.

Число l членов первого ряда пропорционально степени m полиномиального сплайна. Коэффициентами данного ряда являются значения функции $B_i^m(t)$, соответствующие узлам B-сплайна. Число $(d\cdot l\text{-}q)$ членов второго ряда зависит от степени m

сплайна и числа d периодов дискретизации, которые образуют интервал между узлами сплайна. Коэффициентами второго ряда являются значения B-сплайнов, соответствующие отсчётам $f(t_i)$ исходного сигнала.

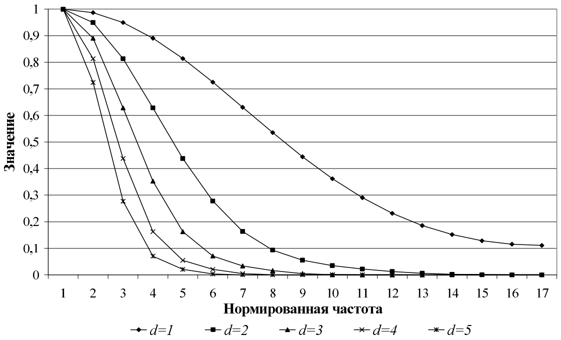

Рис. 2 Амплитудный спектр одиночной импульсной функции (14), приближённой сплайном степени m=3.

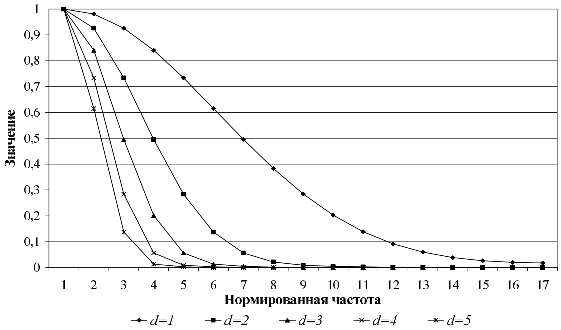

Рис. 3 Амплитудный спектр одиночной импульсной функции (14), приближённой сплайном степени m=5.

Для численного эксперимента в качестве исходного дискретного сигнала $f_1(t_i)$ взята одиночная импульсная функция [2], которая задана одним значением в центре интервала $t \in [t_0, t_N]$. Значение сигнала $f_1(t_i)$ выбрано из условия

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{0}^{N} f_1(t_i) = 1 \cdot$$

Следовательно,

$$f_1(t_i) = \begin{cases} N \quad \text{- при} \quad i = \dfrac{N}{2}, \\ 0 \quad \text{- при} \quad i \neq \dfrac{N}{2}. \end{cases} \tag{14}$$

Такая функция имеет равномерный амплитудный спектр с амплитудой, равной единице для всех составляющих спектра.

Амплитудные спектры полиномиальных сплайнов (7) различных степеней m, приближающих одиночную импульсную функцию (14), определённые в соответствии с формулой (13) для $N=64$ и разных значений d, приведены на рис. 2-4.

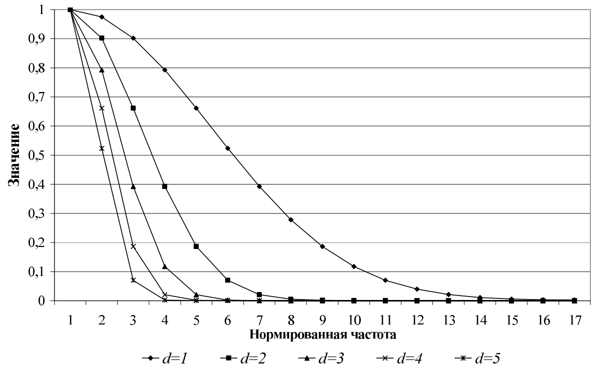

Рис. 4 Амплитудный спектр одиночной импульсной функции (14), приближённой сплайном степени m=7.

При этом амплитудные спектры соответствующих полиномиальных сплайнов, определённые с помощью дискретного преобразования Фурье, полностью совпадают со спектрами, приведёнными на рис. 2-4.

Таким образом, спектр полиномиального сплайна произвольной степени, представленного через базисные B-сплайны, коэффициенты которых определяются в виде взвешенной суммы произведений отсчётов исходного сигнала на соответствующие значения B-сплайнов, связан со спектром соответствующего исходного сигнала формулой (13), а амплитудный спектр сплайна в отличие от амплитудного спектра исходного сигнала, имеет затухающий характер, следовательно операция восстановления может рассматриваться как низкочастотная фильтрация сигнала.

Литература

1. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
2. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов.– СПб.: Питер, 2002.– 608с.
3. Гребенников А.И. Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений. – М.: МГУ, 1983. – 208 с.