

ЦИФРОВАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ В ПРОМЫШЛЕННЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Прохоренков А.М., Качала Н.М.

Введение

Постановка задачи

В информационно-измерительных комплексах автоматизированных систем управления технологическими процессами (АСУ ТП) приходится решать задачи измерения параметров зашумленных сигналов по одной реализации в реальном времени. Для выделения полезного сигнала на фоне помехи применяют различные алгоритмы фильтрации. Однако применение многих из них в измерительных системах АСУ ТП ограничено, поскольку особенностями данных систем являются разнообразие детерминированных составляющих наблюдаемых сигналов, изменение во времени принятых для расчета фильтров исходных предпосылок и отсутствие достаточного количества информации о свойствах объектов управления и условиях их функционирования.

В этой ситуации актуальной становится задача синтеза алгоритмов обработки случайных процессов, позволяющих найти наилучшую оценку полезной детерминированной компоненты на основании измерения наблюдаемого сигнала.

Процедуре синтеза новых алгоритмов всегда предшествует анализ применимости известных методов для решения той или иной задачи. Наиболее широкое применение для решения задач фильтрации в различных областях научных исследований и прикладных сферах нашли фильтры Калмана. На практике также часто используется простой по структуре фильтр скользящего среднего. Необходимо с учетом особенностей промышленных систем управления исследовать указанные методы фильтрации для включения их в процедуру обработки случайных процессов.

Случайные процессы, протекающие в объектах систем управления, можно представить как результат совместного действия детерминированного полезного сигнала и стационарной помехи. Различают следующие модели сигналов [1]:

$$\text{аддитивная модель } y(t) = x_1(t) + v(t); \quad (1)$$

$$\text{мультипликативная модель } y(t) = x_2(t)v(t); \quad (2)$$

$$\text{аддитивно-мультипликативная модель } y(t) = x_1(t) + x_2(t)v(t), \quad (3)$$

где $x_1(t)$, $x_2(t)$ – детерминированные функции времени, $v(t)$ – стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием $m_v = 0$ и постоянной дисперсией D_v .

Модель схемы оценки детерминированной составляющей x_1 аддитивного процесса (1) представлена на рис. 1.

Представлены результаты исследования качества фильтрации синусоидального, линейного и экспоненциального зашумленных сигналов фильтром Калмана и фильтром скользящего среднего. Предложена процедура обработки случайных процессов с использованием фильтра скользящего среднего, в которой фильтрации предшествует классификация наблюдаемого процесса, позволяющая определить класс процесса (стационарный, нестационарный), вид процесса (аддитивный, мультипликативный, аддитивно-мультипликативный) и тип детерминированных составляющих случайных процессов.

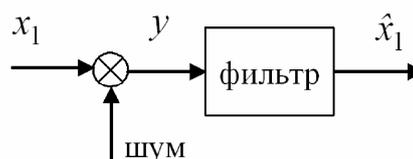


Рис. 1.

В соответствие с принятой схемой оценки (рис. 1) модель наблюдаемой системы может быть описана конечномерными уравнениями:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_{k+1/k} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (4)$$

В уравнениях приняты следующие условные обозначения: \mathbf{x}_k – вектор состояния системы, \mathbf{y}_k – вектор измерения системы в момент времени $t = t_k$; \mathbf{v}_k – гауссовский белый шум измерения со статистическими характеристиками: математическое ожидание $M[\mathbf{v}_k] = 0$ и $cov(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j) = \mathbf{R}_k \delta_{kj}$ (\mathbf{R}_k – положительно определенная симметричная матрица интенсивности); $\mathbf{A}_{k+1/k}$ – переходная матрица системы; \mathbf{H}_k – матрица измерений. В модели (4) предполагается, что векторы \mathbf{x}_k и \mathbf{v}_k взаимно некоррелированные.

Для системы уравнений (4) необходимо получить оценки вектора состояния \mathbf{x} с помощью фильтра Калмана и фильтра скользящего среднего для синусоидального, линейного и экспоненциального зашумленных сигналов.

Фильтрация во временной области дает оценку математического ожидания случайного процесса. Обычно наблюдаемый сигнал представляется в виде аддитивной модели (1), которая не всегда адекватна реальному процессу. Ошибка выбора модели процесса приводит к возникновению дополнительной методической погрешности при измерениях математического ожидания.

В силу этого возникает задача анализа погрешности оценки математического ожидания измеряемого процесса, вызванной неправильной классификацией наблюдаемого процесса.

С учетом принятых допущений математическое ожидание случайных процессов, представленных моделями (1 и 3), в момент времени t_k определяется детерминированной составляющей $x_{1,k}$. В качестве меры точности оценки $\hat{x}_{1,k}$ предлагается использовать величину среднеквадратической ошибки:

$$\xi_k = \sqrt{M[(\hat{x}_{1,k} - x_{1,k})^2]} \quad (5)$$

Для оценки малости величины среднеквадратической погрешности (5) представим ее в долях от оцениваемого параметра:

$$\delta_k = \frac{\xi_k}{x_{1,k}}$$

Нормированная среднеквадратическая ошибка (НСКО) в зависимости от значения $x_{1,k}$ изменяется в широких пределах вплоть до $\delta_k = \infty$ при $x_{1,k} = 0$. Поэтому при нормировании предлагается использовать максимальное значение истинного математического ожидания, взятого по модулю $|x_{1max}|$:

$$\delta_k = \frac{\xi_k}{|x_{1max}|} \quad (6)$$

Качество фильтрации сигналов, описываемых моделями (1, 3), а также величина погрешности оценки математического ожидания измеряемого процесса, исследовались для следующих законов изменения аддитивных (индекс а) и мультипликативных (индекс м) составляющих:

$$x_1 = 1 + \sin(2\pi f_a t), f_a = 1 \text{ Гц};$$

$$x_1 = 2 - \exp(-b_a t), b_a = 2;$$

$$x_1 = 1 + a_a t, a_a = 0,5;$$

$$x_2 = a_m t, a_m = 0,5;$$

$$x_2 = \sin(2\pi f_m t), f_m = 4 \text{ Гц};$$

$$x_2 = \exp(-b_m t), b_m = 4.$$

При моделировании длина реализации процессов была 1,5 сек., интервал дискретизации $\Delta t = 0,02$ сек., дисперсия шума $D_v = 0,1$.

Фильтр Калмана

Формулы дискретного фильтра Калмана [2] для случая линейных уравнений состояния и измерения (4) имеют вид:

$$\begin{cases} x(k/k) = x(k/k-1) + K_k(y_k - H_k x(k/k-1)) \\ x(k/k-1) = A(k/k-1)x(k-1/k-1) \\ P(k/k-1) = A(k/k-1)P(k-1/k-1)A^T(k/k-1) \\ K_k = P(k/k-1)H_k^T [H_k P(k/k-1)H_k^T + R_k]^{-1} \\ P(k/k) = (I - K_k H_k)P(k/k-1) \end{cases} \quad (7)$$

здесь $P(k/k-1)$ – корреляционная матрица вектора состояния, K_k – коэффициент усиления фильтра.

Рекуррентная форма фильтра (7) легко реализуется с помощью цифровых вычислительных машин в реальном масштабе времени.

Нормированная среднеквадратическая ошибка (6) для аддитивной модели процессов с разными детерминированными составляющими приведена на рис. 2. Расчеты показали, что НСКО практически не зависит от вида детерминированной составляющей. Это объясняется тем, что коэффициент усиления K и корреляционная матрица P вектора состояния не зависят от поступающих значений вектора измерений y .

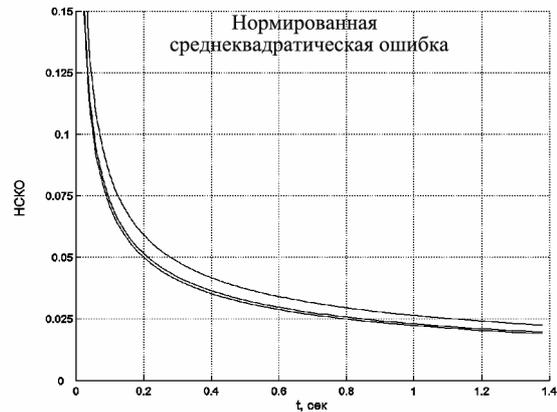


Рис. 2.

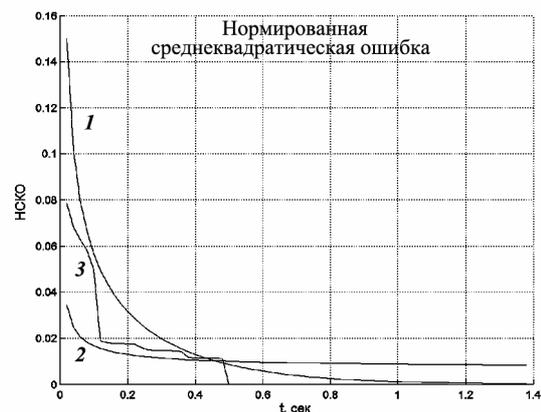


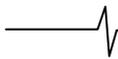
Рис. 3.

Дисперсия шума v существенно влияет на НСКО: увеличение дисперсии шума на порядок приводит к росту на порядок и нормированной среднеквадратической ошибки.

В алгоритме фильтра Калмана предполагается, что помеха представляет собой белый шум. Существуют решения задачи оптимальной фильтрации для случая «окрашенного шума» [3]. Дисперсия аддитивно-мультипликативного процесса (3) зависит от детерминированной составляющей x_2 , не является постоянной и рассчитывается по формуле:

$$D_y(t_k) = x_2^2(t_k)D_v.$$

В этом случае сходимость процесса оценивания зависит от функции x_2 и дисперсии шума. Результаты моделирования для аддитивно-мультипликативной модели сигнала, аддитивная составляющая которого изменяется по экспоненциальному закону, представлены на рис. 3. Кривая 1 характеризует НСКО при экспонен-



циальной мультипликативной составляющей, 2 – линейной, 3 – периодической составляющей. Если мультипликативная составляющая изменяется по периодическому закону, то наблюдаются резкие изменения коэффициента усиления фильтра, а к середине интервала наблюдения он становится равным нулю.

Для системы, заданной уравнениями (4), были проведены расчеты с фильтром Калмана второго порядка. Для аддитивной модели фильтр второго порядка для выбранных условий моделирования не дал улучшения оценок \mathbf{X} . В случае же аддитивно-мультипликативной модели, элементы матрицы ошибок обращаются в бесконечность, и матрица коэффициентов усиления становится вырожденной.

Применение метода рекуррентной динамической фильтрации, использующей квадратичный критерий качества, оправдано при использовании модели измерительной помехи с априорно известной ограниченной дисперсией. В реальных условиях эксплуатации промышленных систем наблюдается отклонение параметров процессов от расчетных, поэтому точность оценок ухудшается. В работе рассматривалась идеальная модель измерения (рис. 1). Как правило, вектор состояния \mathbf{X} является зашумленным. При этом модель сигнала на выходе объекта управления и параметры шума априори неизвестны. Перечисленные причины ограничивают применение фильтра Калмана в виде (7).

Оператор скользящего среднего

В алгоритме скользящего среднего оценка x_1 может быть получена при вычислении по рекуррентной формуле:

$$\hat{x}_1(k) = \hat{x}_1(k-1) + \frac{1}{c} [y(k+h) - y(k-1-h)],$$

где c – интервал усреднения (сглаживания), $h = (c-1)/2$.

Величина среднего значения квадрата ошибки оценки \hat{x}_1 может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} \xi_j^2 &= M \left[(\hat{x}_{1,j} - x_{1,j})^2 \right] = M \left[\left(\frac{1}{c} \sum_{k=-h}^h y_{j+k} - x_{1,j} \right)^2 \right] = \\ &= M \left[(\bar{y}_j - x_{1,j})^2 \right] = M \left[(\bar{y}_j - M[\bar{y}_j] + M[\bar{y}_j] - x_{1,j})^2 \right] = \\ &= M \left[(\bar{y}_j - M[\bar{y}_j])^2 \right] + M \left[(M[\bar{y}_j] - x_{1,j})^2 \right] \end{aligned}$$

Первое слагаемое в данном выражении равно дисперсии оценки выборочного среднего D_j и характери-

зует долю случайной составляющей в значении ошибки. Второе слагаемое дает квадрат смещения оценки от истинного значения и определяет систематическую составляющую ошибки Δ_j^2 . Тогда среднеквадратическая ошибка может быть определена как:

$$\xi_j = \sqrt{D_j + \Delta_j^2} \quad (8)$$

Математическое ожидание выборочного среднего для аддитивной и аддитивно-мультипликативной моделей можно представить в виде:

$$M[\bar{y}_j] = M \left[\frac{1}{c} \sum_{k=-h}^h y_{j+k} \right] = \frac{1}{c} \sum_{k=-h}^h x_{1,j+k}.$$

Систематическая составляющая ошибки для обеих рассматриваемых моделей (1, 3) рассчитывается в соответствии со следующей формулой:

$$\Delta_j^2 = M \left[(M[\bar{y}_j] - x_{1,j})^2 \right] = \left(\frac{1}{c} \sum_{k=-h}^h x_{1,j+k} - x_{1,j} \right)^2.$$

При принятых условиях, относительно шумовой компоненты v , дисперсия выборочного среднего для аддитивной модели определяется как

$$D[\bar{y}_j] = M \left[(\bar{y}_j - M[\bar{y}_j])^2 \right] = \frac{D_v}{c},$$

для аддитивно-мультипликативной модели имеет вид

$$D[\bar{y}_j] = \frac{D_v}{c^2} \sum_{k=-h}^h x_{2,j+k}^2.$$

В табл. 1 приведены значения НСКО (6) оценки x_1 , полученные с помощью оператора скользящего среднего для тех же условий, что при расчете по алгоритму Калмана.

Как показали результаты расчетов, фильтр Калмана дает для аддитивной модели меньшее значение НСКО, чем алгоритм скользящего среднего. Однако фильтр скользящего среднего менее чувствителен к изменению дисперсии наблюдаемого сигнала. Кроме того, проведенные исследования показали эффективность оператора скользящего среднего при фильтрации аддитивно-мультипликативных процессов. Следует также отметить, что алгоритм его реализации более простой, чем для фильтра Калмана. В связи с этим задачу анализа влияния ошибочной классификации наблюдаемого процесса на точность оценки математического ожидания аддитивно-мультипликативного сигнала будем решать для этого оператора.

Таблица 1

Модель процесса	x_1	x_2	Интервал усреднения	δ_{max}
Аддитивная	$x_1 = a_a t$	–	15	0,11
	$x_1 = 1 + \sin(2\pi f_a t)$	–	9	0,059
	$x_1 = 2 - \exp(-b_a t)$	–	15	0,041
Аддитивно-мультипликативный процесс	$x_1 = 1 + \sin(2\pi f_a t)$	$x_2 = a_m t$	9	0,042
	$x_1 = 1 + \sin(2\pi f_a t)$	$x_2 = \sin(2\pi f_m t)$	7	0,047
	$x_1 = 1 + \sin(2\pi f_a t)$	$x_2 = 1 - \exp(-b_m t)$	9	0,056

Анализ результатов ошибочной классификации случайного процесса

Пусть относительно исследуемого процесса выдвинута гипотеза о принадлежности его к классу аддитивных процессов (1), в то время как в действительности процесс относится к классу аддитивно-мультипликативных процессов (3).

Для оценки влияния ошибочной классификации наблюдаемого процесса и вида детерминированных составляющих на НСКО (8) проводилось моделирование процессов при тех же законах изменения детерминированных составляющих, что и исследовались алгоритмы фильтрации.

В вычислительном эксперименте длина реализации составляла 200 отсчетов, величина интервала усреднения изменялась в пределах от 3 до 199, интервал дискретизации – $\Delta t = 0,005$ сек. Результаты моделирования представлены на рис. 4.

Анализ полученных результатов показывает, что при принятых условиях моделирования НСКО оценки математического ожидания для аддитивной модели процесса (кривые 1) меньше, чем для аддитивно-мультипликативной модели (кривые 2). При этом разность в значениях ошибки колеблется от 0.03 до 0.3 в зависимости от интервала усреднения.

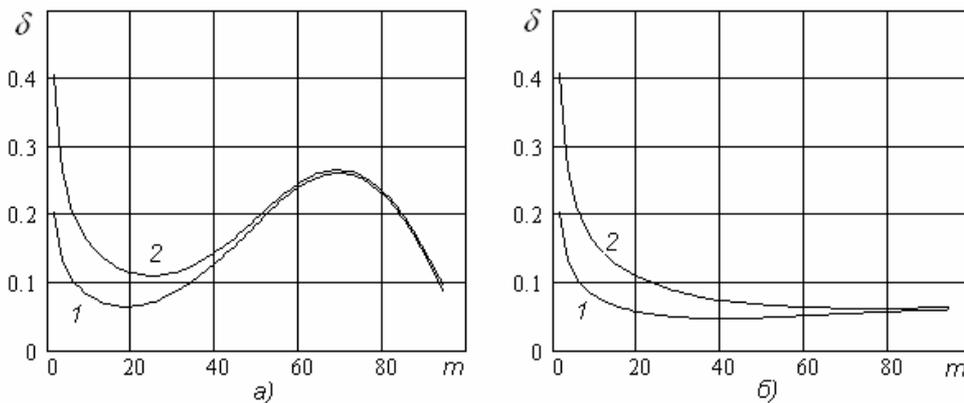


Рис. 4.

Погрешность результатов измерения влияет на качество управления технологическими процессами. Неучтенная погрешность, вызванная ошибкой классификации наблюдаемого процесса, будет снижать эффективность работы информационно-измерительных и управляющих систем.

Как показывает анализ зависимостей, представленных на рис. 4, а, для процесса, математическое ожидание которого изменяется по периодическому закону, можно указать оптимальный интервал сглаживания. Если закон изменения математического ожидания наблюдаемого процесса изменяется монотонно (рис. 4, б), то НСКО уменьшается с увеличением интервала сглаживания. В связи с этим рекомендации по выбору окна усреднения могут быть даны, исходя из вида аддитивной детерминированной составляющей наблюдаемого процесса.

С целью исключения погрешностей результатов измерений, вызванных ошибочным предположением о виде исследуемого процесса и необоснованным выбором интервала сглаживания, необходимо, чтобы процедуре скользящего среднего предшествовала процедура классификации случайного процесса.

Предлагаемая процедура обработки случайных процессов

В существующей практике анализа случайных процессов одним из первых этапов является этап выявления класса случайного процесса (стационарный или нестационарный). Выводы о классе процесса делаются, как правило, на основе проверки статистических гипотез о наличии тренда [4]. В отличие от сложившейся практики предлагается включить в информационно-измерительную систему блок, в котором реализуется процедура классификации случайного процесса (блок 5 на рис. 5), позволяющая выявить характер нестационарности процесса и вид детерминированных составляющих. В результате этой классификации процесс, заданный вектором информативных признаков P_i , соотносится с одним из наперед заданных классов d_j случайных процессов:

$$P_i = \{p_{i,1}, p_{i,2}, \dots, p_{i,n}\} \rightarrow y \in \{d_1, d_2, \dots, d_m\}.$$

Первым этапом процедуры обработки случайных процессов должен быть этап формирования вектора информативных признаков.

В условиях ограниченной априорной информации о свойствах исследуемого процесса решение о классе про-

цесса следует принимать по результатам применения совокупности непараметрических критериев. Как известно, при использовании непараметрических критериев в качестве нулевой гипотезы H_0 принимается гипотеза, что все наблюдения независимы и процесс является случайным, альтернативной является гипотеза H_1 – временной ряд содержит детерминированные составляющие. В связи с существованием только двух возможных исходов предлагается получить обобщенный классификационный показатель на основе байесовской процедуры для бинарных признаков [5]. В блоке 1 (рис. 5) выполняется расчет непараметрических критериев, в блоке 2 реализуется алгоритм получения обобщенного классификационного показателя по совокупности критериев.

Одним из методов анализа временных рядов, ориентированным на выявление детерминированных компонент случайного процесса, является метод Херста [6]. По значению показателя Херста можно оценить, является ли наблюдаемый процесс «чистым» шумом или он содержит монотонную или периодическую составляющую. Расчет показателя Херста выполняется в блоке 3.

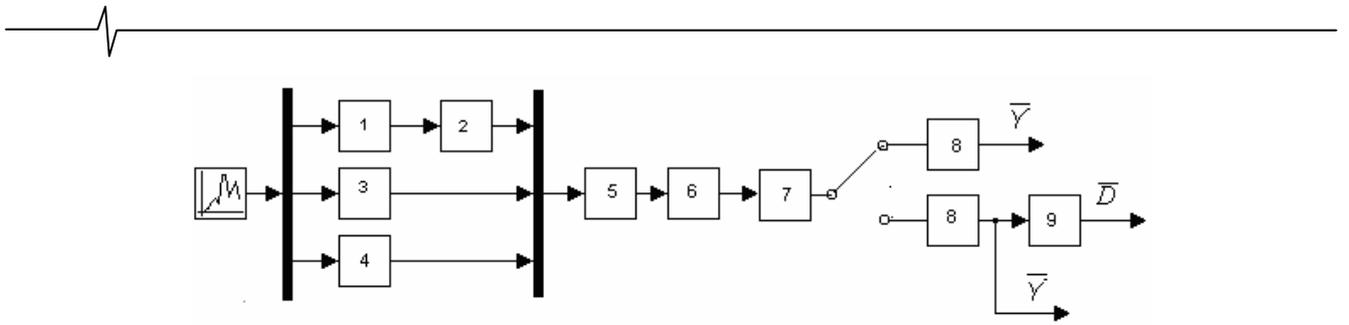


Рис.5. Структура информационной системы обработки случайного процесса

Важной характеристикой случайного процесса является корреляционная функция. Случайный временной ряд, не содержащий детерминированных составляющих, при различных лагах имеет близкие к нулю коэффициенты корреляции. Если во временном ряде присутствует некоторая детерминированная составляющая, то найдутся лаги, для которых значения коэффициентов автокорреляции выйдут за пределы 95 % доверительного интервала [7]. В блоке 4 рассчитывается и анализируется функция автокорреляции.

Таким образом, вектор информативных признаков предлагается формировать из обобщенного показателя по совокупности непараметрических критериев, показателя Херста и числа лагов, превышающих доверительные границы автокорреляционной функции.

В силу наличия неопределенности исходных данных для установления класса наблюдаемого процесса предлагается использовать методы нечеткой логики. Целью блока процедуры нечеткой классификации является определение класса процесса (стационарный, нестационарный), вида процесса (аддитивный, мультипликативный, аддитивно-мультипликативный) и типа детерминированной составляющей.

Далее в блоке 6 определяются параметры детерминированной аддитивной составляющей.

Для периодической составляющей в блоке 6 оценка периода T в момент времени n определяется по максимуму функции:

$$R(n, T) = \sum_{i=0}^{N-1} y_{n+i} y_{n-T+i}$$

При постановке задачи допускается, что помеха U может иметь закон распределения отличный от нормального. Тогда для определения параметров линейной и экспоненциальной составляющих можно рекомендовать использование метода непараметрической регрессии, основанного на рангах наблюдения [7]. Применение этого же метода допустимо и для экспоненциальной составляющей после ее предварительного логарифмирования.

В блоке 7 осуществляется выбор интервала усреднения. Для сигналов, математическое ожидание которых изменяется по периодическому закону, предлагается использовать полученные в результате моделирования зависимости интервала усреднения от интервала дискретизации и периода наблюдаемого сигнала.

В случае линейной и монотонной аддитивных составляющих в блоке 7 для оценки интервала усреднения можно хранить базу данных номограмм, отражающих зависимость среднеквадратической ошибки ξ от параметров детерминированных составляющих и интервала усреднения. Задавшись значением ξ и зная оценки парамет-

ров детерминированной составляющей и доверительные интервалы для оценок, можно получить допустимый интервал усреднения.

В блоке 8 реализуется алгоритм скользящего среднего. Оператор скользящего среднего одновременно с вычислением оценок математического ожидания x_1 допускает выполнение операции центрирования. По результатам операции центрирования можно судить о качестве оценок математического ожидания исследуемого процесса.

Наблюдаемые процессы могут относиться к классу процессов нестационарных по дисперсии и корреляционной функции. В этом случае необходимо получить оценки дисперсии, что предполагает включение в систему обработки случайного процесса блока нормирования (блок 9). Степень отличия оценки дисперсии от единицы после нормирования будет говорить о качестве выделения мультипликативной детерминированной составляющей исследуемого процесса.

Заключение

В статье предложен алгоритм обработки случайных процессов с использованием фильтра скользящего среднего. С целью повышения точности вероятностных характеристик измеряемых сигналов фильтрации предшествует процедура классификации наблюдаемого процесса. В зависимости от класса процесса, вида процесса, типа и параметров детерминированных составляющих реализуются автоматическая настройка интервала усреднения и выбор алгоритма обработки, предусматривающего блок центрирования или блок нормирования, или последовательное включение обоих блоков.

Литература

1. Харкевич А. А. Борьба с помехами. – М.: Наука, 1965. – 275 с.
2. Бесекерский В.А. Цифровые автоматические системы. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
3. Статистическая динамика и идентификация систем автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 640 с.
4. Кендалл М., Стьюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды / Пер. с англ. – М.: Наука, 1976. – 736 с.
5. Афифи А., Эйзен С. Статистический анализ: Подход с использованием ЭВМ / Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 488 с.
6. Федер Е. Фракталы / Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 254 с.
7. Тюрин Ю. Н., Макаров А. А. Статистический анализ данных на компьютере / Под ред. В. Э. Фигурнова – М.: ИНФРА-М, 1998. – 528 с.