

УДК 519.218.82

**ВЕЙВЛЕТ-ТЕХНОЛОГИЯ АНАЛИЗА И ОЧИСТКИ СИГНАЛОВ ОТ ШУМА***Орешко Н.И., Князева Т.Н.***Введение**

В многочисленных статьях и книгах по теории и практике использования вейвлетов приведен необходимый инструментарий по отдельным аспектам обработки данных с их использованием. Однако для большинства пользователей, не знакомых с тонкостями и проблемами в вейвлет-анализе, представляет значительную трудность выбрать, например при очистке от шума реальных данных, многочисленные настроечные параметры, приводящие к эффективной обработке. К ним, в первую очередь, относятся следующие: какой вид базисной функции (т.е. какой тип фильтра) выбрать, какой должна быть длина фильтра, сколько нужно задать уровней очистки от шума, какое выбрать пороговое правило и тип порога, как скомпенсировать граничные эффекты и т.д. И самое главное как определить эффективность примененной обработки.

Учитывая все расширяющуюся применимость вейвлетов в инженерной практике, эта задача становится все более актуальной. Необходимы некоторые процедуры автоматизации и структуризации при выборе и настройке всех параметров. Все это объединено в понятии технологии использования вейвлетов, которой и посвящается данная статья. Так как рассматриваемый предмет очень широк, то мы ограничим свое внимание одним из важных его аспектов, а именно задачей очистки от шума одномерных данных.

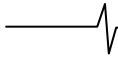
Задача очистки от шума имеет глубокие корни, начиная еще от исследований Гаусса. Многочисленные подходы, предложенные в регрессионном анализе и теории Калмановской фильтрации, преимущественно опираются на полное или частичное знание параметрической модели. В параметрической регрессии неизвестная зависимость предполагается принадлежащей известному семейству функций, зависящих от конечномерного параметра. Как правило, упомянутое семейство функций представляет собой линейную комбинацию базисных функций, заданных априори. Размерность этого семейства либо берется с запасом, либо определяется по выборке. Если выбор конечномерного семейства определяется знанием закона, объясняющего данную зависимость, а также при недостатке данных или вычислительных средств такой подход оправдан. В других ситуациях попытка втиснуть изучаемую зависимость в узкое, заданное априори, семейство может привести к искажению даже качественной информации об изучаемой зависимости, например, о ее особых точках, изменении характера зависимости на разных участках и др. Методы непараметрической регрессии, разработанные для

*Приводится описание основных этапов вейвлет-технологии анализа и очистки от шума сигналов, включающей решение многочисленных задач, таких как выбор порогов и правил усечения, выбор наилучшего базиса, работу с выборками произвольного объема, обработку на границах, уменьшение эффекта Гиббса и др. Рассматривается мультиполосный анализ, позволяющий определить поведение флуктуаций на разных масштабах, выявить причины их происхождения, удалить ненужные циклические компоненты.*

анализа таких случаев, не предполагают включения исковой зависимости в заданное априори конечномерное семейство. Предварительное задание параметрической модели может оказаться слишком ограничительным или чересчур малой размерности для аппроксимации непредвиденных характеристик, в то время как непараметрическое сглаживание предоставляет гибкие средства анализа неизвестных регрессионных зависимостей. За прошедшее десятилетие были предложены различные нелинейные (пространственно адаптивные) оценщики в непараметрической регрессии. Наиболее популярными являются ядерные методы с переменной полосой пропускания, классификационные и регрессионные деревья, адаптивные регрессионные сплайны. Несмотря на то, что эти методы достигают асимптотически оптимальных оценок, они имеют большой объем вычислений и обычно предназначены для очистки от шума регулярных функций.

В 90-е годы прошлого столетия в зарубежной литературе по непараметрической регрессии нашли широкое применения нелинейные методы вейвлет-пороговой обработки. Эти оценщики образуют подмножество старого класса непараметрических регрессионных методов оценивания, так называемые методы ортогональных рядов. При этом в отличие от алгоритмов линейного сглаживания данных, вейвлет-пороговая обработка обладает способностью адаптироваться к той или иной регулярности. Кроме того, эти методы оценивания легко применить, используя быстрые алгоритмы, так что они очень полезны с практической точки зрения.

Вейвлеты представляют собой новое семейство базисных функций с компактным носителем, которые используются для эффективного представления реальных сигналов. Они сочетают такие важные свойства, как: различную степень гладкости, локализацию во временной и частотной областях, представление сигнала на различных масштабах, что позволяет анализировать мелкомасштабные флуктуации и особенности высокого порядка, разреженность представления сигнала, быструю численную реализацию. Вейвлет-анализ представляет сигнал через систему сдвинутых и



масштабных версий единственной базисной вейвлет-функции. По вейвлет-коэффициентам можно определить разрывы и резкие изменения в функциях и их производных. Сигналы с резкими локальными изменениями могут хорошо представляться лишь малым числом вейвлет-коэффициентов, что невозможно при использовании стандартных ортонормальных базисов, для которых характерны многочисленные "компенсирующие" коэффициенты для представления разрывов и подавления эффекта Гиббса. Согласно принципу Гейзенберга, невозможно одновременно точное воспроизведение сигнала и во временной, и в частотной областях. Разреженность вейвлет-преобразований является отличительной чертой вейвлет-базисов и обусловлена возможностью регулирования ограничений в принципе Гейзенберга в зависимости от поведения исходного сигнала. Таким образом, вейвлеты автоматически находят компромисс между частотной и временной локализациями. Все эти аргументы являются подтверждением того, что вейвлет-базис - это подходящий инструмент для создания эффективных процедур анализа и обработки данных.

### Модель входного сигнала и дискретное вейвлет-преобразование

Поскольку в реальных ситуациях мы имеем дело с сигналами, представляющими собой конечную последовательность отсчетов, то в данной статье рассматривается только дискретный вейвлет-анализ.

Входной сигнал  $y$  -  $N$ -мерный вектор, представляется в виде выборки неизвестной функции  $f$  на равнодискретной временной сетке  $t_i$ . В стандартной постановке предполагается также, что  $\xi_i$  - независимые случайные переменные, принадлежащие одной и той же функции нормального распределения. Тогда

$$y_i = f(t_i) + \sigma \xi_i, \quad i = 0, \dots, N-1,$$

где  $\sigma$  - среднеквадратическое отклонение шума. Задача заключается в том, чтобы получить оценку для функции  $f$  из зашумленных данных  $y = (y_0, \dots, y_{N-1})$ , при неизвестной параметрической модели  $f$ .

В данной статье мы рассматриваем более реалистичную модель, приближенную к ситуации реальных измерений, а именно: наличие одиночных и множественных сбоев в данных, временных разрывов, нестационарного (гетероскедастического) шума, резких изменений в сигнале и его производных. Длина входной выборки предполагается произвольной (т.е., в общем случае, не равная степени двойки).

Существующие на данный момент вейвлет-преобразования можно разделить на две основные группы: неизбыточные (общее число вейвлет-коэффициентов при уровне разложения  $J$  соответствует объему выборки  $N$ ) и избыточные (число вейвлет-коэффициентов на уровне  $J$  равно  $(J+1)N$ ).

Неизбыточные преобразования основаны на традиционном дискретном вейвлет-преобразовании с использованием различных способов пороговой обработки, порогов и правил усечения. Методы этой группы работают с выборками, объем которых кратен степени двойки.

В группе избыточных вейвлет-преобразований одним из наиболее эффективных алгоритмов является максимально накладывающееся дискретное вейвлет-

преобразование (МНДВП) [1]. Несмотря на то, что МНДВП является избыточным неортогональным преобразованием, оно обеспечивает более качественную очистку от шума, инвариантно относительно сдвига и способно работать с выборками произвольного объема. Все основные этапы обработки и анализа данных, перечисленные ниже, были адаптированы под данное преобразование.

Отличительной чертой МНДВП является нормирование коэффициентов высокочастотного и низкочастотного фильтров на  $\sqrt{2}$  и отсутствие операции децимации. На первом уровне вейвлет-преобразования вейвлет-коэффициенты  $W_1(i)$  и аппроксимирующие коэффициенты  $V_1(i)$  рассчитываются по формулам:

$$W_1(i) = \sum_{l=0}^{L-1} g_l y((i-l) \bmod N), \quad V_1(i) = \sum_{l=0}^{L-1} h_l y((i-l) \bmod N),$$

$$\text{где } (i-l) \bmod N = \begin{cases} i-l, & \text{если } i-l \geq 0, \\ i-l+N, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$g_l, h_l$  - коэффициенты высокочастотного и низкочастотного фильтров соответственно. Они могут быть получены из обычных коэффициентов фильтров  $g_l^*, h_l^*$  (например, Добеши) путем нормирования на  $\sqrt{2}$ , т.е.  $g_l = g_l^* / \sqrt{2}$  и  $h_l = h_l^* / \sqrt{2}$ , таким образом,

$$\text{что } \sum_{l=0}^{L-1} g_l = 0 \text{ и } \sum_{l=0}^{L-1} h_l = 1, \text{ где } L - \text{длина фильтра.}$$

Вейвлет-коэффициенты и аппроксимирующие коэффициенты  $j$ -го уровня вычисляются по формулам

$$W_j(i) = \sum_{l=0}^{L-1} g_l V_{j-1}((i-2^{j-1}l) \bmod N),$$

$$V_j(i) = \sum_{l=0}^{L-1} h_l V_{j-1}((i-2^{j-1}l) \bmod N)$$

при этом  $V_0(i) = y(i)$ . Эти два соотношения составляют прямой алгоритм МНДВП. Обратное МНДВП вычисляется с помощью обратного алгоритма по следующей формуле:

$$V_{j-1}(i) = \sum_{l=0}^{L-1} g_l W_j((i+2^{j-1}l) \bmod N) + \sum_{l=0}^{L-1} h_l V_j((i+2^{j-1}l) \bmod N).$$

### Основные этапы вейвлет-технологии анализа и очистки от шума сигналов

Для эффективной очистки от шума сигналов в условиях реальных измерений предлагается вейвлет-технология, которая включает следующие этапы обработки и анализа данных:

- 1) предварительная обработка и анализ данных;
- 2) анализ, классификация, кластеризация, сегментация и отбор участков для обработки данных;
- 3) разведочный анализ для адаптивного выбора способов и параметров обработки;
- 4) очистка от шума;
- 5) анализ и интерпретация результатов обработки.

**Предварительная обработка и анализ данных.** Реальные данные нередко содержат большое количество одиночных и множественных сбоев, поэтому требуется проведение предварительной обработки данных с целью их обнаружения, удаления и заполнения образовавшихся разрывов, коррекции обнаруженных сбоев.

Одиночные и множественные сбои возникают в результате грубых ошибок измерений. Эти ошибки лучше всего выявить и исключить из дальнейшего рассмотрения в самом

начале обработки данных.

Предлагается автоматизированный метод обнаружения выбросов [2], основанный на МНДВП. Основная идея метода обнаружения выбросов опирается на три наблюдения. Первое основное наблюдение заключается в том, что выброс соответствует скачку в свойствах непрерывности функции или ее производных, поэтому он характеризуется большими значениями вейвлет-коэффициентов. Второе наблюдение заключается в том, что при корректном выборе длины фильтра (то есть, чтобы число его нулевых моментов соответствовало гладкости исходного сигнала) вся гладкая составляющая не проходит в вейвлет-область, а переходит в область аппроксимирующих коэффициентов. При этом вся информация о тонких особенностях сигнала остается в вейвлет-области. Третье состоит в том, что в вейвлет-области общий вид одиночных выбросов имеет форму, схожую с используемым высокочастотным вейвлет-фильтром. Пример отбраковки аномальных значений с использованием описанного метода представлен на рис.1. Данный метод может использоваться для сигналов, имеющих гладкую основу или особенности, представленные достаточным числом отсчетов.

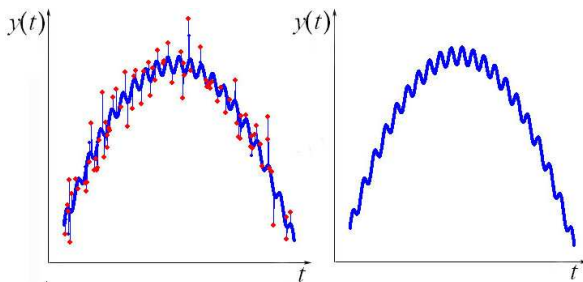


Рис.1 Результаты отбраковки аномальных значений.

После отбраковки аномальных данных возникает задача заполнения пропусков на местах найденных выбросов (если мы остаемся в рамках дискретных вейвлет-преобразований, а не используем лифтинговую схему). Для восстановления пропущенных данных можно использовать методы, основанные на стандартных процедурах интерполяции и аппроксимации (линейной, квадратичной, сплайновой) или на соответствующих методах заполнения пропусков в регрессионном анализе [3]. При дальнейшей очистке от шума (при формировании порогов) восстановленные на основе аппроксимации участки не учитываются, поскольку не содержат шум. Если же используется интерполяционная схема заполнения, то необходимо учитывать возникающие корреляционные связи.

**Анализ, классификация, кластеризация и отбор участков для обработки данных.** На данном этапе выполняются:

1) отбор участков на основе анализа погрешностей, который заключается в выделении погрешностей на основе вейвлет-преобразования, используя его известную разделяющую способность, и последующей классификации участков измерений на основе интервального значения среднеквадратического отклонения погрешностей, асимметрии распределения шума или эксцесса; проверки на гетероскедастичность и однородность, независимость и коррелированность;

2) отбор участков по характеристикам производных на основе вейвлет-преобразования;

3) классификация участков по режимным изменениям в данных, найденных путем анализа вейвлет-коэффициентов.

**Разведочный анализ для адаптивного выбора спосов и параметров обработки.** Важное значение имеет этап разведочного анализа данных, который позволяет выбрать: наиболее подходящий метод очистки от шума, число уровней, длину фильтра, наилучший базис и подобрать различные параметры к конкретным методам (например, наилучшую длину блока для усечения вейвлет-коэффициентов при блочной обработке).

Разведочный анализ включает две подгруппы алгоритмов.

Первая подгруппа алгоритмов содержит способы адаптивного выбора базиса, зависящего от сигнала по критериям, определяющим стоимости аппроксимации сигнала в заданном базисе. После чего производится минимизация или максимизация (в зависимости от выбранного критерия, то есть выпуклости или вогнутости функции стоимости), тем самым обеспечивая поиск наилучшего базиса. Выбор наилучшего базиса осуществляется по следующим критериям: энтропийному, основанному на коэффициентах Шутца и Джини, мере Эмлена,  $L^p$  - энергии, критерию Аткинсона [4].

Вторая подгруппа основана на диагностике остатков, полученных при различных базисах, с помощью критериев независимости (Бокса-Пирса, Ли-Маклеода, Льюнга-Бокса, множителей Лагранжа) и нормальности (Д'Агостино-Пирсона, Жарку-Бэра, Гэри, Шапиро-Уилкса, Шапиро-Франка, Лилли-Форса) [5]. Наилучшему базису соответствует случай с наиболее независимыми остатками или ближайшими к нормальным.

**Очистка от шума.** В большинстве ситуаций, при работе с реальными данными модель сложного динамического процесса, как правило, неизвестна. Кроме того, многие процессы, с которыми приходится работать, характеризуются переменной степенью гладкости, то есть изменяющимся количеством непрерывных локальных производных вплоть до разрыва. Необходимо также учитывать и разнообразные статистические свойства шума (независимый или коррелированный, гомоскедастический или гетероскедастический). В таких условиях для очистки от шума прекрасно зарекомендовала себя вейвлет-технология, основанная на использовании различных типов базисных функций с компактным носителем и на различных схемах выбора порогов.

Этап очистки от шума содержит большое число процедур, специально ориентированных на очистку от шума: мультиполосный анализ, методы компенсации краевых эффектов, выбор типа и длины фильтра, различные методы вейвлет-преобразований, различные пороги и правила усечения вейвлет-коэффициентов.

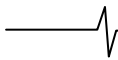
Общая схема очистки от шума включает следующие шаги:

1. Прямое вейвлет-преобразование для исходного сигнала  $\{y_t : t = 0, \dots, N - 1\}$

$$W = w y,$$

где  $W$  - вейвлет-коэффициенты,  $w$  - матрица преобразования,  $N$  - длина выборки.

2. Процедура усечения вейвлет-коэффициентов:  $W_{thr} = T(W)$ , где  $T$  - оператор преобразования вейвлет-коэффициентов, зависящая от способа пороговой обработки и правила усечения.



3. Обратное вейвлет-преобразование  $f_{оцен.} = w^T W_{thr}$ , в результате которого получаем оценку истинной функции  $f$ .

Непосредственно перед вейвлет-преобразованием сигнала, для улучшения результатов очистки от шума на границах, рекомендуется использовать процедуру компенсации краевых эффектов. Искажение результатов очистки от шума на границах возникает из-за кругового сдвига в начале сигнала в результате прямого МНДВП, а в конце сигнала в результате обратного МНДВП. Компенсация краевых эффектов достигается с помощью дополнения данных слева и справа необходимым числом отсчетов, которое определяется в зависимости от длины фильтра и числа уровней. На  $j$ -ом уровне декомпозиции длина фильтра определяется по формуле  $L_j = (2^j - 1)(L - 1) + 1$  [1], где  $L$  - исходная длина фильтра. Число отсчетов для дополнения на каждом уровне  $j$  должно равняться  $L_j - 1$ , поскольку именно столько вейвлет-коэффициентов находится под действием кругового сдвига. Дополнение данных выполняется с помощью прогнозирования как традиционным способом (симметрическое или периодическое), так и с помощью экстраполяции по оцененной на границе некоторой параметрической (например, полиномиальной) модели с адаптивно оцениваемой структурой и порядком. Добавленные отсчеты должны быть удалены после завершения процедуры очистки от шума.

Процедура усечения вейвлет-коэффициентов заключается в нахождении оценки вейвлет-коэффициентов, которые соответствуют сигналу с помощью оператора, ослабляющего шум, но сохраняющего сигнальную составляющую.

Можно выделить два основных подхода к вейвлет-очистке сигналов от шума: классический и байесовский. До недавнего времени классический подход включал различные линейные алгоритмы очистки от шума, а нелинейные процедуры были специализированными и сложными. В 90-х годах Donoho и Johnstone предложили использовать очень простой пороговый алгоритм, который в подходящем базисе может давать почти оптимальную нелинейную оценку. В связи с этим, стали появляться различные эффективные алгоритмы нелинейной пороговой обработки.

Линейные вейвлет-оценители относятся к классу проекционных оценителей, где проекционные операторы используют вейвлет-ядра. Эти операторы являются линейными относительно данных. В работах Wahba (1990), Antoniadis (1996) и Amato & Vuza (1997) описывается линейный подход, использующий методы сглаживающего сплайнового оценивания. В любом случае линейный подход используется для оценивания достаточно регулярных функций.

Для функций с низкой степенью регулярности обычно применяется нелинейная пороговая обработка (Donoho, Johnstone (1994)) или нелинейные методы усечения (сжатия). Классические методы нелинейной пороговой обработки эквиваленты оцениванию сигнала путем его усреднения с помощью ядра, которое адаптировано к гладкости сигнала. Пороговая обработка в общем случае заключается в модификации вейвлет-коэффициентов в соответствии с заданным типом порога и правилом усечения. Приравнение вейвлет-коэффициентов нулю эквивалентно локальному усреднению зашумленных данных, что имеет место только, если выделенный истинный сигнал окажется гладким. В настоящее время разработано большое количество различных порогов (универсальный, минимаксный, обобщенный порог перекрестной проверки, порог, рассчитанный на основе про-

верки множественных гипотез, порог на основе несмещенного риска Стейна, экспоненциальный растущий порог и др.) и правил усечения (жесткое, мягкое, гиперболическое, гаррота, полумягкое, сигмоидальное, гибридное).

В последнее время также стала популярной вейвлет-обработка данных с использованием байесовских правил (Vidacovic, Muller (1999)). Байесовские правила подобны обычным пороговым правилам и строятся по реальным статистическим моделям вейвлет-коэффициентов с учетом априорной информации об истинном сигнале. Большинство реальных байесовских правил легко вычислить путем моделирования или представить в аналитической форме.

Немаловажное значение имеет способ пороговой обработки (рис.2).

В случае глобальной пороговой обработки шумоподавление сигнала осуществляется на основании статистических характеристик каждого уровня разложения.

Локальная пороговая обработка обладает большей адаптивностью к исходным данным в сравнении с глобальной пороговой обработкой. При этом в случае общей пороговой обработки общий порог применяется ко всем вейвлет-коэффициентам различных уровней. При многоуровневой обработке для каждого уровня рассчитывается свой порог, а при поэлементной обработке - для каждого вейвлет-коэффициента.

Блочная пороговая обработка сочетает в себе основные свойства глобального и локального способов обработки, поскольку предполагает применение того или иного оператора к блокам соседних коэффициентов детализации.

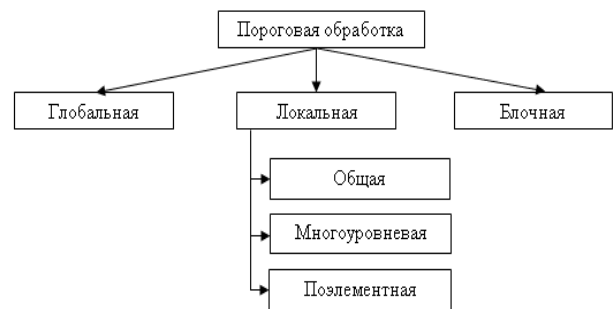


Рис. 2. Способы пороговой обработки.

Существенное влияние на очистку от шума оказывает выбранный базис. В зависимости от вида сигнала в качестве базисной функции для вейвлет-преобразования могут использоваться следующие типы фильтров: Daubechies, Symmlet, Coiflet, Haar, Сплайн, Ojanen, Bathlet, Legendre, Remez, Maxflat и др. Выбор наилучшего базиса для конкретного сигнала осуществляется с помощью разведочного анализа, описанного выше. В случае использования МНДВП выбор вейвлет-фильтра менее критичен.

**Мультиполосный анализ.** Произвольный входной сигнал можно рассматривать в виде суммы разнотипных составляющих: тренда, различных циклических компонент, флуктуаций – мелкомасштабных колебаний вокруг составляющих, аномалий - резких изменений, локальных особенностей. Инструментом разделения сигналов на такие составляющие является мультиполосный анализ. С его помощью можно определить поведение флуктуаций на разных масштабах, выявить причины их происхождения, удалить ненужные циклические компоненты.

Мультиполосный анализ позволяет посмотреть результаты разделения сигнала на составляющие как во временной, так и в вейвлет-области. Преимуществом представления сигнала по частотным полосам во временной области является то, что мы получаем проекции на детализирующее и аппроксимирующее пространство для различных частотных полос. Их легче анализировать, поскольку в вейвлет-области за счет формы используемого вейвлет-фильтра частотные составляющие, соответствующие различным полосам, сдвигаются, и общая картина становится менее понятной.

**Модификации алгоритмов очистки от шума.** В реальных ситуациях при обработке данных нередко сталкиваются с изменяющимися в процессе измерений условиями наблюдений. Это приводит к тому, что на различных сегментах наблюдений погрешности измерений принадлежат нормальному распределению, но с различной дисперсией, то есть мы имеем дело с так называемыми гетероскедастическими моделями. В этом случае методы очистки данных от шума, основанные на стандартной вейвлет-технологии, не дают хороших результатов. Для решения этой проблемы (для случая кусочно-постоянного уровня шума) был разработан двухступенчатый способ очистки от шума [6], где на первом этапе на основе кластеризации вейвлет-коэффициентов определяются все параметры модели погрешности с кусочно-постоянной дисперсией, а затем на втором этапе производится расчет модифицированных порогов для вейвлет-коэффициентов по оцененным кластерам. При этом для кластеризации вейвлет-коэффициентов используется алгоритм, основанный на сравнении дисперсий вычисленных погрешностей с применением F-распределения Фишера и дальнейшее уточнение границ. Преимущества этого алгоритма состоят в том, что, во-первых, число кластеров априорно не задается, а автоматически определяется в процессе кластеризации, во-вторых, алгоритм обеспечивает высокую точность разделения выборки на кластеры за счет разработанной процедуры уточнения границ. Пример результатов очистки от шума показан на рис.3.

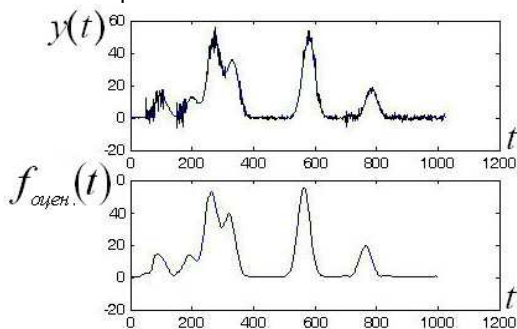


Рис.3. Результаты очистки от шума сигнала при наличии гетероскедастических погрешностей.

Среди реальных сигналов нередко встречаются сигналы с резкими пиками, так называемые мультипиковые процессы. При очистке от шума таких сигналов стандартными методами информация о пиках искажается, и в итоге мы получаем совершенно другой тип сигналов, чем хотелось. Шумовая составляющая сосредоточена в основном на самых тонких уровнях вейвлет-декомпозиции. При увеличении числа уровней скорость спада вейвлет-коэффициентов зависит от гладкости исходного сигнала. Таким образом, если пик в исходном сигнале представляется большим количеством отсчетов, то в вейвлет-области на тонких уровнях соответствующие ему вейвлет-коэффициенты будут на порядок меньше шума,

то есть пик обнаружить нельзя. С увеличением числа уровней картина меняется, шумовые коэффициенты уменьшаются, а резкие изменения сигнала выделяются более отчетливо. Поэтому была разработана модификация, включающая в себя этап обнаружения резких пиков (с помощью МНДВП и анализа максимальных кривизн) и алгоритм очистки от шума, основанный на сегментной очистке с фиксированными узлами. При этом практически полностью гасится эффект Гиббса. Примеры результатов очистки от шума показаны на рис.4.

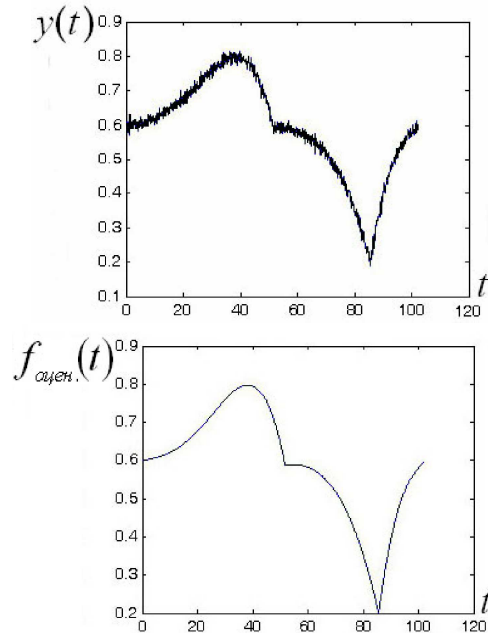


Рис.4. Результаты очистки от шума сигнала с резкими изменениями.

#### Анализ и интерпретация результатов обработки.

Оценка результатов обработки осуществляется на основе диагностики остатков с использованием критериев независимости и нормальности.

#### Заключение

На основе описанной вейвлет-технологии был создан программный комплекс в среде MatLab. Разработанные методы прошли апробацию в реальных условиях и показали более высокую эффективность по сравнению с ранее существующими традиционными вейвлет-методами очистки от шума.

#### Литература

1. Percival D., Walden A. Wavelet methods for time series analysis // London: Cambridge University Press. 2000. P. 594.
2. Орешко Н. И., Князева Т.Н. Автоматизированный поиск выбросов с использованием вейвлет-преобразования // Труды Российского НТОРЭС им. А.С. Попова. Серия "Цифровая обработка сигналов и ее применение", Выпуск: X-1, Москва, 2008, стр. 145-149.
3. Rao C. R., Toutenburg H. Linear models: least squares and alternatives // New York: Springer-Verlag. 1999. P. 426.
4. Маршалл А., Олкин И. Неравенства: теория мажоризации и ее приложения // М.: Мир. 1983. 574 с.
5. Henry C. Thode., Jr. Testing for normality // New York: State University of New York at Stony Brook. 2002, P. 479.
6. Орешко Н.И., Князева Т.Н. "Очистка от шума траекторных данных при наличии гетероскедастических погрешностей"// СПб: Известия СПбГЭТУ "ЛЭТИ". Сер. "Информатика, управление и компьютерные технологии". 2007. Специальный вып. 2. С. 31-41.