УДК 004.021

СИНТЕЗ РЕКУРСИВНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ ПО ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ, ОПРЕДЕЛЯЕМОЙ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ

Никитин Д.А., Ханов В.Х.

Предлагается алгоритм синтеза цифрового БИХ-фильтра по его импульсной характеристике, которая определяется элементарной математической функцией или линейной комбинацией таких функций.

Введение

В современном арсенале методов синтеза рекурсивных цифровых фильтров мало методов на основе расчета и аппроксимации его импульсной характеристики. Практически — только метод Прони, который хоть и достаточно проработан, но, тем не менее, обладает рядом недостатков. Например, для его применения необходимо заранее знать минимальный достаточный порядок фильтра. Отсутствие разнообразия при выборе таких методов обусловлено прежде всего их невысокой востребованностью, так как при синтезе цифрового фильтра обычно задаются другими исходными данными. Тем не менее, в некоторых случаях [1, 2] может понадобиться поиск коэффициентов фильтра именно исходя из некоторого количества начальных отсчётов его импульсной характеристики. В этой статье предлагается такой метод, который к тому же позволяет совместить отыскание коэффициентов цифрового рекурсивного фильтра с определением минимально необходимого их количества.

Алгоритм синтеза цифрового БИХ фильтра

Пусть имеется последовательность $Y = \{y_k\}$ длины L, элементы которой являются значениями неизвестной элементарной математической функции одного переменного $f(x)$ при $x = 0, 1, 2, \ L - 1$. То есть $y_0 = f(0), \ y_1 = f(1), \ y_{L-1} = f(L-1)$. Необходимо найти цифровой рекурсивный фильтр, у которого первые L отсчётов импульсной характеристики в точности совпадают с элементами Y.

Нахождение цифрового фильтра (ЦФ) означает отыскание всех его коэффициентов a_i и b_i, которые однозначно определяют процесс фильтрации (а значит и импульсную характеристику) в соответствии с рекурсивным выражением:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{M} a_k y(n-k), \tag{1}$$

где $x(n)$ — значение на входе фильтра на n-ом такте, $y(n)$ — значение на выходе фильтра на n-ом такте, a_k и b_k — действительные коэффициенты, M и N определяют количество коэффициентов a_k и b_k соответственно.

Импульсной характеристикой называется реакция дискретной системы (в нашем случае это фильтр) на единичный импульс при нулевых начальных условиях. Используя выражение (1), можно построить систему линейных уравнений, определяющую взаимосвязь коэффициентов фильтра с его импульсной характеристикой.

$$\begin{cases} b_0 = y_0 \\ b_1 - y_0 a_1 = y_1 \\ b_2 - y_1 a_1 - y_0 a_2 = y_2 \\ \ldots \\ b_N - (a_1 y_{N-1} + a_2 y_{N-2} + \ldots + a_{M-1} y_0) = y_N \\ -(a_1 y_{N-2} + a_2 y_{N-3} + \ldots + a_{M-1} y_1 + a_M y_0) = y_{N+1} \\ \ldots \\ -(a_1 y_{L-2} + a_2 y_{L-3} + \ldots + a_M y_{L-N-1}) = y_{L-1} \end{cases} \tag{2}$$

Здесь неизвестными являются коэффициенты a_k и b_k, а выход фильтра $Y=\{y_k\}$ является его импульсной характеристикой и в нашей постановке задачи известен заранее. Система уравнений (2) имеет L строк, в правой части каждой из которых стоит отсчёт импульсной характеристики. Поскольку в (2) $M+N+1$ неизвестных, то для того, чтобы система могла иметь решение, должно выполняться условие

$$L \geq M + N + 1 \tag{3}$$

Чтобы начать решать систему уравнений (2) не хватает только знания M и N. Пусть $N=M-1$ (таким образом, количество коэффициентов a_k и b_k будет равным), а M выберем любое, удовлетворяющее неравенству (3). Теперь построим систему из первых $M+N+1$ уравнений системы (2), назовём её начальной.

$$\begin{cases} b_0 = y_0 \\ b_1 - y_0 a_1 = y_1 \\ b_2 - y_1 a_1 - y_0 a_2 = y_2 \\ \ldots \\ b_N - (a_1 y_{N-1} + a_2 y_{N-2} + \ldots + a_{M-1} y_0) = y_N \\ -(a_1 y_{N-2} + a_2 y_{N-3} + \ldots + a_{M-1} y_1 + a_M y_0) = y_{N+1} \\ \ldots \\ -(a_1 y_{N+M-1} + a_2 y_{N+M-2} + \ldots + a_M y_{M-1}) = y_{N+M} \end{cases} \tag{4}$$

Для построения начальной системы необходимо $M+N+1$ членов последовательности Y. Анализ системы в виде (4) затруднителен, поэтому перепишем её в матричном виде.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & -y_0 & & & & \\ & & 1 & & & -y_1 & -y_0 & & & \\ & & & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ & & & & 1 & -y_{N-1} & -y_{N-2} & \cdots & -y_0 & \\ & & & & & -y_N & -y_{N-1} & \cdots & -y_1 & -y_0 \\ & & & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & & & -y_{N+M-1} & -y_{N+M-2} & \cdots & -y_{M-2} & -y_{M-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \\ a_1 \\ \vdots \\ a_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \\ y_{N+1} \\ \vdots \\ y_{N+M} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Матрицу системы уравнений и соответствующую ей расширенную матрицу обозначим P и $\overline{P}$ соответственно. Решив систему (5), найдём все коэффициенты ЦФ. Но прежде, чем её решать, необходимо убедиться, что она совместна и определена. Для этого вычислим ранги матриц P и $\overline{P}$. Далее возможны три случая:

1. Если $\mathrm{rang}(P) = \mathrm{rang}(\overline{P}) = M{+}N{+}1$, то система (5) совместна, обладает полным рангом, и её можно решить каким-либо стандартным методом.

2. Если $\mathrm{rang}(P) \neq \mathrm{rang}(\overline{P})$, то система (5) несовместна, и при данных M и N не существует БИХ-фильтра, у которого первые $M{+}N{+}1$ отсчётов импульсной характеристики совпадают с заданными. Но он может существовать при большем порядке фильтра. Поэтому, если позволяет количество известных (заданных) отсчётов импульсной характеристики, следует увеличить M и N на единицу, заново построить систему (5) и вычислить ранги для новой системы уравнений.

3. Если $\mathrm{rang}(P) = \mathrm{rang}(\overline{P}) < M{+}N{+}1$, то система уравнений недоопределена, то есть имеет бесконечное множество решений. Было бы неправильно выбрать какое-то одно решение из этого множества, так как при меньшем порядке фильтра существует единственное решение системы (5). Поэтому следует уменьшить M и N на единицу, заново построить систему (5) и проверить её на наличие единственного решения.

Блок-схема этого алгоритма, назовем его для краткости алгоритмом А1, изображена на рис. 1.

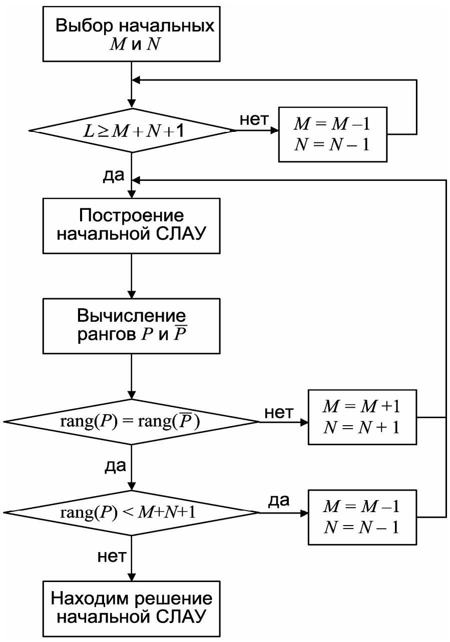

Рис. 1. Алгоритм А1, приводящий к определению коэффициентов БИХ-фильтра по импульсной характеристике

Таким образом за счёт второго и третьего пунктов алгоритма А1, начав с любых M и N, придём к минимально возможным M и N, при которых система уравнений (5) имеет решение. Решив систему уравнений, фактически найдём БИХ-фильтр, у которого $M{+}N{+}1$ первых элементов импульсной характеристики совпадают с $M{+}N{+}1$ первыми элементами Y. То есть соответствие уже будет установлено, но ещё не для всей последовательности Y длиной L. Поэтому следующим шагом алгоритма является проверка остальных $L{-}M{-}N{-}1$ членов заданной импульсной характеристики на соответствие найденному решению.

Для этого рассмотрим систему (2), построенную с M и N, при которых было найдено решение. Если при этом ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы системы окажутся равными $M{+}N{+}1$, значит добавленные $L{-}M{-}N{-}1$ уравнений являются линейно-зависимыми от уравнений, составляющих систему (5). Поэтому, последние $L{-}M{-}N{-}1$ членов последовательности Y не противоречат найденному решению, и все члены Y являются первыми L отсчётами импульсной характеристики найденного цифрового фильтра.

Возможен и другой, вычислительно более простой способ проверки. По известным коэффициентам фильтра можно сгенерировать его импульсную характеристику и сравнить поэлементно с известной последовательностью.

Возникает вопрос: в каком случае алгоритм А1 приведет к определению коэффициентов БИХ-фильтра по импульсной характеристике Y? Как выяснилось, это будет выполнятся в том случае, когда члены последовательности Y являются отсчётами элементарных математических функций одной переменной f, взятыми с постоянным шагом. Аналитически и вычислительными экспериментами на данный момент доказано [2], что f может быть:

- любой полиномиальной функцией;
- любой показательной функцией;
- синусоидой или косинусоидой;
- произвольной периодической функцией при условии, что период функции кратен частоте дискретизации;
- любой линейной комбинацией (суммой) указанных функций.

Приведём доказательство для случая, когда f представлена полиномом 2-й степени.

<u>ПРИМЕР 1</u>. Доказать в общем виде, что для любой последовательности Y длины $L \geq 6$, члены которой являются равноотстоящими отсчётами квадратичной функции $y_i{=}f(i){=}a{\cdot}i^2{+}b{\cdot}i{+}c$, $a \neq 0$, $i{=}0,\dots,L{-}1$, существует рекурсивный цифровой фильтр, импульсная характеристика которого совпадает с Y.

<u>Доказательство</u>. Начав с любого $M{>}1$ и $N{=}M{-}1$ и выполнив действия описанные в алгоритме А1, обнаружим, что начальная система уравнений (5) обладает полным рангом только при $M{=}3$, $N{=}2$. Для построения такой системы уравнений необходима последовательность Y длины не меньше 6. Несложными эквивалентными преобразованиями матрица системы приводится к следующему треугольному виду:

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&-c&0&0\\0&0&1&-a-b-c&-c&0\\0&0&0&-4a-2b-c&-a-b-c&-c\\0&0&0&-9a-3b-c&-4a-2b-c&-a-b-c\\0&0&0&-16a-4b-c&-9a-3b-c&-4a-2b-c\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&-c&0&0\\0&0&1&-a-b+c&-c&0\\0&0&0&-2a&-a-b&-c\\0&0&0&0&-2a&-a-b\\0&0&0&0&0&-2a\end{pmatrix}$$

Аналогично для расширенной матрицы:

$$\overline{P}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&-c\\0&1&0&-c&0&0&-a-b-c\\0&0&1&-a-b-c&-c&0&-4a-2b-c\\0&0&0&-4a-2b-c&-a-b-c&-c&-9a-3b-c\\0&0&0&-9a-3b-c&-4a-2b-c&-a-b-c&-16a-4b-c\\0&0&0&-16a-4b-c&-9a-3b-c&-4a-2b-c&-25a-5b-c\end{pmatrix}\sim\ \sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&-c&0&0&0\\0&0&1&-a-b+c&-c&0&0\\0&0&0&-2a&-a-b&-c&0\\0&0&0&0&-2a&-a-b&0\\0&0&0&0&0&-2a&0\end{pmatrix}$$

Таким образом, ранги матриц P и $\overline{P}$ равны при любых параметрах a, b и c, $a \neq 0$. Построим теперь те же матрицы, но с L строками, $L>M+N+1$. После аналогичных эквивалентных преобразований матрицы приводятся к следующему треугольному виду:

$$P\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&-c&0&0\\0&0&1&-a-b+c&-c&0\\0&0&0&-2a&-a-b&-c\\0&0&0&0&-2a&-a-b\\0&0&0&0&0&-2a\\0&0&0&0&0&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\overline{P}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&-c&0&0&0\\0&0&1&-a-b+c&-c&0&0\\0&0&0&-2a&-a-b&-c&0\\0&0&0&0&-2a&-a-b&0\\0&0&0&0&0&-2a&0\\0&0&0&0&0&0&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Значит $\mathrm{rang}(P) = \mathrm{rang}(\overline{P}) = 6$, и добавленные $L–M–N–1$ уравнений линейно-зависимы от уравнений начальной системы. Поэтому решение, найденное для начальной системы, состоящей из 6-ти уравнений, будет удовлетворять последовательности отсчётов квадратичной функции любой длины большей 5. Это решение представляет собой 6 коэффициентов рекурсивного цифрового фильтра: $b0, b1, b2, a1, a2, a3$.

Таким образом, для любой последовательности Y длины $L \geq 6$, члены которой являются равноотстоящими отсчётами квадратичной функции $y_i=f(i)=a\cdot i^2+b\cdot i+c$, $a\neq 0$, $i=0,\dots, L-1$, существует рекурсивный цифровой фильтр третьего порядка, импульсная характеристика которого совпадает с Y.

Доказательство для других видов f проводится аналогично. Главное отличие состоит в том, что различным функциям может соответствовать цифровой фильтр разного порядка.

Минимально достаточные значения M и N фильтров, соответствующие определённым элементарным функциональным зависимостям f, а также определяемое ими минимально необходимое для расчёта количество начальных отсчётов импульсной характеристики, представлены в таблице 1. Полиномиальные функции для краткости приведены только до 4-й степени.

Приведённые в таблице 1 зависимости являются достаточно простыми, и скорее всего члены исходной последовательностей будут подчиняться им в редких случаях. Гораздо более реальным представляется случай, когда значения членов импульсной характеристики y_i подчиняются некоторой конечной сумме элементарных функций, то есть их линейной комбинации. Назовём функции, для которых существуют конечные *M* и *N (*и они известны) — *функциями, известными алгоритму А1*. Можно доказать, что, если значения коэффициентов импульсной характеристики ЦФ подчиняются конечной сумме таких функций, то для такого фильтра могут быть найдены *M* и *N*, и он может быть рассчитан. Доказательство этого проводится аналогично, приведенному в примере 1. Примеры минимальных значений *M* и *N* для фильтров с импульсными характеристиками, которые являются суммами элементарных функций известными алгоритму А1, приведены в таблице 2.

Из таблиц 1 и 2 видно, что чем более сложна функциональная зависимость, тем больше коэффициентов у соответствующего фильтра. Однако рост числа коэффициентов невелик и фактически пропорционален росту параметров функциональной зависимости.

Проиллюстрируем работу алгоритма расчёта ЦФ на конкретном примере.

ПРИМЕР 2. Пусть дана последовательность Y = (48, 35, 24, 15, 8, 3, 0, –1, 0, 3). Значения членов Y определяются выражением $y_i = i^2 - 14i + 48$, $i = 0, 1, 2, \dots 9$, то есть они являются отсчётами квадратичной функции, взятыми с шагом 1 (но заранее это неизвестно, известна только сама последовательность). Надо найти рекурсивный ЦФ, у которого начало импульсной характеристики совпадает с Y.

Таблица 1.

Минимально достаточные значения M и N для элементарных функций

Зависимость		M	N	$L_{\min}$
Линейная	$y_i = k \cdot i + b$	2	1	4
Квадратичная	$y_i = a \cdot i^2 + b \cdot i + c$	3	2	6
Кубическая	$y_i = a \cdot i^3 + b \cdot i^2 + c \cdot i + d$	4	3	8
Полином 4-й степени	$y_i = a \cdot i^4 + b \cdot i^3 + c \cdot i^2 + di + e$	5	4	10
Периодическая, T — количество отсчётов, приходящееся на один период	произвольная	T	$T-1$	$2T$
Показательная	$y_i = k \cdot a^i + c$	2	1	4
Синусоида	$y_i = a \cdot sin(b \cdot i + c) + d$	3	2	6
Косинусоида	$y_i = a \cdot cos(b \cdot i + c) + d$	3	2	6

Таблица 2.

Минимальные M и N для линейных комбинаций функций

Зависимость		M	N	$Lmin$
Сумма линейной и периодической с периодом 2	Например, $y_i = a \cdot i + b + c \cdot (-1)i$	3	2	6
Сумма квадратичной и периодической с периодом 3		5	4	10
Сумма двух синусоид	$y_i = k_1 \cdot \sin(f_1 \cdot i + \varphi_1) + k_2 \cdot \sin(f_2 \cdot i + \varphi_2) + c$	5	4	10
Сумма показательной, квадратичной и синусоидальной функций	$y_i = k_1 \cdot a^{bi} + k_2 \cdot i^2 + k_3 \cdot i + k_4 \cdot \sin(f \cdot i + \varphi)c$	6	5	12
Сумма трёх синусоид	$y_i = k_1 \cdot \sin(f_1 \cdot i + \varphi_1) + k_2 \cdot \sin(f_2 \cdot i + \varphi_2) + k_3 \cdot \sin(f_3 \cdot i + \varphi_3) + c$	7	6	14

Необходимо выбрать какое-то начальное количество коэффициентов фильтра. Выберем M = 5 (N, как указывалось выше, равно M – 1). Построив начальную систему уравнений и вычислив ранги её матриц, находим что она совместна, но обладает неполным рангом (8, при порядке системы равном 10). Поэтому, в соответствии с алгоритмом А1, уменьшаем M и N на единицу. При M = 4 ранг матрицы системы также меньше порядка системы (7 при порядке системы равном 8). Наконец, СЛАУ (5), построенная для M=3, получается совместной и определённой. То есть ранги матрицы системы уравнений и расширенной матрицы максимальны и равны.

$$\begin{cases} b_0 = 48, \\ b_1 - 48a_1 = 35, \\ b_2 - 35a_1 - 48a_2 = 24, \\ -24a_1 - 35a_2 - 48a_3 = 15, \\ -15a_1 - 24a_2 - 35a_3 = 8, \\ -8a_1 - 15a_2 - 24a_3 = 3. \end{cases} \quad (6)$$

После этого систему (6) можно решить при помощи любого стандартного метода. Находим: $b_0 = 48$, $b_1 = -109$, $b_2 = 63$, $a_1 = -3$, $a_2 = 3$, $a_3 = -1$.

Затем дополняем систему до полной (10 уравнений, 6 неизвестных). Теперь в ней учтены все члены последовательности Y. Находим ранги матриц системы и убеждаемся, что они не изменились. Это говорит о том, что все члены Y не противоречат найденному решению, даже члены с 6-го по 9-й, которые не участвовали в его нахождении. Для дополнительной проверки вычислим первые 10 отсчётов импульсной характеристики найденного фильтра и убедимся, что они совпадают с исходной последовательностью.

$$y(n) = \sum_{k=0}^{2} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{3} a_k y(n-k)$$

$$y(0) = 1 \cdot b_0 = 48$$

$$y(1) = 1 \cdot b_1 - y(0) \cdot a_1 = 35$$

$$y(2) = 1 \cdot b_2 - y(1) \cdot a_1 - y(0) \cdot a_2 = 24$$

$$y(3) = -y(2) \cdot a_1 - y(1) \cdot a_2 - y(0) \cdot a_3 = 15$$

$$y(4) = -y(3) \cdot a_1 - y(2) \cdot a_2 - y(1) \cdot a_3 = 8$$

$$y(5) = -y(4) \cdot a_1 - y(3) \cdot a_2 - y(2) \cdot a_3 = 3$$

$$y(6) = -y(5) \cdot a_1 - y(4) \cdot a_2 - y(3) \cdot a_3 = 0$$

$$y(7) = -y(6) \cdot a_1 - y(5) \cdot a_2 - y(4) \cdot a_3 = -1$$

$$y(8) = -y(7) \cdot a_1 - y(6) \cdot a_2 - y(5) \cdot a_3 = 0$$

$$y(9) = -y(8) \cdot a_1 - y(7) \cdot a_2 - y(6) \cdot a_3 = 3$$

Заключение

Как видно, описанная методика довольно проста и может быть существенно модифицирована и оптимизирована. Все формы импульсных характеристик, к которым можно применить методику, определяются возможными функциями f, о которых говорилось выше. Это полиномиальные, показательные и периодические функции, либо их линейные комбинации. Так как полиномиальные и показательные функции являются расходящимися, то фильтр с такой импульсной характеристикой будет неустойчивым. Поэтому, с точки зрения расширения возможностей применения предлагаемой методики, для синтеза устойчивых цифровых фильтров важен поиск нерасходящихся функций f, а ещё лучше —

сходящихся к нулю. Полученный таким образом фильтр будет заведомо устойчивым. Тем не менее, применение алгоритма возможно и в случаях, когда устойчивость синтезируемого фильтра не имеет значения [1].

В завершение необходимо сказать, почему N было принято равным $M - 1$. В этом случае количества коэффициентов фильтра a_k и b_k получаются равными. Такое соотношение было определено опытным путём. Если выбрать N меньшим, чем $M - 1$, то решения вообще не будет существовать — система уравнений (5) будет несовместна. Если выбрать N большим, чем $M - 1$, то все коэффициенты b_k найденного фильтра начиная с M-го будут нулевыми. Поэтому дополнительные коэффициенты b_k не будут вносить никаких изменений на процесс вычисления импульсной характеристики в соответствии с (1).

Необходимо также еще раз отметить, что если рассмотренный алгоритм А1 находит решение, то импульсная характеристика рассматриваемого цифрового фильтра соответствует какой-то элементарной математической функции, либо же некоторой конечной сумме таких функций. Поэтому по окончании анализа получаемых коэффициентов алгоритм А1 может стать основой методики отыскания отрезков элементарных функций в числовых последовательностях [2].

Таким образом, предложен и обоснован на примерах алгоритм синтеза цифрового БИХ-фильтра по его импульсной характеристике, работоспособный в том случае, если она соответствует элементарной математической функции или линейной комбинации таких функций.

Литература

1. Никитин Д.А. Сжатие временных рядов с использованием блочной интерполяции // Информационные технологии моделирования и управления. Науч.-технич. журнал. — Воронеж: Научная книга, 2007. — Вып. 1 (35). — С. 85–89.
2. Ханов В.Х., Никитин Д.А. Алгоритм анализа числовых последовательностей // Вестник СибГАУ. — Красноярск, 2006. — № 6 (13). — С. 10-14.