

ПАРАУНИТАРНЫЕ БАНКИ ФИЛЬТРОВ НА ОСНОВЕ АЛГЕБРЫ КВАТЕРНИОНОВ: ТЕОРИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ

Парфенюк М., Петровский А.А.

1. Введение в банки фильтров

1.1. Определения

Банк фильтров – цифровая система, состоящая из секций анализа и синтеза, называемых банком фильтров анализа и банком фильтров синтеза (рис. 1.1). Входной сигнал $x(n)$, представленный последовательностью отсчетов, разбивается при помощи фильтров блока анализа $H_k(z)$ ($k = 0, 1, \dots, M-1$) на M субполосных составляющих, которые в идеальном случае в частотной области не перекрываются. Операции, выполняемые блоком синтеза, являются обратными операциями блока анализа. Подобранным соответствующим образом набор фильтров блока синтеза $F_k(z)$ ($k = 0, 1, \dots, M-1$), можно восстановить исходный сигнал $y(n)$ из его субполосных компонент.

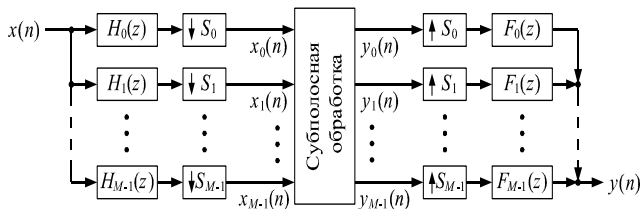


Рис. 1.1. Банк фильтров: система анализа/синтеза сигнала

Банк фильтров относится к классу многоскоростных систем цифровой обработки сигналов [2-4], в которых частота дискретизации различна в разных точках системы. Значение коэффициента темпа поступления отсчетов в канале (коэффициента децимации S_k) задается утверждением о дискретизации сигнала в зависимости от ширины частотной полосы канала B_k и его положения в банке фильтров. Оригинальная частота дискретизации f_s сигнала в k -ом канале теоретически может быть уменьшена в $S_k \leq f_s/B_k$ раз. Равенство, в данном случае, означает, что канал является максимально децимированным: $\sum_{k=0}^{M-1} 1/S_k = 1$. Таким образом, в частотно-временном представлении сигнала исключена избыточность, т.е. сумма отсчетов во всех каналах соответствует количеству отсчетов в исходном сигнале. Банк фильтров считается передецимированным, если

Параунитарные банки фильтров (ПУБФ) могут рассматриваться как наиболее значимое преобразование среди многоскоростных систем цифровой обработки сигналов [1]. Это обусловлено тем фактом, что подобные банки являются преобразованиями без потерь в дополнение к гарантированной перфективной реконструкции сигнала. Точное соотношение между энергиями во всем частотном диапазоне и в субполосах сильно упрощает теоретические выкладки и делает ПУБФ полезными в применении к компрессии (кодированию) изображений. Серьезной практической проблемой, связанной с реализацией ПУБФ на арифметике с фиксированной запятой, является потеря свойства перфективной реконструкции сигнала банком фильтров. Это обусловлено чувствительностью структуры ПУБФ к квантованию коэффициентов. В данной работе представлен новый подход к синтезу и конструированию решетчатых структур 4-х и 8-ми канальных ПУБФ на основе алгебры кватернионов. В отличие от известных решений, предложенные структуры являются структурами без потерь даже при выполнении вычислений с конечной точностью. Финансовая поддержка работы осуществлялась Министерством науки и высшей школы Республики Польша (грант № 519 030 32/3775).

$\sum_{k=0}^{M-1} 1/S_k > 1$, т.е. достаточно, чтобы хотя бы в одном канале коэффициент децимации не был равен числу каналов. Более сложные случаи позиционирования субполос каналов в банках фильтров рассмотрены в [5-7].

Соотношение между z - преобразованием сигналов на входе и выходе M -канального банка фильтров, изображенного на рис. 1.1, является следующим [2]:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{M-1} F_k(z) \frac{1}{S_k} \sum_{l=0}^{S_k-1} H_k(zW_{S_k}^l) X(zW_{S_k}^l), \tag{1.1}$$

где $W_{S_k} = e^{-j2\pi/S_k}$. Анализ данного выражения показывает, что в банке возможны искажения входного сигнала: амплитудные, фазовые и отражения частотных характеристик (элайзинг), обусловленные наличием дециматоров и интерполяторов. Величина данных искажений зависит как от частотных характеристик канальных фильтров, так и выбора коэффициентов децимации S_k . Анализ искажений, возникающих в структуре банка фильтров, проще анализировать в максимально децимированном банке фильтров, для которого соотношение (1.1) значительно упрощается:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{M-1} T_k(z) X(zW_M^k), \tag{1.2}$$

где $T_k(z)$ – передаточная функция k -го канала:

$$T_k(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} F_l(z) H_l(zW_M^k). \tag{1.3}$$

Выходной сигнал $y(n)$ системы анализа-синтеза банка фильтров будет свободен от элайзинговой составляющей $X(zW_M^k), k > 0$ в случае, если

$$T_k(z) = 0, \text{ для } 1 \leq k < M. \tag{1.4}$$

В банке фильтров, для которого справедливо условие (1.4), остаются только амплитудные и фазовые искажения, которые определяются согласно следующему выражению:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = T_0(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H_k(z) F_k(z). \quad (1.5)$$

Очевидно, что для получения перфективной реконструкции входного сигнала $x(n)$ банком фильтров, передаточная функция искажений $T_0(z)$ должна принять форму

$$T_0(z) = cz^{-\Delta}, c \neq 0, \Delta \in \mathbb{N} \quad (1.6)$$

простого звена задержки с некоторым масштабированием амплитуды.

Полное восстановление или перфективная реконструкция – свойство банка цифровых фильтров, заключающееся в том, что сигнал, прошедший через схему анализа-синтеза, идентичен входному с точностью до задержки. Для этого фильтры синтеза должны подавлять наложение частотных характеристик (элайзинг) и устранять амплитудные и фазовые искажения [1,2].

Параунитарный (ортогональный) банк фильтров (ПУБФ) – банк фильтров, у которого передаточные функции анализирующих и синтезирующих фильтров и их соответственно смещенные версии ортогональны друг другу. Фильтры синтеза в параунитарных банках являются транспонированными версиями фильтров анализа [1]:

$$F_k(z) = H_k^T(z^{-1}). \quad (1.7)$$

При соблюдении этого условия обеспечивается возможность перфективной реконструкции банком фильтров входного сигнала $x(n)$.

1.2. Полифазное представление

Пусть передаточные функции секций анализа и синтеза банка фильтров представлены в виде соответствующих векторов:

$$\mathbf{H}(z) = [H_0(z) \ H_1(z) \ \dots \ H_{M-1}(z)]^T, \\ \mathbf{F}(z) = [F_0(z) \ F_1(z) \ \dots \ F_{M-1}(z)]^T, \quad (1.8)$$

тогда можно выбрать такие полифазные матрицы анализа

$$\mathbf{E}(z) = \begin{bmatrix} E_{00}(z) & E_{01}(z) & \dots & E_{0,M-1}(z) \\ E_{10}(z) & E_{11}(z) & \dots & E_{1,M-1}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{M-1,0}(z) & E_{M-1,1}(z) & \dots & E_{M-1,M-1}(z) \end{bmatrix}$$

и синтеза

$$\mathbf{D}(z) = \begin{bmatrix} D_{00}(z) & D_{01}(z) & \dots & D_{0,M-1}(z) \\ D_{10}(z) & D_{11}(z) & \dots & D_{1,M-1}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{M-1,0}(z) & D_{M-1,1}(z) & \dots & D_{M-1,M-1}(z) \end{bmatrix},$$

что векторы передаточных функций секций анализа и синтеза можно представить следующим образом [2]:

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{E}(z^M) \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} & \dots & z^{-(M-1)} \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{F}(z) = \begin{bmatrix} z^{-(M-1)} & z^{-(M-2)} & \dots & 1 \end{bmatrix} \mathbf{D}(z^M). \quad (1.9)$$

Для получения перфективной реконструкции на компоненты полифазных матриц накладывается дополнительное ограничение:

$$\mathbf{D}(z)\mathbf{E}(z) = cz^{-\Delta}\mathbf{I}, c \neq 0, \Delta \geq 0, \quad (1.10)$$

где c – ненулевая константа; Δ – задержка, выраженная целым числом интервалов дискретизации, вносимая секциями анализа-синтеза; \mathbf{I} – единичная матрица.

1.3. Решетчатые структуры параунитарных банков фильтров

M -канальный параунитарный банк фильтров анализа в *общем виде* может быть описан следующей факторизацией полифазной передаточной матрицы [8]:

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{R}_N \mathbf{\Lambda}(z) \mathbf{R}_{N-1} \mathbf{\Lambda}(z) \dots \mathbf{R}_1 \mathbf{\Lambda}(z) \mathbf{E}_0, \quad (1.11)$$

которая содержит $\mathbf{\Lambda}(z) = \text{diag}(z^{-1}, \mathbf{I}_{M-1})$ - матрицу задержек, ортогональные матрицы: общую \mathbf{E}_0 с $M(M-1)/2$ степенями свободы и $\mathbf{R}_i, i = 1 \dots N-1$, ограниченные до $M-1$ степени свободы. Оба типа матриц параметризованы планарными оборотами Гивенса, в которых каждый из них соответствует одной степени свободы.

Банк фильтров анализа, определяемый выражением (1.11), может быть представлен следующей решетчатой структурой (рис. 1.2).

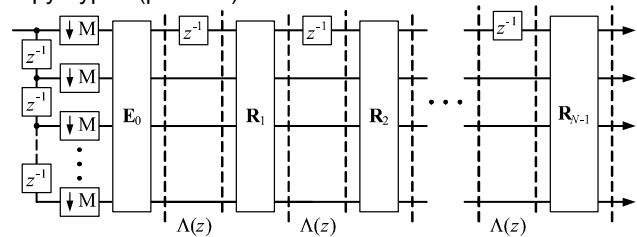


Рис. 1.2. Решетчатая структура банка фильтров анализа

На практике широкое распространение получили банки фильтров с линейными фазочастотными характеристиками (ФЧХ). Для ПУБФ анализа с линейной ФЧХ и четного числа каналов M хорошо известна факторизация передаточной полифазной матрицы $\mathbf{E}(z)$:

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{G}_{N-1}(z) \mathbf{G}_{N-2}(z) \dots \mathbf{G}_1(z) \mathbf{E}_0, \quad (1.12)$$

где $\mathbf{E}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{\Phi}_0 \mathbf{W} \text{diag}(\mathbf{I}_{M/2}, \mathbf{J}_{M/2})$, (1.13)

$$\mathbf{G}_i(z) = \frac{1}{2} \mathbf{\Phi}_i \mathbf{W} \mathbf{\Lambda}(z) \mathbf{W}, i = 1, \dots, N-1, \quad (1.14)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{M/2} & \mathbf{I}_{M/2} \\ \mathbf{I}_{M/2} & -\mathbf{I}_{M/2} \end{bmatrix}, \quad (1.15)$$

$$\mathbf{\Lambda}(z) = \text{diag}(\mathbf{I}_{M/2}, z^{-1} \mathbf{I}_{M/2}), \quad (1.16)$$

$$\mathbf{\Phi}_i = \text{diag}(\mathbf{U}_i, \mathbf{V}_i). \quad (1.17)$$

\mathbf{U}_i и \mathbf{V}_i - произвольные ортогональные матрицы размера $M/2 \times M/2$. Кроме того, для упрощения вышеобозначенной факторизации для $i > 0$ матрица \mathbf{U}_i может быть представлена единичной матрицей [9], тогда

$$\mathbf{\Phi}_i = \text{diag}(\mathbf{I}, \mathbf{V}_i), i > 0. \quad (1.30)$$

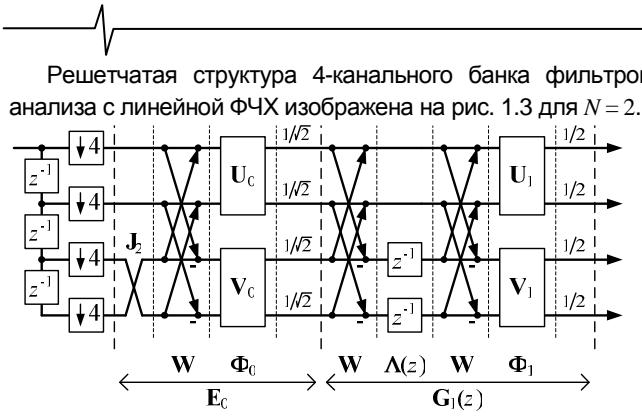


Рис. 1.3. Решетчатая структура 4-канального банка фильтров анализа с линейной ФЧХ

Среди ПУБФ с линейной ФЧХ выделяются банки фильтров, у которых наблюдается попарная зеркальная симметрия частотных характеристик фильтров относительно $\pi/2$ [10]. Для этого передаточные функции или импульсные характеристики анализирующих фильтров должны удовлетворять соответственно следующим условиям:

$$H_{M-1-k}(z) = \pm H_k(-z) \text{ или } h_{M-1-k}(n) = \pm (-1)^n h_k(n),$$

где $k=0, \dots, N-1$, $n=0, \dots, L-1$, L – длина импульсной характеристики фильтра. Для четного числа каналов M ПУБФ с попарной зеркальной симметрией частотных характеристик фильтров может быть легко получен, если незначительно модифицировать факторизацию решетчатой структуры ПУБФ с линейной ФЧХ. Действительно, достаточно ассоциировать U_i с V_i в (1.17) и представить матрицу U_i следующим образом [10]:

$$U_i = \Gamma V_i \Gamma, \quad i=0, \dots, N-2, \quad (1.20)$$

$$U_{N-1} = J_{M/2} V_{N-1} \Gamma,$$

где $J_{M/2}$ – обратная единичная матрица; Γ – диагональная матрица, элементы которой определяются как $\gamma_{mm} = (-1)^{m-1}$, $m=1, \dots, M/2$.

1.4. Регулярность и эффекты квантования коэффициентов

Для M -канального банка фильтров регулярность K -го порядка может быть определена как число нулей на частотах элайзинга $2\pi k/M$, $k=1, \dots, M-1$ фильтра нижних частот $H_0(z)$. Чтобы получить K -ый порядок регулярности, полифазная матрица $\mathbf{E}(z)$ должна удовлетворять условию [11]:

$$\frac{d^n}{dz^n} \left\{ \mathbf{E}(z^M) \left[1 \ z^{-1} \ \dots \ z^{-(M-1)} \right]^T \right\}_{z=1} = c_n \mathbf{e},$$

где $c_n \neq 0$ для $n=0, \dots, K-1$, $\mathbf{e} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. Например, в 8-ми канальном банке фильтров ($M=8$) с регулярностью 1-го порядка ($K=1$) значения амплитудно-частотных характеристик всех канальных фильтров $H_k(z)$, $k=1, \dots, M-1$ равны нулю на нулевой частоте. Таким образом, постоянная составляющая на выходе банка фильтров локализуется фильтром нижних частот $H_0(z)$ и не «просачивается» в другие канальные фильтры, т.е. не проявляется так называемый эффект «DC leakage». В итоге, в обработанном изображении таким банком фильтров отсутствуют артефакты «шахматной доски» (checkerboard artifact).

К сожалению, описанные выше факторизации теряют свойство параунитарности, когда матрицы U_i и V_i представ-

ляются с ограниченной точностью [12]. Перфективная реконструкция не обеспечивается банком фильтров даже решетчатыми структурами с фиксированной запятой. Это обусловлено тем, что квантование компонент ортогональных матриц в общем случае приведет к изменению норм столбцов. Например, квантованная матрица оборотов Гивенса

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q(\cos \alpha) & -Q(\sin \alpha) & 0 \\ 0 & Q(\sin \alpha) & Q(\cos \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

не ортогональна, так имеет две различные нормы столбцов: 1 и $\sqrt{Q^2(\cos \alpha) + Q^2(\sin \alpha)} \neq 1$, здесь Q – оператор квантования.

2. Кватернионы и ортогональные матрицы

2.1. Кватернионы

Кватернион – это гиперкомплексное число размерности 4 [13,14]

$$Q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k, \quad q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

с одной реальной и тремя мнимыми частями. Мнимые единицы i, j, k соотносятся между собой согласно следующим уравнениям:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1; \quad ij = -ji = k; \quad jk = -kj = i;$$

$$ki = -ik = j. \quad (2.2)$$

Особенность умножения кватернионов в том, что оно не подчиняется переместительному закону умножения ($PQ \neq QP$, где P, Q – произвольные кватернионы), но подчиняется сочетательному. Сложение кватернионов осуществляется аналогично сложению комплексных чисел. Сопряженным для кватерниона вида (2.1) будет кватернион:

$$\bar{Q} = q_1 - q_2 i - q_3 j - q_4 k. \quad (2.3)$$

Модуль кватерниона определяется аналогично модулю комплексного числа:

$$|Q| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}. \quad (2.4)$$

Основные свойства модуля кватерниона также совпадают с подобными свойствами модуля комплексного числа, в частности:

$$Q \cdot \bar{Q} = |Q|^2; \quad |Q_1 \cdot Q_2|^2 = |Q_1|^2 \cdot |Q_2|^2. \quad (2.5)$$

Деление кватернионов определяется как умножение на обратную величину $Q^{-1} = \bar{Q}/|Q|^2$. При этом удовлетворяется тождество $QQ^{-1} = Q^{-1}Q = 1$. Полярная форма кватерниона определяется следующим образом [13]:

$$\begin{cases} q_1 = |Q| \cdot \cos \varphi \\ q_2 = |Q| \cdot \sin \varphi \cdot \cos \psi \\ q_3 = |Q| \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi \cdot \cos \chi \\ q_4 = |Q| \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi \cdot \sin \chi \end{cases}, \quad (2.6)$$

где φ, ψ, χ – произвольные значения углов ($0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \psi \leq \pi$, $0 \leq \chi \leq 2\pi$). Полярное представление кватернионов сокращает число степеней свободы до трех и позволяет легко параметризовать кватернионы с фиксированными модулями, в частности, с единичными кватернионами, модуль которых равен 1.

2.2. Матрицы умножения

Операции сложения и умножения кватернионов также могут быть реализованы с использованием векторно-матричной арифметики. Для этого кватернионы представляются в виде четырехмерных векторов: $P=[p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4]^T$, $Q=[q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T$. В этом случае сложение кватернионов будет производиться по правилу сложения векторов, а умножение кватернионов в векторной форме производится по правилу умножения вектора на матрицу:

$$R = PQ = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & -P_2 & -P_3 & -P_4 \\ P_2 & P_1 & -P_4 & P_3 \\ P_3 & P_4 & P_1 & -P_2 \\ P_4 & -P_3 & P_2 & P_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1q_1 - P_2q_2 - P_3q_3 - P_4q_4 \\ P_2q_1 + P_1q_2 - P_4q_3 + P_3q_4 \\ P_3q_1 + P_4q_2 + P_1q_3 - P_2q_4 \\ P_4q_1 - P_3q_2 + P_2q_3 + P_1q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1P_1 - q_2P_2 - q_3P_3 - q_4P_4 \\ q_2P_1 + q_1P_2 + q_4P_3 - q_3P_4 \\ q_3P_1 - q_4P_2 + q_1P_3 + q_2P_4 \\ q_4P_1 + q_3P_2 - q_2P_3 + q_1P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & -q_2 & -q_3 & -q_4 \\ q_2 & q_1 & q_4 & -q_3 \\ q_3 & -q_4 & q_1 & q_2 \\ q_4 & q_3 & -q_2 & q_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Данные выражения можно представить в более простом виде:

$$R = P \cdot Q = \mathbf{M}^+(P) \cdot Q = \mathbf{M}^-(Q) \cdot P, \quad (2.8)$$

где матрица $\mathbf{M}^+(P)$ – левый операнд умножения кватерниона P, а матрица $\mathbf{M}^-(Q)$ представляет собой правый операнд умножения кватерниона Q:

$$\mathbf{M}^+(P) = \begin{bmatrix} P_1 & -P_2 & -P_3 & -P_4 \\ P_2 & P_1 & -P_4 & P_3 \\ P_3 & P_4 & P_1 & -P_2 \\ P_4 & -P_3 & P_2 & P_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^-(Q) = \begin{bmatrix} q_1 & -q_2 & -q_3 & -q_4 \\ q_2 & q_1 & q_4 & -q_3 \\ q_3 & -q_4 & q_1 & q_2 \\ q_4 & q_3 & -q_2 & q_1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Для изображения операндов умножения кватернионов на структурных схемах могут быть использованы следующие графические обозначения:

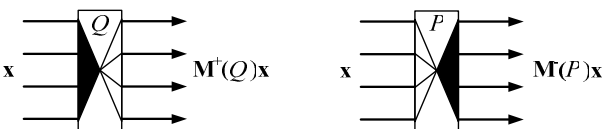


Рис. 2.1. Графические изображения операндов умножения кватернионов

Обе матрицы операндов умножения являются ортогональными, то есть справедливо условие:

$$\mathbf{M}^\pm(Q)^{-1} = \mathbf{M}^\pm(Q)^T \quad (2.10)$$

и имеют детерминант равный +1, что позволяет отнести их к группе специальных матриц размерностью 4x4, на-

зываемых SO(4) [17]. Для рассматриваемых матриц операторов умножения верны следующие равенства:

$$\mathbf{M}^+(Q_{N-1})\mathbf{M}^+(Q_{N-2})\dots\mathbf{M}^+(Q_0) = \mathbf{M}^+(Q_{N-1}Q_{N-2}\dots Q_0), \quad (2.11a)$$

$$\mathbf{M}^-(Q_{N-1})\mathbf{M}^-(Q_{N-2})\dots\mathbf{M}^-(Q_0) = \mathbf{M}^-(Q_{N-1}Q_{N-2}\dots Q_0). \quad (2.11b)$$

Существует другое интересное и полезное соотношение:

$$\mathbf{M}^\pm(\bar{Q}) = \mathbf{M}^\pm(Q)^T. \quad (2.12)$$

Соотношения между матрицами умножения кватернионов и произвольными 4 x 4 и 8 x 8 ортогональными матрицами является интригующим с точки зрения перспектив синтеза ПУБФ.

2.3. Параметризация ортогональных матриц

Для обоснования применения умножителей кватернионов в качестве составляющих блоков ПУБФ было выдвинуто и доказано несколько теорем, основными из которых являются следующие:

1) для каждой ортогональной матрицы A размерностью 4x4 существует уникальная (с точностью до знака) пара единичных кватернионов P и Q, таких что [16]:

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}^+(P) \cdot \mathbf{M}^-(Q) = \mathbf{M}^-(Q) \cdot \mathbf{M}^+(P), \quad (2.13)$$

2) когда блочно-диагональная матрица $\text{diag}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ размерностью 8x8 образована из двух произвольных ортогональных матриц U и V размерностью 4x4, то существуют четыре единичных кватерниона P, Q, R, S, для которых справедливо соотношение [17,18]:

$$\text{diag}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \text{diag}(\mathbf{M}^-(S), \mathbf{M}^-(S)) \cdot \text{diag}(\mathbf{M}^-(\bar{R}), \mathbf{M}^-(R)) \cdot \text{diag}(\mathbf{M}^+(\bar{Q}), \mathbf{M}^+(Q)) \cdot \text{diag}(\mathbf{M}^+(P), \mathbf{M}^+(P)). \quad (2.14)$$

В случае, когда оба блока диагональной матрицы равны (U = V), выражение (2.14) примет следующий вид:

$$\text{diag}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = \text{diag}(\mathbf{M}^-(Q), \mathbf{M}^-(Q)) \cdot \text{diag}(\mathbf{M}^+(P), \mathbf{M}^+(P)) \quad (2.15)$$

Если же блок U диагональной матрицы $\text{diag}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ является единичной матрицей, то выражение (2.14) преобразуется к виду:

$$\text{diag}(\mathbf{I}_4, \mathbf{V}) = \text{diag}(\mathbf{M}^-(Q), \mathbf{M}^-(Q)) \cdot \text{diag}(\mathbf{M}^-(\bar{Q}), \mathbf{M}^-(Q)) \cdot \text{diag}(\mathbf{M}^+(\bar{P}), \mathbf{M}^+(P)) \cdot \text{diag}(\mathbf{M}^+(P), \mathbf{M}^+(P)). \quad (2.16)$$

2.4. Умножитель кватернионов как составной блок ПУБФ

Факторизация (2.13) всегда соответствуют ортогональному преобразованию сигналов, даже если ее компоненты квантованы. Это происходит потому, что столбцы каждой матрицы умножения кватернионов составлены из одних и тех же элементов с точностью до знака, например:

$$\begin{bmatrix} Q(q_1) & -Q(q_2) & -Q(q_3) & -Q(q_4) \\ Q(q_2) & Q(q_1) & -Q(q_4) & Q(q_3) \\ Q(q_3) & Q(q_4) & Q(q_1) & -Q(q_2) \\ Q(q_4) & -Q(q_3) & Q(q_2) & Q(q_1) \end{bmatrix}.$$

Видно, что как строчные, так и столбцовые нормы постоянны и равны $\sqrt{Q(q_1)^2 + Q(q_2)^2 + Q(q_3)^2 + Q(q_4)^2}$, но не обязательно единичны, невзирая на конечную точность представления матриц (или кватернионных коэффициентов). Таким образом, матрица A в (2.13) всегда представляет ортогональ-

ное преобразование, а умножение кватернионов может рассматриваться как основной строительный блок ПУБФ.

Произвольная 4 x 4 матрица требует хранения 16 действительных чисел и 32 чисел для блочно-диагональной матрицы 8 x 8. В данном же случае, необходимо запомнить в памяти 8 и 16 действительных чисел (2 и 4 кватерниона), соответственно. Один из недостатков кватернионной факторизации заключается в большом количестве вычислений, что является ценой за сохранение ортогональности. Вычислительная сложность факторизаций (2.13) в два раза, а (2.14) в четыре раза больше, чем простое умножение матрицы 4 x 4 на вектор. Однако, учитывая специфическую структуру матриц умножения кватернионов, можно выполнить данные операции только за 8 реальных умножений [19]. Реализация умножителей кватернионов на основе распределенной арифметики [20] или с использованием 4-х мерных алгоритмов CORDIC [21] хорошо согласуется со структурами FPGA.

3. Решетчатые структуры ПУБФ на основе кватернионов

3.1. Четырехканальный ПУБФ

Матрицы \mathbf{E}_0 и \mathbf{R}_i в факторизации (1.11) решетчатой структуры *общего параунитарного банка фильтров анализа*, как показано в [22], можно выразить через матрицы умножения кватернионов следующим образом:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{M}^+(Q_0)\mathbf{M}^-(P_0), \quad (3.1)$$

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{M}^\pm(Q_i), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (3.2)$$

где P_0 и все Q_i – некоторые единичные кватернионы, тогда передаточная функция решетчатой структуры *общего ПУБФ анализа* будет равна:

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{M}^\pm(Q_{N-1})\Lambda(z)\mathbf{M}^\pm(Q_{N-2})\Lambda(z)\dots \dots \mathbf{M}^\pm(Q_1)\Lambda(z)\mathbf{M}^\pm(Q_0)\mathbf{M}^-(P_0) \quad (3.3)$$

Как доказано в [22], если в (3.2) для всех $i = 1, \dots, N-1$ используются левые операнды умножения и значения кватернионов удовлетворяют равенству:

$$P_0 = \pm \frac{1}{2} \overline{O \cdot Q_{N-1} \cdot Q_{N-2} \cdot \dots \cdot Q_0}, \quad (3.4)$$

где O – кватернион, все части которого равны 1: $O = 1 + i + j + k$, то для решетчатой структуры ПУБФ (3.3) выполняется условие регулярности 1-го порядка.

Решетчатая структура 4-канального *общего ПУБФ анализа* (для $N = 3$), определяемая выражением (3.3), показана на рис. 3.1.

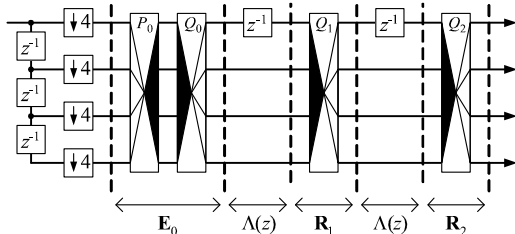


Рис. 3.1. Решетчатая структура 4-канального ПУБФ анализа на кватернионах

Выражение (1.10) задает связь между матрицами передаточных функций фильтров банков анализа и синтеза для обеспечения перфективной реконструкции.

Следовательно, требуемый банк фильтров синтеза может быть определен как:

$$\mathbf{D}(z) = \mathbf{E}(z)^{-1} c z^{-A} \mathbf{I}. \quad (3.5)$$

Подставив (3.3) в формулу (3.5) и учитывая соотношения (2.10) и (2.12) для матриц операндов умножения кватернионов, можно получить следующую факторизацию:

$$\mathbf{D}(z) = c z^{-A} \mathbf{M}^-(\overline{P_0})\mathbf{M}^+(\overline{Q_0})\Lambda(z)^{-1}\mathbf{M}^\pm(\overline{Q_1})\dots \dots \Lambda(z)^{-1}\mathbf{M}^\pm(\overline{Q_{N-1}})\Lambda(z)^{-1}\mathbf{M}^\pm(\overline{Q_N})$$

где $\overline{Q_i}, \overline{P_0}$ – кватернионы, комплексно-сопряженные к Q_i, P_0 . Приняв константу c равной 1 (для сохранения масштаба) и использовав следующие замены:

$$\hat{\Lambda}(z) = \Lambda(z)^{-1} z^{-1} \mathbf{I}_2, \quad (3.6)$$

$$\hat{\mathbf{E}}_0 = \mathbf{M}^-(\overline{P_0})\mathbf{M}^+(\overline{Q_0}), \quad (3.7)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_i = \mathbf{M}^\pm(\overline{Q_i}), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (3.8)$$

окончательная факторизация для ПУБФ синтеза будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{D}(z) = \mathbf{M}^-(\overline{P_0})\mathbf{M}^+(\overline{Q_0})\hat{\Lambda}(z)\mathbf{M}^\pm(\overline{Q_1})\dots \dots \hat{\Lambda}(z)\mathbf{M}^\pm(\overline{Q_{N-2}})\hat{\Lambda}(z)\mathbf{M}^\pm(\overline{Q_{N-1}}) = \hat{\mathbf{E}}_0 \hat{\Lambda}(z) \hat{\mathbf{R}}_1 \dots \hat{\Lambda}(z) \hat{\mathbf{R}}_{N-2} \hat{\Lambda}(z) \hat{\mathbf{R}}_{N-1}. \quad (3.9)$$

Факторизация (3.9) описывает решетчатую структуру ПУБФ синтеза (для $N = 3$), показанную на рис. 3.2.

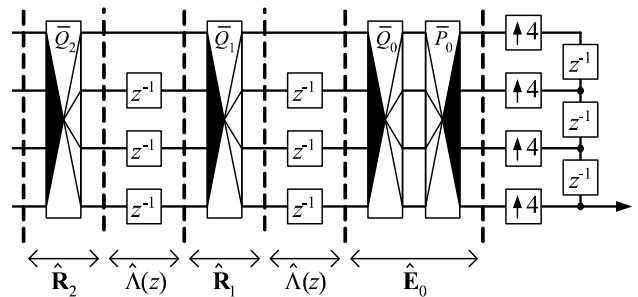


Рис. 3.2. Решетчатая структура 4-канального банка фильтров синтеза на кватернионах

Реализация *параунитарного банка фильтров анализа с линейной ФЧХ* (1.12) на основе умножителей кватернионов предполагает определение Φ_0 и Φ_i как [22]:

$$\Phi_0 = \mathbf{M}^-(P_0)\mathbf{M}^+(Q_0), \quad (3.10)$$

$$\Phi_i = \mathbf{M}^-(P_i), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (3.11)$$

где все P_i и Q_0 – некоторые единичные кватернионы. Если в (3.10) и (3.11)

$$Q_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{P_0 \cdot P_1 \cdot \dots \cdot P_{N-1} \cdot A}, \quad (3.12)$$

то факторизация (1.12), (3.10) – (3.12) соответствует регулярности 1-го порядка. Здесь A – специальный кватернион: $A = 1 + i$.

Решетчатая структура ПУБФ анализа с линейной ФЧХ на основе умножителей кватернионов (для $N = 3$) представлена на рис. 3.3.

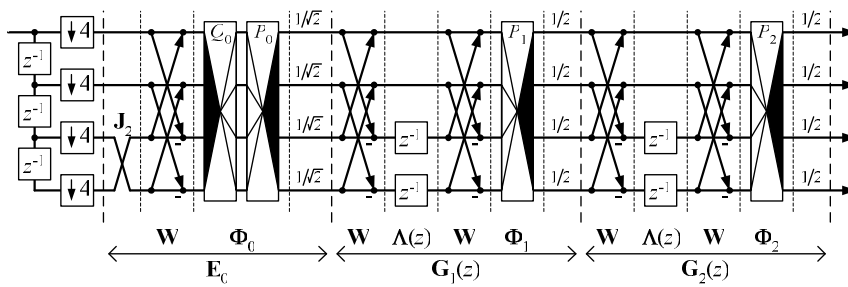


Рис. 3.3. Решетчатая структура 4-канального банка фильтров анализа с линейной ФЧХ на кватернионах

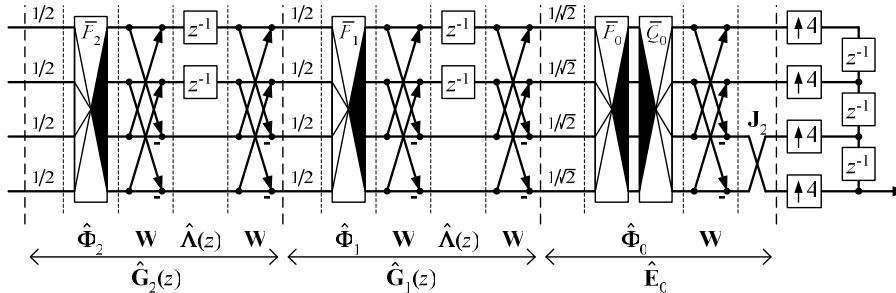


Рис. 3.4. Решетчатая структура 4-канального банка фильтров синтеза с линейной ФЧХ на кватернионах

Факторизация ПУБФ синтеза на кватернионах задается следующим образом:

$$\mathbf{D}(z) = \hat{\mathbf{E}}_0 \hat{\mathbf{G}}_1 \dots \hat{\mathbf{G}}_{N-2} \hat{\mathbf{G}}_{N-1}, \quad (3.13)$$

$$\hat{\mathbf{E}}_0 = \text{diag}(\mathbf{I}_2, \mathbf{J}_2) \mathbf{W} \hat{\Phi}_0 \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (3.14)$$

$$\hat{\mathbf{G}}_i(z) = \mathbf{W} \hat{\Lambda}(z) \mathbf{W} \hat{\Phi}_i \frac{1}{2}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (3.15)$$

$$\hat{\Lambda}(z) = \text{diag}(z^{-1} \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_2), \quad (3.16)$$

$$\hat{\Phi}_0 = \mathbf{M}^+(\bar{Q}_0) \mathbf{M}^-(\bar{P}_0), \quad (3.17)$$

$$\hat{\Phi}_i = \mathbf{M}^-(\bar{P}_i), \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (3.18)$$

Решетчатая структура 4-канального ПУБФ синтеза с линейной ФЧХ, соответствующая факторизации (3.13) – (3.18) (для $N=3$), изображена на рис. 3.4.

Решетчатая структура на кватернионах ПУБФ с линейной ФЧХ и попарно зеркальной симметрией частотных характеристик фильтров получается в результате факторизации (1.12), (1.20) для соответственно определенных матриц Φ_i и Φ_{N-1} [22]:

$$\Phi_i = \mathbf{M}^-(P_i), \quad i = 0, \dots, N-2, \quad (3.19)$$

$$\Phi_{N-1} = \mathbf{M}^-(P_{N-1}) \text{diag}(\mathbf{J}_2 \Gamma, \mathbf{I}_2), \quad (3.20)$$

где $\Gamma = \text{diag}(1, -1)$ и P_i – некоторые единичные кватернионы, выбор которых в соответствии с

$$P_{N-1} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} A \cdot \bar{P}_0 \cdot P_1 \cdot \dots \cdot P_{N-2} \quad (3.21)$$

обеспечивает регулярность первого порядка банку фильтров.

Соответствующая факторизация передаточной функции банка фильтров синтеза задается следующим образом:

$$\mathbf{D}(z) = \hat{\mathbf{E}}_0 \hat{\mathbf{G}}_1 \dots \hat{\mathbf{G}}_{N-2} \hat{\mathbf{G}}_{N-1}, \quad (3.22)$$

$$\hat{\mathbf{E}}_0 = \text{diag}(\mathbf{I}_2, \mathbf{J}_2) \mathbf{W} \hat{\Phi}_0 \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (3.23)$$

$$\hat{\mathbf{G}}_i(z) = \mathbf{W} \hat{\Lambda}(z) \mathbf{W} \hat{\Phi}_i \frac{1}{2}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (3.24)$$

$$\hat{\Lambda}(z) = \text{diag}(z^{-1} \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_2), \quad (3.25)$$

$$\hat{\Phi}_{N-1} = \text{diag}(\Gamma \mathbf{J}_2, \mathbf{I}_2) \mathbf{M}^-(\bar{P}_{N-1}), \quad (3.26)$$

$$\hat{\Phi}_i = \mathbf{M}^-(\bar{P}_i), \quad i \text{ д\`e } i = 0, \dots, N-2. \quad (3.27)$$

Решетчатые структуры ПУБФ анализа и синтеза с попарно зеркальной симметрией частотных характеристик фильтров приведены на рис. 3.5 и 3.6 соответственно ($N=3$).

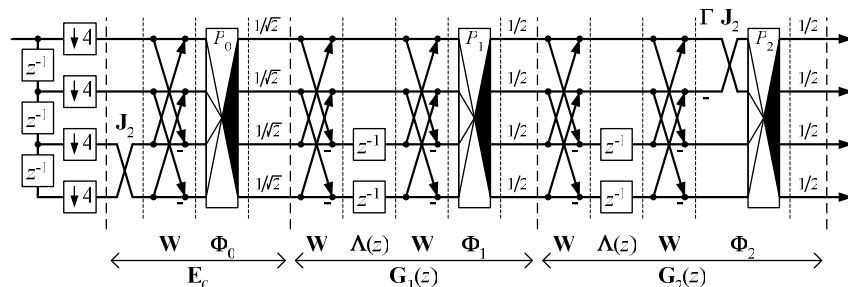


Рис. 3.5. Решетчатая структура 4-канального банка фильтров анализа с попарно зеркальной симметрией частотных характеристик фильтров на кватернионах

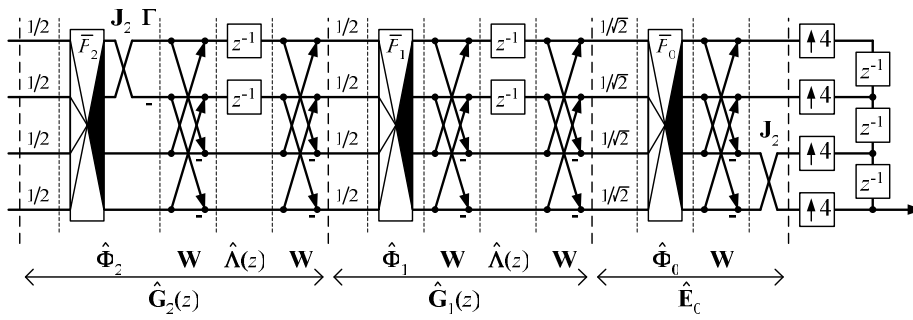


Рис. 3.6. Решетчатая структура 4-канального банка фильтров синтеза с попарно зеркальной симметрией частотных характеристик фильтров на кватернионах

3.2. Восьмиканальный ПУБФ

Вариант кватернионной факторизации (1.12) – (1.18) для 8-ми канального ПУБФ с линейной ФЧХ анализа определяется следующими подстановками [5,17]:

$$\Phi_i = \text{diag}(\mathbf{M}^-(\bar{R}_i), \mathbf{M}^-(R_i)) \cdot \text{diag}(\mathbf{M}^+(\bar{Q}_i), \mathbf{M}^+(Q_i)), \quad (3.28)$$

äëý $i=1, \dots, N-1$

$$\Phi_0 = \text{diag}(\mathbf{M}^-(S_0), \mathbf{M}^-(S_0)) \cdot \text{diag}(\mathbf{M}^-(\bar{R}_0), \mathbf{M}^-(R_0)) \cdot \text{diag}(\mathbf{M}^+(\bar{Q}_0), \mathbf{M}^+(Q_0)) \cdot \text{diag}(\mathbf{M}^+(P_0), \mathbf{M}^+(P_0)), \quad (3.29)$$

где S_0, P_0 и все Q_i, R_i – единичные кватернионы. Данный ПУБФ (рис. 3.7) будет банком фильтров с регулярностью первого порядка, если

$$R_{N-1} = \frac{1}{2} \bar{Q}_{N-1} \dots \bar{Q}_0 \cdot P_0 \cdot O \cdot \bar{R}_0 \cdot S_0 \cdot \bar{R}_1 \dots \bar{R}_{N-2}. \quad (3.30)$$

Для соответствующего 8-канального банка синтеза (рис. 3.8) в факторизацию (3.13) – (3.18) вводятся следующие подстановки:

$$\hat{\Phi} = \text{diag}(\mathbf{M}^+(Q_i), \mathbf{M}^+(Q_i)) \cdot \text{diag}(\mathbf{M}^-(R_i), \mathbf{M}^-(R_i)), \quad i=1, \dots, N-1. \quad (3.31)$$

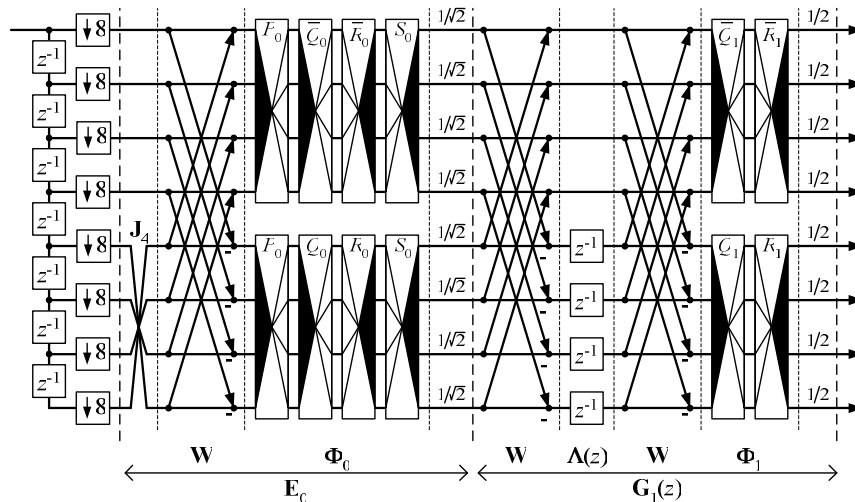


Рис. 3.7. Решетчатая структура 8-канального банка фильтров анализа с линейной ФЧХ на кватернионах (для $N=2$)

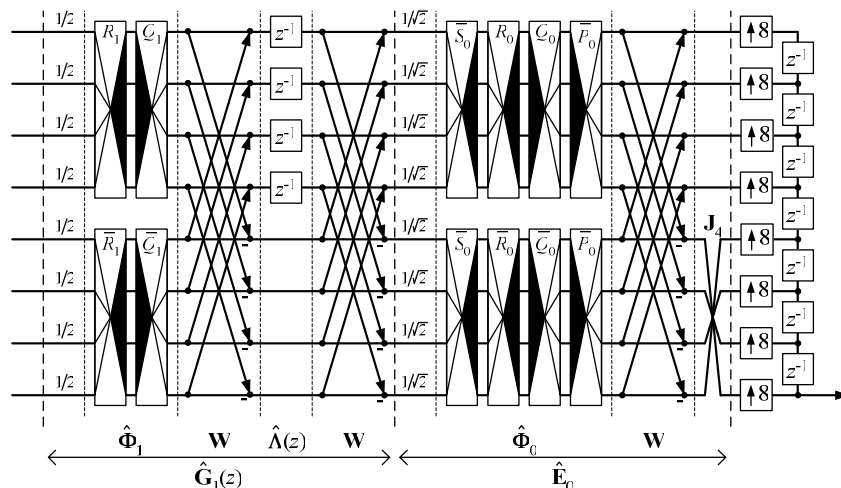


Рис. 3.8. Решетчатая структура 8-канального банка фильтров синтеза с линейной ФЧХ на кватернионах (для $N=2$)

$$\hat{\Phi}_0 = \text{diag}(\mathbf{M}^+(\bar{P}_0), \mathbf{M}^+(\bar{P}_0)) \cdot \text{diag}(\mathbf{M}^+(Q_0), \mathbf{M}^+(\bar{Q}_0)) \cdot \text{diag}(\mathbf{M}^-(R_0), \mathbf{M}^-(\bar{R}_0)) \cdot \text{diag}(\mathbf{M}^-(S_0), \mathbf{M}^-(\bar{S}_0)), \quad (3.32)$$

Решетчатые структуры 8-ми канальных ПУБФ с линейной ФЧХ и попарно зеркальной симметрией частотных характеристик фильтров (1.12) – (1.20) на квантаренионах получаются для соответственно определенных матриц Φ_i и Φ_{N-1} [5,17]:

для банка анализа (рис. 3.9):

$$\Phi_i = \text{diag}(\Gamma, \mathbf{I}_4) \cdot \text{diag}(\mathbf{M}^-(Q_i), \mathbf{M}^-(Q_i)) \cdot \text{diag}(\mathbf{M}^+(P_i), \mathbf{M}^+(P_i)) \cdot \text{diag}(\Gamma, \mathbf{I}_4), \quad \text{для } i = 0, \dots, N-2, \quad (3.33)$$

$$\Phi_{N-1} = \text{diag}(\mathbf{J}_4, \mathbf{I}_4) \cdot \text{diag}(\mathbf{M}^-(Q_{N-1}), \mathbf{M}^-(Q_{N-1})) \cdot \text{diag}(\mathbf{M}^+(P_{N-1}), \mathbf{M}^+(P_{N-1})) \cdot \text{diag}(\Gamma, \mathbf{I}_4) \quad (3.34)$$

где все Q_i, P_i – единичные кватернионы, выбор которых в соответствии с соотношением

$$P_{N-1} = \frac{1}{2} \hat{E} \bar{Q}_{N-1} \dots \bar{Q}_0 \cdot P_0 \cdot \bar{Q}_0 \cdot \bar{P}_0 \cdot \bar{P}_1 \dots \bar{P}_{N-2} \quad (3.35)$$

обеспечивает регулярность первого порядка банку фильтров;

для банка синтеза (рис. 3.10):

$$\hat{\Phi}_i = \text{diag}(\Gamma, \mathbf{I}_4) \cdot \text{diag}(\mathbf{M}^+(\bar{P}_i), \mathbf{M}^+(\bar{P}_i)) \cdot \text{diag}(\mathbf{M}^-(\bar{Q}_i), \mathbf{M}^-(\bar{Q}_i)) \cdot \text{diag}(\Gamma, \mathbf{I}_4), \quad \text{для } i = 0, \dots, N-2 \quad (3.36)$$

$$\hat{\Phi}_{N-1} = \text{diag}(\Gamma, \mathbf{I}_4) \cdot \text{diag}(\mathbf{M}^+(\bar{P}_{N-1}), \mathbf{M}^+(\bar{P}_{N-1})) \cdot \text{diag}(\mathbf{M}^-(\bar{Q}_{N-1}), \mathbf{M}^-(\bar{Q}_{N-1})) \cdot \text{diag}(\mathbf{J}_4, \mathbf{I}_4) \quad (3.37)$$

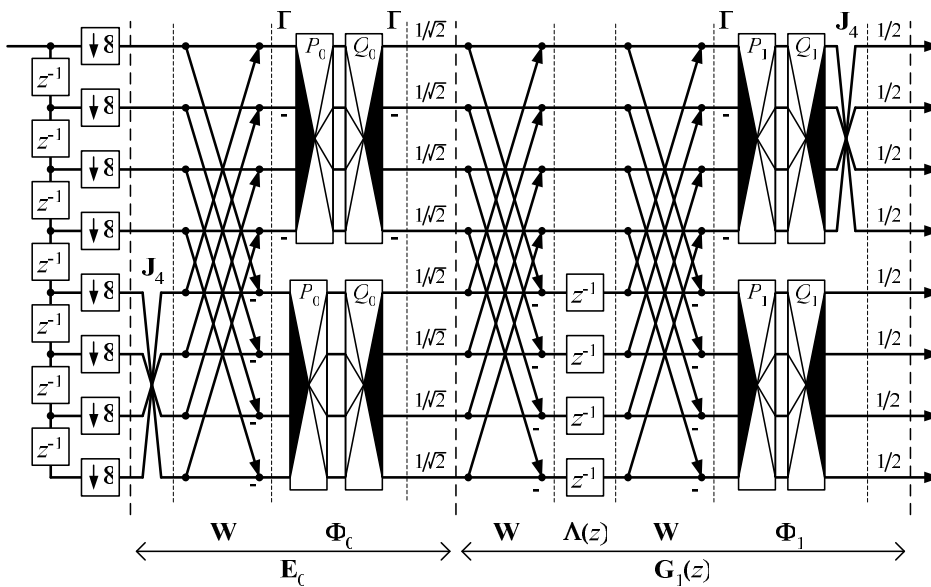


Рис. 3.9. Решетчатая структура 8-канального банка фильтров анализа с попарно зеркальной симметрией частотных характеристик фильтров на кватернионах (для $N = 2$)

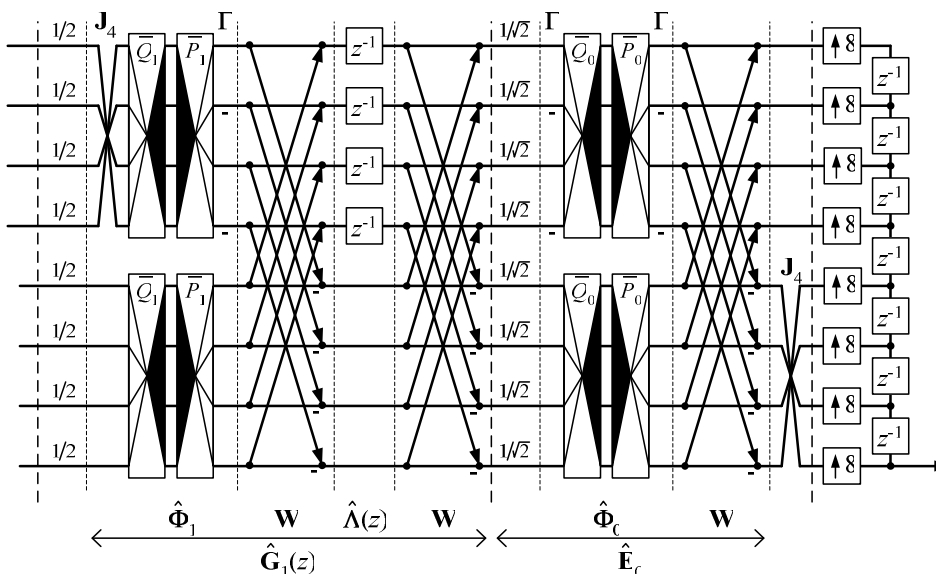


Рис. 3.10. Решетчатая структура 8-канального банка фильтров синтеза с попарно зеркальной симметрией частотных характеристик фильтров на кватернионах (для $N = 2$)

4. Примеры синтеза

4.1. Процедура расчета

Для получения ПУБФ с высоким коэффициентом эффективности кодирования (coding gain) и хорошей частотной избирательностью кватернионные коэффициенты оптимизируются путем минимизации двух показателей:

- степень ослабления в полосе задержки каналов, выраженная в терминах энергии:

$$\mathcal{E}_{SBE} = \sum_{k=0}^{M-1} \int_{\omega \in \Omega_k} |H_k(e^{j\omega})|^2 d\omega,$$

где Ω_k определяют полосу задержки k -го фильтра банка фильтров;

- коэффициент эффективности кодирования:

$$CG = 10 \lg \frac{\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \sigma_{x_k}^2}{\left(\prod_{k=0}^{M-1} \sigma_{x_k}^2 \right)^{\frac{1}{M}}},$$

где $\sigma_{x_k}^2$ - дисперсия сигнала в k -ом канале банка фильтров, значение которой для всех M каналов определяются через диагональные элементы автокорреляционной матрицы \mathbf{R}_{yy} выходного сигнала $y(n)$: $\sigma_{x_k}^2 = [\mathbf{R}_{yy}]_{kk}$. Автокорреляционная матрица $\mathbf{R}_{yy} = \mathbf{H} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{H}^T$. Здесь \mathbf{R}_{xx} - автокорреляционная матрица входного сигнала $x(n)$, а \mathbf{H} - матрица преобразования, сформированная из импульсных характеристик фильтров банка следующим образом: $[\mathbf{H}]_{kn} = h_k(L-1-n)$, где $k = 0, \dots, M-1$, $n = 0, \dots, L-1$. В рассматриваемых ниже примерах синтеза ПУБФ матрица \mathbf{R}_{xx} конструировалась для входного сигнала $x(n)$, который формировался с помощью авторегрессионной

модели первого порядка AR(1) с единичной дисперсией и коэффициентом корреляции 0,95. Такая модель сигнала соответствует только обработке естественных изображений, для других типов сигналов потребуются другие модели.

Кватернионные коэффициенты решетчатых структур ПУБФ, приведенных выше, для процедуры синтеза представляются в полярной форме (2.6). Для решения задачи оптимизации (минимизация \mathcal{E}_{SBE} и CG) используются программы `fminsearch` и `fminunc` из пакета MATLAB. Далее, полученные коэффициенты конвертируются в рациональные числа с целью ликвидации операции умножения при аппаратной или программной реализации банка фильтров.

4.2. Четырехканальные ПУБФ

Результаты синтеза *общего 4-х канального ПУБФ* (3.3) с длиной фильтра равной 8 показаны ниже. Коэффициенты решетчатой структуры банка фильтров приведены в табл. 4.1, а соответствующая АЧХ - на рис. 4.1. Для данного банка фильтров коэффициент эффективности кодирования $CG = 8.1227$ дБ, и минимальное ослабление в полосе задержки составляет -20дБ, что вполне согласуется с результатами из [23]. Из анализа АЧХ (рис. 4.1) следует, что полученный ПУБФ действительно имеет регулярность 1-го порядка: кроме фильтра нижних частот все фильтры имеют нулевое значение АЧХ на частоте DC. С другой стороны, на комплексной плоскости корней (рис. 4.2) видно, что фильтр нижних частот имеет один ноль в каждой точке на единичной окружности, соответствующей зеркально элайзинговой частоте.

Таблица 4.1

Коэффициенты	Re(\cdot)	Im _i (\cdot)	Im _j (\cdot)	Im _k (\cdot)	Длина слова (бит)
r_0	-45/128	9/16	31/128	-5/8	8
s_0	-11/16	-1/2	1/16	7/16	5
s_1	3/8	1/8	3/4	-1/2	4

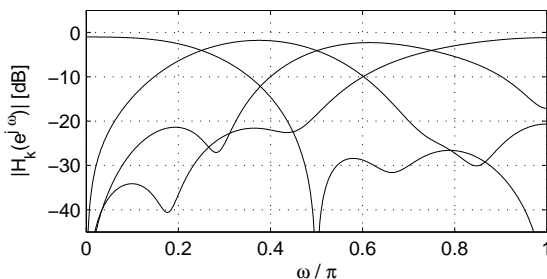


Рис. 4.1. АЧХ 4-х канальный ПУБФ

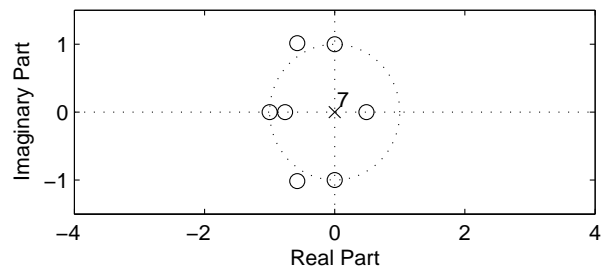


Рис. 4.2. Плоскость корней ПУБФ

Таблица 4.2

Коэффициенты	Re(\cdot)	Im _i (\cdot)	Im _j (\cdot)	Im _k (\cdot)	Длина слова (бит)
s_0	-231/512	459/1024	0	0	11
r_0	-7/8	-3/8	0	0	4
r_1	-3/16	15/16	0	0	5
r_2	-9/16	-13/16	0	0	5

Другой пример расчета показывает эффективность предложенного подхода построения ПУБФ на кватернионах с линейной ФЧХ. В табл. 4.2 приведены коэффициенты банка фильтров (длина фильтра – 12), а на рис. 4.3 иллюстрируется АЧХ данного ПУБФ, из которого видно, что банк также имеет регулярность первого рода. Коэффициент эффективности кодирования и минимальное ослабление в полосе затухания соответственно равны: 8.1845 дБ и -20дБ.

В табл. 4.3 и на рис. 4.5 и рис. 4.6 иллюстрируются результаты расчета 4-х канального ПУБФ с попарно зеркальной симметрией частотных характеристик фильтров на кватернионах (длина фильтра – 12), которые очень близки к результатам предыдущего примера: $CG= 8.1699$ дБ, минимальное ослабление в полосе затухания – 20дБ. Это объясняется схожестью расположения нулей на плоскости корней (сравни рис 4.4 и рис. 4.6)

Таблица 4.3

Коэффициенты.	$Re(\cdot)$	$Im_i(\cdot)$	$Im_j(\cdot)$	$Im_k(\cdot)$	Длина слова (бит)
r_0	7/8	3/8	0	0	4
r_1	3/16	-1	0	0	5
r_2	-17/128	43/64	0	0	8

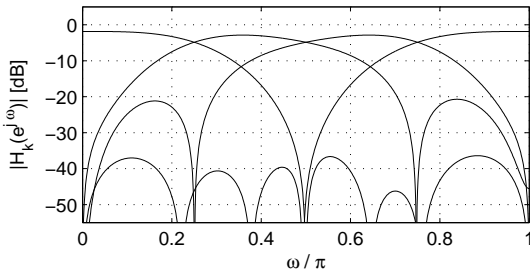


Рис. 4.3. ПУБФ с линейной ФЧХ

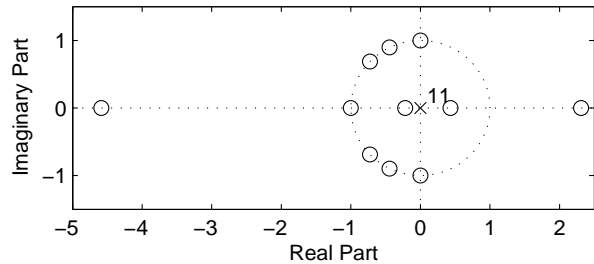


Рис. 4.4. Плоскость корней ПУБФ

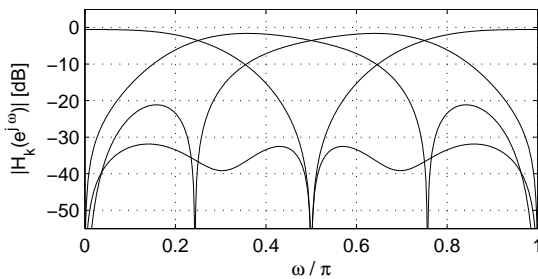


Рис. 4.5. АЧХ ПУБФ с попарно зеркальной симметрией частотных характеристик фильтров

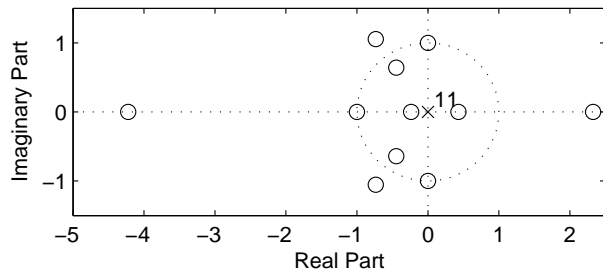


Рис. 4.6. Плоскость корней ПУБФ

4.3. Восьми канальные ПУБФ

В данном параграфе рассматриваются результаты двух примеров расчета 8-канальных ПУБФ как для арифметики с неограниченной точностью, так и для арифметики с фиксированной запятой: с линейной ФЧХ и с попарно зеркальной симметрией частотных характеристик фильтров. В обоих случаях факторизация содержит три ступени при длине фильтра 24.

Для первого банка фильтров с линейной ФЧХ и коэффициентами (см. Табл 4.4), представленными в арифметике с неограниченной точностью, коэффициент эффективности кодирования $CG= 9.3747$ дБ, а минимальное ослабление в полосе затухания равно – 21дБ, что видно из рис. 4.7.

В табл. 4.5 приведены коэффициенты второго банка фильтров, которые являются квантованными коэффициентами первого банка фильтров. Как видно из табл. 4.5, реализация данного ПУБФ не потребует умножителей. При этом, $CG= 9.3040$ дБ практически остался прежним, однако минимальное ослабление в полосе затухания уменьшилось до -13дБ, как показано на рис. 4.9.

Следует отметить, оба банка являются банками с регулярностью первого порядка, потому что их кватернионные коэффициенты (см. Табл. 4.4 и табл. 4.5) соответствуют условию (3.30). Анализ АЧХ (рис. 4.9 и рис 4.7) показывает, что в данных ПУБФ не проявляется эффект «DC leakage» (см. Раз-

дел 1.4). На комплексной плоскости корней (рис. 4.8) видно, что фильтр нижних частот имеет один ноль в каждой точке на единичной окружности, соответствующей зеркально элайзинговым частотам.

Синтез второго банка фильтров с попарно зеркальной симметрией частотных характеристик фильтров приводится сначала в арифметике с неограниченной точностью (табл. 4.6): коэффициент эффективности кодирования $CG= 9.3655$ дБ, минимальное ослабление в полосе затухания равно – 22дБ (рис. 4.10), а затем коэффициенты данного банка представляются в арифметике с фиксированной запятой – в рациональных числах (табл. 4.7), что позволяет избежать умножителей при практической реализации банка.

Квантование кватернионных коэффициентов (табл. 4.7), в данном случае, привело к незначительному уменьшению коэффициента эффективности кодирования $CG= 9.2549$ дБ и значения минимального ослабления в полосе затухания - -19 дБ (рис. 4.12). Учет условия (3.35) при синтезе банка фильтров с попарно зеркальной симметрией частотных характеристик фильтров гарантирует отсутствие искажений, обусловленных постоянной составляющей, а также анализ расположения нулей на комплексной плоскости корней показывает их корректность локализации (рис. 4.11).

Таблица 4.4.

Коэффициенты	Re(\cdot)	Im _i (\cdot)	Im _j (\cdot)	Im _k (\cdot)
s_0	-0.0297993	0.0669165	0.8901262	-0.449788
p_0	-0.2784728	-0.5164164	0.6659689	-0.4607087
q_0	-0.9687160	-0.0713704	-0.2281805	0.0665523
q_1	0.2571736	-0.2085346	-0.8265446	0.4551912
q_2	0.8835067	-0.2654561	0.0588609	-0.3814242
r_0	-0.1264641	0.6558758	-0.1001648	-0.7374285
r_1	0.9928326	0.0690029	-0.0687024	-0.0692971
r_2	0.9069558	0.3701135	-0.1523974	-0.1312336

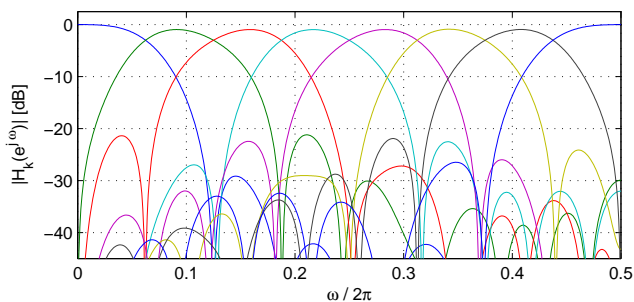


Рис. 4.7. АЧХ 8-канальных ПУБФ с линейной ФЧХ

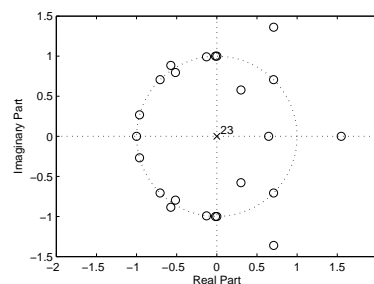


Рис. 4.8. Плоскость корней ПУБФ

Таблица 4.5

Коэффициенты	Re(\cdot)	Im _i (\cdot)	Im _j (\cdot)	Im _k (\cdot)	Длина слова (бит)
s_0	1/2	0	7/8	-1/8	4
p_0	-1/4	-1/2	5/8	-1/2	4
q_0	-15/16	-1/16	-1/4	0	5
q_1	1/4	-1/4	-7/8	1/2	4
q_2	7/8	-1/4	1/8	-3/8	4
r_0	-1/16	15/16	1/4	-1/4	5
r_1	15/16	1/16	-1/16	-1/16	5
r_2	$3820719/2^{22}$	$611699/2^{21}$	$-54443/2^{19}$	$-435031/2^{22}$	23

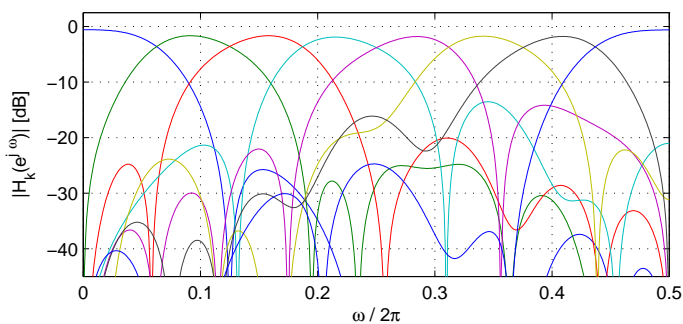


Рис. 4.9 АЧХ 8-канальных ПУБФ с линейной ФЧХ с квантованными коэффициентами

Таблица 4.6.

Коэффициенты	Re(\cdot)	Im _i (\cdot)	Im _j (\cdot)	Im _k (\cdot)
p_0	-0.0546530	-0.8381704	-0.2287760	0.4920823
p_1	0.9557711	0.0614376	0.1436822	0.2491636
p_2	-0.6224147	0.0345565	-0.5578179	-0.5479461
q_0	0.9916213	0.0606809	-0.0625301	-0.0953675
q_1	-0.0144669	0.6629532	0.1228110	0.7383774
q_2	-0.9805812	-0.0261340	0.0941266	0.1700519

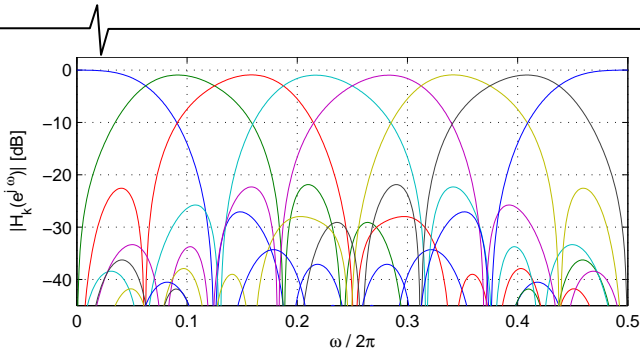


Рис. 4.10. АЧХ 8-канальных ПУБФ с попарно зеркальной симметрией частотных характеристик фильтров

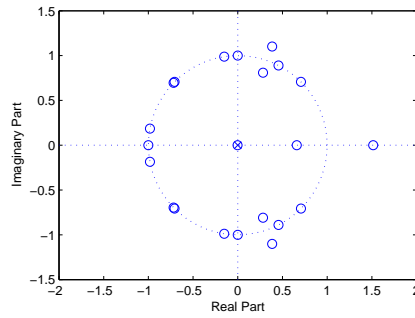


Рис. 4.11. Комплексной плоскости корней ПУБФ

Таблица 4.7

Коэффициенты	Re(·)	Im _i (·)	Im _j (·)	Im _k (·)	Длина слова (бит)
p_0	-1/8	-7/8	-1/4	1/2	4
p_1	7/8	0	1/8	1/4	4
p_2	$-4307/2^{13}$	$1349/2^{14}$	$-8563/2^{14}$	$-3261/2^{13}$	15
q_0	7/8	0	0	-1/8	4
q_1	0	5/8	1/8	3/4	4
q_2	-1	-1/16	1/16	1/8	5

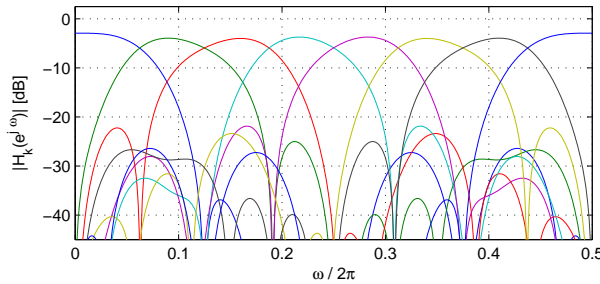


Рис. 4.12. АЧХ 8-канальных ПУБФ с попарно зеркальной симметрией частотных характеристик фильтров

5. Функциональная реализация параунитарного банка фильтров

5.1. Умножитель кватернионов на распределенной арифметике

В последнее время стремительно развиваются технологии проектирования специализированных встраиваемых процессоров реального времени на основе FPGA [24], главным преимуществом которых является возможность создавать встраиваемые процессоры реального времени, где возможен компромисс между производительностью и потребляемой мощностью. В данной работе рассматривается задача построения FPGA-ориентированных поточных процессоров ПУБФ как анализа, так и синтеза на умножителях кватернионов, которые реализованы на распределенной арифметике [20,25]. Исследуются характеристики данных процессоров: производительность, потребляемая мощность в зависимости от степени параллелизма в умножителях кватернионов.

Базовой операцией умножения кватернионов на правый операнд $M(Q)$ является вычисление суммы вида:

$$r_i = \sum_{k=1}^4 q_{ik} p_k = q_{i1} p_1 + q_{i2} p_2 + q_{i3} p_3 + q_{i4} p_4, i = 1, \dots, 4,$$

где q_{ik} – постоянные коэффициенты. Исходя из того, что обрабатываемые числа являются нормированными (выполняется условие $|p_k| \leq 1$) и представлены в дополнительном коде, то p_k можно записать как:

$$p_k = -b_{k0} + \sum_{n=1}^{B-1} b_{kn} 2^{-n},$$

где b_{kn} – значения битов (0 или 1); b_{k0} – знаковый разряд; B – разрядность входных чисел; $b_{k,B-1}$ – младший бит (LSB). Введем новые переменные:

$$c_{kn} = b_{kn} - \bar{b}_{kn}, c_{k0} = -(b_{k0} - \bar{b}_{k0}),$$

где $c_{kn}, c_{k0} \in \{-1, +1\}$; $\bar{b}_{kn}, \bar{b}_{k0}$ – инверсные значения битов b_{kn}, b_{k0} , тогда используя методику, изложенную в [18], продукт умножения кватернионов приводится к виду:

$$r_i = \sum_{n=0}^{(B/L)-1} F_i(b_{kn}) 2^{-nL} + 2^{-(B-L)} F_i(0),$$

где L – количество одновременно обрабатываемых битов;

$$F_i(b_{kn}) = \sum_{k=1}^4 \sum_{l=0}^{L-1} \frac{1}{2} q_{ik} 2^{-l} c_{k,nL+l}, F_i(0) = -2^{-L} \sum_{k=1}^4 q_{ik} -$$

суммы коэффициентов q_{ik} , рассчитываемые предварительно. Данное выражение получения продукта умножения кватернионов на основе распределенной арифметики описывает возможность одновременной обработки L битов входных данных (при этом L должно быть кратно B). Подобная реализация арифметических операций на распределенной арифметике получила название L-BAAT (L-bit-at-a-time). Структурная схема умножителя кватернионов по принципу L-BAAT приведена на рис. 5.1. Наличие блока коррекции переполнения вызвано

наличием дополнительного разряда в частичной сумме (разрядность $B+1$), что требует коррекции результата к разрядности B . Блок контроля нулевых данных предназначен для анализа входных данных на равенство нулю,

так как в таком случае результат будет нулевым. Усредненные результаты синтеза структур умножителей кватернионов по схеме L-BAAT на основе FPGA Xilinx Virtex v400-4 приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Результаты синтеза структур умножителей кватернионов по схеме L-BAAT

Параметры	Реализация L-BAAT				
	1-BAAT	2-BAAT	4-BAAT	8-BAAT	16-BAAT
Function Generators (LUTs)	219	339	561	958	1637
CLB Slices	110	170	281	479	819
Dffs or Latches	205	207	212	223	246
Макс. частота работы умножителя, МГц	58,1	56,0	40,6	29,8	18,6

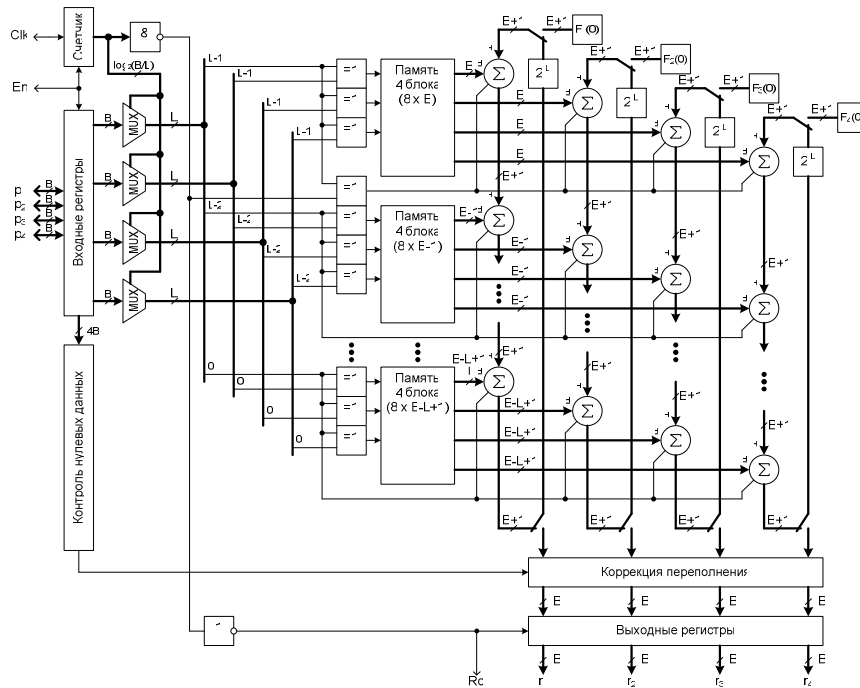


Рис. 5.1. Структурная схема умножителя кватернионов по схеме L-BAAT

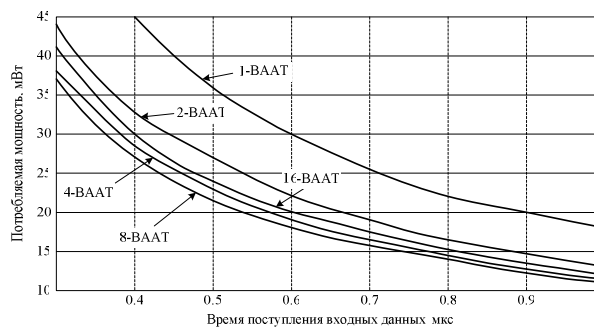


Рис. 5.2. Потребляемая мощность умножителем кватернионов на FPGA Xilinx Virtex v400-4

Таблица 5.2

Результаты синтеза поточных процессоров ПУБФ

Параметр	Значения					
	Банк анализа			Банк синтеза		
	1-BAAT	2-BAAT	4-BAAT	1-BAAT	2-BAAT	4-BAAT
Function Generators	1228	1863	2969	1298	1938	3064
CLB Slices	614	932	1485	702	969	1532
Dffs or Latches	1190	1200	1225	1404	1414	1439
Частота (ClkMul), МГц	58,1	46,3	40,4	58,1	46,5	40,0

Исследование реализации в FPGA схемы умножителя кватернионов по схеме L-BAAT для $B = 16$ показало нелинейную зависимость между потребляемой умножителем мощностью и скоростью поступления входных отсчетов (рис. 5.2). Как можно видеть из приведенных данных, наиболее эффективной по потребляемой мощности является схема 8-BAAT. Функция времени умножения от схемы построения умножителя кватернионов носит нелинейный характер: 1-BAAT: 0,292598 мкс; 2-BAAT: 0,1607142 мкс; 4-BAAT: 0,123152 мкс; 8-BAAT: 0,100671 мкс; 16-BAAT: 0,107526 мкс. Данный результат обусловлен двумя факторами: 1) «разрастанием» дерева сумматоров при увеличении значения L (см. рис. 5.1), что снижает максимальную частоту работы схемы (см. данные табл. 5.1); 2) наличием дополнительного такта инициализации умножителя, что с учетом необходимости B/L тактов для выполнения умножения дает следующее выражение для частоты работы умножителя:

$$f_{L-BAAT} = \left(\frac{B}{L} + 1 \right) / \Delta t,$$

где f_{L-BAAT} – частота работы умножителя, МГц; Δt – время поступления входных данных на умножитель, мкс. Таким образом, для построения умножителя кватернионов с минимально занимаемой площадью кристалла целесообразно использовать схему 1-BAAT, а для обеспечения максимальной пропускной способности умножителя и минимально потребляемой мощности – схему 8-BAAT. Реализация умножителя кватернионов на левый операнд будет отличаться от реализации на правый лишь содержанием блоков памяти.

5.2. Поточный процессор ПУБФ

Аппаратные затраты реализаций поточного процессора в зависимости от схемы умножителя кватернионов для $L=1,2,4$ приведены в табл. 5.2. Откуда видно, что площадь (количество CLB блоков), занимаемая банками, практически полностью определяется умножителями кватернионов, а частота работы процессора также ограничивается возможностями используемых умножителей (практически соответствует значениям из табл. 5.1). Латентность данных поточных процессоров определяется как $Lat = 2 \cdot (N+2) + (N+1)$, где $N+2$ – количество умножителей кватернионов в каждом банке фильтров; $N+1$ – задержка, вносимая алгоритмом, равна количеству блоков задержки.

Оценка ошибки реконструкции сигнала пропорциональна отклонению АЧХ структуры банк анализа – банк синтеза от идеальной характеристики (отклик схемы на дельта-импульс). Как можно видеть из рис. 5.3, наибольшие искажения наблюдаются для варианта 16-BAAT и составляют около 0,04 дБ. При этом отношение сигнал-шум для поточных процессоров ПУБФ в зависимости от схемы умножителя кватернионов составляет следующие значения: 1-BAAT: -74,3 дБ; 2-BAAT: -73,2 дБ; 4-BAAT: -70,5 дБ; 8-BAAT: -64,8 дБ; 16-BAAT: -63,0 дБ. Ухудшение результатов

при использовании схемы 16-BAAT по сравнению со схемой 1-BAAT находится примерно на уровне 10 дБ. Это объясняется сокращением разрядности предварительно рассчитываемых функций $F_i(b_{kn})$ и $F_i(0)$, хранимых в блоках памяти данных (см. рис. 5.1), что и вызывает нелинейное возрастание уровня шумов с увеличением уровня параллелизма на принципе L-BAAT. Улучшение данных характеристик можно получить, если использовать специальные методики синтеза ПУБФ, когда значения функций $F_i(b_{kn})$ и $F_i(0)$ не требуют округления при загрузке в память (например, 19/128, 1/16, 5/32 и т.д.), что позволит повысить точность выполнения умножения и, за счет больших возможностей методики синтеза ПУБФ, сократить занимаемую площадь кристалла и потребляемую мощность.

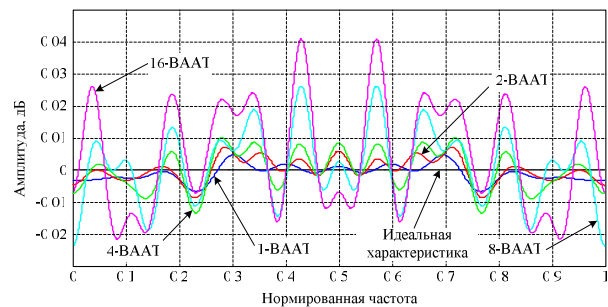


Рис. 5.3. АЧХ банка фильтров анализа-синтеза для различных реализаций умножителя кватернионов

6. Пример обработки изображения. Эффект регулярности первого рода

С целью продемонстрировать обработку изображения системой анализ-синтез на ПУБФ были спроектированы два 8-ми канальных ПУБФ с линейной ФЧХ ($N=1$): первый банк фильтров – банк, в котором отсутствует регулярность первого рода, а второй банк фильтров – ПУБФ с регулярностью первого порядка. Кватернионные коэффициенты обоих банков представлены 8-ми битными словами. При этом, коэффициенты эффективности кодирования были приблизительно одинаковые: $CG = 9,39$ дБ и $CG = 9,37$ дБ соответственно для первого и второго банков.

Далее осуществлялась обработка образа «Лена» на системе анализ-синтез двух данных ПУБФ. Объективные показатели обработки примерно равные: $PSNR = 34,82$ дБ, $MSE = 21,45$ для первого банка фильтров и $PSNR = 35,08$ дБ, $MSE = 20,21$ для второго банка с регулярностью первого порядка. На рис. 6.1а и рис. 6.1б представлены изображения реконструированные обоими ПУБФ. Изображение на рис. 6.1а обработано банком фильтров на кватернионах, коэффициенты которого не удовлетворяют условию (3.30). Здесь четко видна сетка поверх образа, представляющая собой артефакт «шахматной доски», обусловленный эффектом DC leakage. С другой стороны, изображение на рис. 6.1б чисто, потому что синтез второго ПУБФ на кватернионах осуществлялся с учетом требования (3.30), накладываемого на коэффициенты банка фильтров.



Рис. 6.1 а



Рис. 6.1 906

Заключение

В статье рассмотрен новый подход проектирования и реализации 4-х и 8-ми канальных ПУБФ на основе теории гиперкомплексных чисел, в частности, кватернионов, которая еще не применялась в области синтеза и анализа цифровых банков фильтров. Здесь умножитель кватернионов представлен как альтернативный модуль построения ПУБФ и может рассматриваться как обобщение планарных оборотов Гивенса. Представленные решетчатые структуры ПУБФ на кватернионах являются системами без потерь, несмотря на квантование коэффициентов, и могут рассматриваться как расширение классических двухканальных решетчатых структур, разработанных Вайдьянасаном и Хоангом. Более того, предложенный подход дает возможность непосредственного выражения условия регулярности первого порядка, которое зафиксировано в значениях коэффициентов решетчатой структуры ПУБФ и, следовательно, может легко удовлетворяться даже для арифметики с конечной точностью вычислений. Таким образом, данная теория синтеза решетчатых структур ПУБФ на кватернионах представляет большой интерес с практической точки зрения обработки сигналов и является хорошей альтернативой стандартной технике построения ПУБФ.

Литература

1. P.P. Vaidyanathan, Z. Doganata, "The role of lossless systems in modern digital signal processing: a tutorial", IEEE Trans. on Education, vol. 32, no. 3, pp. 181-197, 1989.
2. P.P. Vaidyanathan, Multirate systems and filter banks, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1993.
3. R.E. Crochiere, L.Rabiner, Multirate digital signal processing, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1983.
4. В.В.Витязев, Цифровая частотная селекция сигналов, Радио и связь, М., 1993, - 240с.
5. A.Plotrowski, M.Parfieniuk, Cyfrowe banki filtrów: analiza, synteza i implementacja dla systemów multimedialnych, Politechnika Białostocka, Białystok, 2006, - 389p.
6. R.G. Vaughan, N.L. Scott, D.R. White, „The theory of bandpass sampling”, IEEE Trans. Signal processing, vol. 39, no. 9, pp. 1973-1984, 1991.
7. M. Parfieniuk, A.Petrovsky, „Simple rule of selection of subsampling ratios for warped filter banks”, in Proc. VIII Int. conf. "Modern communication systems", Naroch, Belarus, 2003, pp. 130-134, Special Issue of Trans. Belarussian Engineer Academy, no. 1(15)/3.

8. Z. Doganata, P.P. Vaidyanathan, T.Q. Nguyen, "General synthesis procedures for FIR lossless transfer matrices for perfect-reconstruction multirate filter bank applications", IEEE Trans. On Acoustics, speech and signal processing, vol. 36, n0. 10, pp. 1561-1574, 1988.
9. L. Gan, K. -K. Ma, "A simplified lattice factorization for linear-phase perfect reconstruction filter bank", IEEE Signal processing letters, vol. 8, n0. 7, pp. 207-209, 2001.
10. T.Q. Nguyen, P.P. Vaidyanathan, "Maximally decimated perfect-reconstruction FIR filter banks with pairwise mirror-image analysis (and synthesis) frequency responses", IEEE Trans. On Acoustics, speech and signal processing, vol. 36, no. 5, pp. 693-706, 1988.
11. S. Orantara, T.D. Tran, P.N. Heller, T.Q. Nguyen, "Lattice structure for regular paraunitary linear-phase filterbanks and M-band orthogonal symmetric wavelets", IEEE Trans. On Signal processing, vol. 49, no. 11, pp. 2659-2672, 2001.
12. P.P.Vaidyanathan, "On coefficient-quantization and computational roundoff effects in lossless multirate filter banks", IEEE Trans. On Signal processing, vol. 39, no. 4, pp. 1006-1008, 1991.
13. W.R. Hamilton, "On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra", The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, vol. 25, pp.489-495, 1844.
14. I.L. Kantor, A.S.Solodovnikov, Hypercomplex numbers: an elementary introduction to algebra, Springer, New York, NY, USA, 1989.
15. A. Baker, Matrix groups: an introduction to Lie group theory, Springer, London, UK, 2002.
16. H.G. Baker, "Quaternions and orthogonal 4x4 real matrices", Tech. Rep., June 1996, <http://www.gamedev.net/reference/articles/article428.asp>.
17. M. Parfieniuk, A. Petrovsky, "Hypercomplex factorizations for 8-channel linear phase paraunitary filter banks", in Proc. 7th Int. Conf. and exhibition "Digital signal processing and its applications" (DSPA), vol. 2, Moscow, Russia, 2005, pp. 509-513.
18. M. Parfieniuk, A. Petrovsky, "Quaternionic approach to 8-channel general paraunitary filter banks", in Proc. 13th European Signal processing conference (EUSIPCO), Antalya, Turkey, 2005, CD.
19. T.D.Howell, J.C. Lafon, "The complexity of the quaternion product", Tech. Rep. TR 75-245, Cornell University, Ithaca, NY, USA, June 1975, <http://citeseer.ist.psu.edu/howell75complexity.html>.
20. A. Verenik, M. Parfieniuk, A. Petrovsky, "An FPGA implementation of the distributed arithmetic based quaternionic multipliers for paraunitary filter banks", in Proc. of the MIXDES'2007, Cichocinek, Poland, 2001, pp. 605-610.