

ОБЗОР МЕТОДОВ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОГО КОДИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МНОГОПороГОВЫХ АЛГОРИТМОВ

Зубарев Ю.Б., Золотарёв В.В., Овечкин Г.В.

Введение

Быстрый рост объемов обработки данных, развитие цифровых систем вещания и вычислительных сетей предъявляют весьма высокие требования к минимизации ошибок в используемой дискретной информации. Переход всех видов создания, хранения, использования и передачи данных, а также средств вещания на цифровые методы, происходящий сейчас во всём мире, ещё более повышает важность высококачественной передачи цифровых потоков и особо надёжно-

Рассмотрены основные достижения теории помехоустойчивого кодирования и вытекающие из неё прикладные результаты, базирующиеся на важном классе простых мажоритарных итеративных методов исправления ошибок, получивших название многопороговых декодеров. Описаны как достижения последних десяти лет в области кодирования и последующего декодирования двоичных кодов, что наиболее применимо в различных высокоскоростных спутниковых каналах, так и принципиально новые возможности, которые появились у разработчиков после детального изучения характеристик недвоичных, так называемых символьных, декодеров этого же типа. Проводится краткое сопоставление характеристик многопороговых декодеров и других методов: декодера Витерби, декодера турбо и низкоплотностных кодов, а также некоторых методов исправления ошибок для кодов Рида-Соломона, которые оказываются намного сложнее мажоритарных алгоритмов.

го хранения сверхбольших объёмов данных. Успешная работа этих систем возможна только при наличии специальной эффективной аппаратуры, которая позволяет гарантировать достоверную передачу информации. Важнейший вклад в повышение достоверности обмена цифровыми данными вносит теория помехоустойчивого кодирования. На её основе разрабатываются всё новые методы защиты от ошибок, базирующиеся на использовании корректирующих кодов. Эффект от их применения может выражаться в том, что в системе связи они позволяют при прочих равных условиях многократно увеличивать скорость или дальность передачи, снижать размеры очень дорогих антенн или работать при существенно пониженном уровне полезного сигнала. Применение кодирования можно рассматривать и просто как способ многократного увеличения к.п.д. дорогих спутниковых и прочих цифровых каналов связи.

Ниже кратко охарактеризована сложившаяся к настоящему времени ситуация в технике декодирования. Ограничимся в анализе только системами передачи данных без обратной связи от приемника к передатчику, каналами с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ) и линейными кодами, которые существенно облегчают реализацию декодеров. Основное внимание уделим методу коррекции ошибок, называемому многопороговым декодированием (МПД). Основными причинами выбора для глубоких разносторонних исследований и анализа в этом обзоре именно многопороговых алгоритмов являются следующие:

- способность мажоритарных методов исправлять большое число ошибок за пределами гарантированной корректирующей способности;
- крайне незначительная сложность пороговых процедур декодирования;

- свойство разработанных МПД алгоритмов почти всегда достигать оптимальных решений при весьма высоких уровнях шума в канале связи;

- предельная легкость реализации МПД даже для очень длинных кодов, когда только и возможно достижение максимально допустимых значений эффективности кодирования.

Одной из наиболее важных особенностей разрабатываемых многопороговых алгоритмов, обеспечивающей их высокую эффективность, оказывается идеология проводимых исследований. В то время как все усилия представителей современной западной науки направлены на повышение эффективности новых алгоритмов исправления ошибок при гораздо меньшем их внимании к вопросам сложности реализации, например, выраженной в числе операций декодирования, то обязательным исходным требованием к новым алгоритмам многопорогового декодирования, о которых, в основном, и будет идти далее речь, в течение всех 35 лет их развития всегда являлось предельно малое число операций декодера как при программной, так и при аппаратной их реализации. Столь своеобразный подход к проблеме простого и эффективного декодирования на базе МПД дал поразительные результаты. Оказалось, что практически всегда упрощение уже разработанных ранее алгоритмов становится новой практически неразрешимой проблемой, решением которой иногда оказываются более простые модификации исходных алгоритмов. Однако во многих случаях такие упрощения довольно заметно снижают эффективность декодирования по сравнению с исходными методами.

В то же время принцип «от простого к более эффективному», которому всегда следовали разработчики алгоритмов класса МПД, продемонстрировал за многие годы их исследования большие возможности

создания и последующей незначительной модификации исходных методов, которая значительно повышала их эффективность при большом уровне шума. Это и позволило сохранить минимальную сложность всех методов декодирования на основе МПД, которая, как будет показано далее, довольно часто оказывается при равной корректирующей способности существенно меньшей, чем у конкурирующих методов, в сотни, а иногда и в тысячи раз.

Принцип многопорогового декодирования

Многопороговый декодер самоортогональных кодов [1 – 5] является развитием простейшего порогового декодера Мессе и позволяет декодировать очень длинные коды с линейной от длины кода сложностью реализации. В основе работы МПД лежит итеративное декодирование, что позволяет вплотную приблизиться к решению оптимального декодера в достаточно широком диапазоне кодовых скоростей и уровней шума в канале. При этом МПД сохраняет простоту и быстродействие обычного порогового декодера, что делает его очень привлекательным для применения в существующих и вновь создаваемых высокоскоростных системах связи.

Рассмотрим принцип работы МПД. Пусть задан двоичный линейный систематический блочный или сверточный самоортогональный код (СОК), который используется для передачи сообщения из k двоичных символов. После кодирования общее число кодовых символов равно n , $n > k$. Пример схемы кодера блочного СОК и его многопорогового декодера представлен на рис. 1 и рис. 2. Данный код характеризуется следующими параметрами: длина кода $n=26$, длина информационной части кода $k=13$, кодовая скорость $R=1/2$, кодовое расстояние $d=5$, порождающий полином $g(x)=1+x+x^4+x^6$.

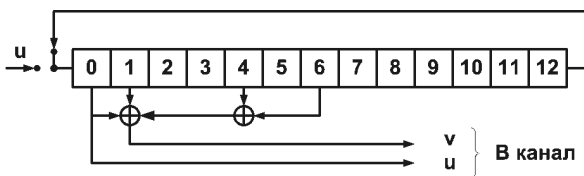


Рис. 1. Кодер блочного СОК с $R=1/2$, $d=5$ и $n=26$

Пусть необходимо передать информационный блок u . Устройство кодирования на основании информационного блока u формирует кодовое слово $c=(u,v)$. В результате передачи по двоичному симметричному каналу (ДСК) декодер получает вместо кодового слова c искаженное шумами сообщение $y=(u^*,v^*)$ длины n . Сначала, как и в обычном пороговом декодере, вычисляется синдром $s=yH^T$ (здесь H – проверочная матрица кода) принятого сообщения, и для каждого информационного символа u_j , $1 \leq j \leq k$, выделяется множество $\{s_{j_m}\}$ элементов синдрома с номерами $\{j_m\}$, называемых проверками относительно символа u_j и содержащих в качестве слагаемого ошибку e_j в этом символе.

Дополнительно вводится двоичный регистр d длины k , называемый разностным, первоначально заполненный нулями. Это – единственное отличие классического порогового алгоритма и МПД декодера. В регистре d будут отмечаться измененные информационные симво-

лы для того, чтобы декодер «помнил» принятое из канала сообщение и всегда мог вычислить разность между этим сообщением и кодовым словом, находящимся в информационном регистре.

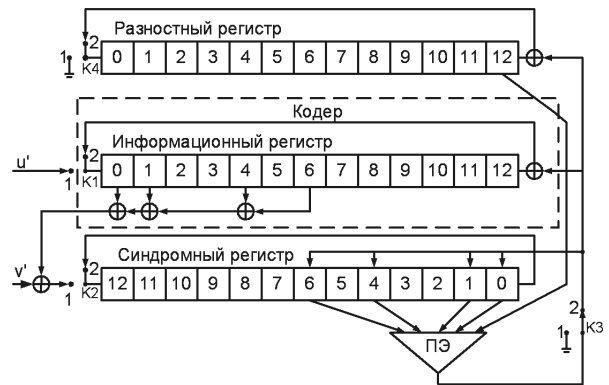


Рис. 2. Многопороговый декодер блочного СОК с $R=1/2$, $d=5$ и $n=26$

Основной шаг декодирования заключается в том, что для произвольно взятого символа u_j вычисляется функция правдоподобия L_j , зависящая от относящихся к нему проверок $\{s_{j_m}\}$ и j -го элемента регистра d :

$$L_j = \sum_{j_m} s_{j_m} + d_j \tag{1}$$

где $J=d-1$ – количество проверок (ненулевых элементов порождающего полинома $g(x)$); d_j – символ разностного регистра, относящийся к декодируемому символу u_j (равный 0 или 1); s_p – p -й элемент синдромного регистра, входящий в множество проверок относительно декодируемого символа u_j .

Общее число слагаемых в (1) равно минимальному кодовому расстоянию d . Если $L_j > T$, где $T=(d-1)/2$ – пороговое значение, то символ u_j , все проверки $\{s_{j_m}\}$ и символ d_j инвертируются, после чего выбирается другой символ u_m , $m \neq j$, для него снова вычисляется сумма L_m и т.д. Если же $L_j \leq T$, то сразу осуществляется переход к декодированию следующего символа u_m .

При выполнении основного шага декодирования все k информационных символов сообщения могут перебираться многократно и в любом порядке. При этом часть решений декодера на каких-то символах может быть ошибочной. Некоторые из этих ошибок будут исправлены при следующих попытках декодирования тех же символов (т.е. на следующих итерациях).

Основным свойством МПД является строгая сходимость его решения к решению оптимального (по максимуму правдоподобия) декодера (ОД), поскольку при каждом i -м изменении декодируемых символов суммарный вес синдрома s и разностного вектора d обязательно уменьшается, т.е. происходит переход к кодовому слову $c^{(i)}$, которое более правдоподобно, чем кодовое слово $c^{(i-1)}$, находившееся в МПД в предыдущий момент времени. Переходя от одного слова $c^{(i)}$ к другому, МПД может получить наиболее правдоподобное слово $c^{(ОД)}$, которое, собственно, и является решением оптимального декодера. Однако нельзя утверждать, что МПД обязательно достигнет решения оптимального декодера, так как во многих кодах, допускающих мажоритарное

декодирование, МПД на некоторых конфигурациях ошибок веса несколько большего, чем $d/2$, прекратит изменять информационные символы раньше, чем достигнет решения оптимального декодера.

Одной из основных причин этого является значительная подверженность пороговых декодеров, являющихся составной частью МПД, эффекту размножения ошибок [1, 4]. В результате вторая и последующие итерации декодирования вынуждены работать в основном с потоками пакетов ошибок от декодеров предыдущих итераций, что существенно уменьшает эффективность всего декодера. Следовательно, основным способом приближения решения МПД к решению оптимального декодера является уменьшение эффекта размножения ошибок.

Для уменьшения размножения ошибок необходим тщательный выбор кодов, характеризующихся малой степенью пересечения множеств ошибок, входящих в проверки относительно разных информационных символов, а также настройка параметров декодера (например, величины порогов на разных итерациях). Методика оценки качества кодов в соответствии с указанным выше критерием подробно изложена в [1, 4].

Отметим, что МПД, как и обычный пороговый декодер, легко модифицируется для суммирования проверок в (1) с некоторыми коэффициентами, в частности, при работе с квантованными на несколько уровней решениями мягкого модема, дополнительные выходные биты которого определяют надежность выносимого им решения. Использование мягких решений демодулятора позволяет достигать результатов на 1,4...1,7 дБ лучших, чем при использовании только жестких решений демодулятора. При этом выражение (1) для вычисления функции правдоподобия L_j принимает вид

$$L_j = \sum_{\{j_m\}} s_{j_m} w_{j_m} + d_j w_j, \quad (2)$$

где $\{w_{j_m}\}$ – коэффициенты, отражающие надежность проверок $\{s_{j_m}\}$; w_j – коэффициент, отражающий надежность принятого символа u_j .

Зависимость вероятности битовой ошибки $P_b(e)$ от отношения сигнал/шум E_b/N_0 в канале с АБГШ при использовании мягкого модема для многопорогового декодера самоортогональных кодов с кодовой скоростью $R=1/2$ и различным кодовым расстоянием d представлена на рис. 3. Пунктиром на рисунке показана вероятность ошибки декодирования тех же кодов с помощью оптимального декодера. Из представленных графиков видно, что МПД действительно обеспечивает близкое к оптимальному декодирование правильно выбранных кодов при достаточно высоком уровне шума в канале связи.

Сложность реализации многопороговых декодеров

Как уже отмечалось, сложность мажоритарных алгоритмов может быть формально оценена как линейно растущая с увеличением длины декодируемого кодового блока и кодового ограничения свёрточного кода.

Сложность программной реализации, как число операций на бит, в двоичном МПД свёрточного или блочного СОК равна $N_{МПД} \approx (I+1)(d+2)$ или $N_{МПД} \approx 4d+3I$ при пренебрежимо малых потерях в энергетике (менее 0,1 дБ) [5]. Здесь d – минимальное кодовое расстояние применяемого кода, I – число итераций декодирования.

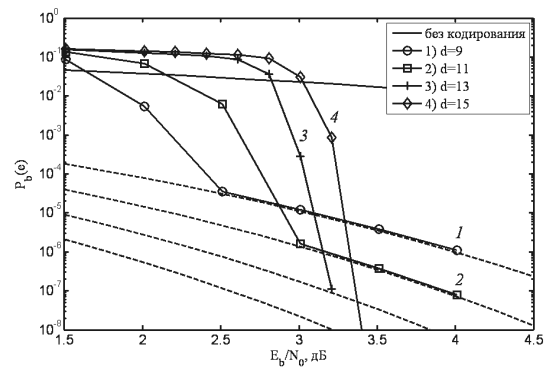


Рис. 3. Характеристики МПД для СОК с $R=1/2$ в канале с АБГШ

То, что при декодировании фактически каждая итерация в МПД требует всего нескольких простейших операций типа сложение и сравнение, приводит к тому, что рост числа итераций почти не снижает реального быстродействия декодера, например, в программном варианте реализации. В качестве хорошей иллюстрации этого свойства алгоритма можно сослаться на демопрограмму МПД для свёрточного кода с $R=3/4$. Она используется в системе специального цифрового телевидения и обеспечивает на обычном ПК производительность порядка 4...10 Мбит/с, чего с огромным запасом хватает для обработки телевизионного цветного сигнала при весьма низком отношении сигнал/шум. Применяемые в ней коды проходят процедуру стандартизации. Демопрограмма и простая инструкция по её использованию может быть переписана с большого тематического веб-сайта ИКИ РАН www.mtdbest.iki.rssi.ru, где она размещена на учебной страничке. Действительно, сравнение МПД с другими методами показало, что скорость обработки на основе МПД оказывается примерно на 2 порядка более высокой, чем, например, у турбо декодеров с сопоставимыми параметрами энергетической эффективности

В случае аппаратной реализации МПД, например, на ПЛИС Xilinx или Altera, проведённые испытания подтвердили хорошие параметры их эффективности при одновременно очень высокой производительности, вплоть до 1,6 Гбит/с. Такая возможность появилась после реализации запатентованных технических решений для аппаратного МПД. Согласно этим решениям такой декодер превращается в одноктактную решающую схему, причём на каждом такте работы он может принимать до 40 решений о декодируемых символах, а предельная частота тактов определяется максимально возможной скоростью сдвига принятых из канала данных по регистрам сдвига декодера, из которых он в основном и состоит. Типичная скорость продвижения информации по регистрам сдвига указанных ПЛИС находится в пределах от 100 до 250 Мбит/с, а число параллельно работающих регистров такого вида в МПД может превышать сотню. Это значит, что производительность МПД в аппаратном варианте реализации формально может существенно превышать даже 10 Гбит/с. По существу это снимает все ограничения по скорости обработки на такие устройства, что при обеспечиваемых этими алгоритмами

энергетических параметрах эффективности делает их единоличными лидерами среди всех методов высокоскоростной передачи цифровых потоков по дорогим спутниковым и прочим каналам. В частности, особенно полезны уже разработанные аппаратные версии МПД для систем дистанционного зондирования Земли, поскольку как раз их высокоскоростные потоки цифровых данных при ограниченной мощности передатчиков следует всемерно защищать методами помехоустойчивого кодирования.

Применение многопороговых декодеров в схемах с параллельным кодированием

Для приближения границы эффективной работы МПД к пропускной способности канала возможно его применение в схемах параллельного кодирования [4, 5]. В основе построения данных схем лежит выделение в СОК C_0 с кодовым расстоянием d_0 и кодовой скоростью R_0 некоторого составляющего кода C_1 с кодовой скоростью $R_1 > R_0$, тоже являющегося СОК. Кодовое расстояние d_1 выделенного кода выбирается значительно меньшим d_0 , и, как следует из рис. 3, область его эффективной работы будет ближе к границе Шеннона. При декодировании параллельного кода сначала выполняются несколько итераций декодирования составляющего кода C_1 , позволяющие примерно на порядок снизить вероятность ошибки в принятой из канала информационной последовательности, после чего в процесс декодирования включается оставшаяся часть кода C_0 . Отличительной особенностью данной схемы кодирования является то, что здесь внешний код работает с кодовой скоростью R_0 , в то время как в обычных каскадных кодах кодовая скорость внешнего кода близка к единице. Данное свойство обеспечивает существенное преимущество МПД перед другими каскадными конструкциями.

Для примера на рис. 4 представлены результаты моделирования схем с параллельным кодированием в канале с АБГШ для СОК с $R_0=6/12$, $d_0=13$ и $R_0=5/10$, $d_0=15$ (кривые «Параллельный»). В параллельном коде с $d_0=13$ в данном случае был выделен внешний код с $R_1=6/11$, $d_1=7$, а в коде с $d_0=15$ был выделен код с $R_1=5/9$, $d_1=9$. Кривые «Составляющий» на рисунках отражают вероятность ошибки на выходе выделенных кодов параллельной схемы. Пунктирными линиями без маркеров показаны вероятности ошибки оптимального декодирования кодов с $d=7$, 9, 13 и 15. Для сравнения на рис. 4 также представлены характеристики декодируемых с помощью МПД обычных СОК с аналогичными d и R (кривые «Обычный»). Отметим, что при получении данных характеристик использовались достаточно короткие коды, длиной до нескольких тысяч битов, и 10...20 итераций декодирования. При некотором увеличении объема памяти декодера и числа выполняемых итераций с помощью параллельного каскадирования уже удалось получить характеристики, представленные на рис. 4 кривой «Длинный». Как следует из анализа представленных графиков, применение параллельного кодирования позволяет МПД работать чуть больше чем в 1,5 дБ от пропускной способности канала.

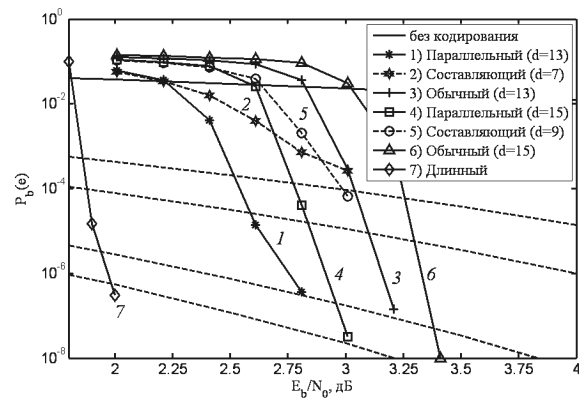


Рис. 4. Результаты моделирования параллельного кода на базе МПД в канале с АБГШ

Сложность МПД при параллельном кодировании (в смысле количества выполняемых операций) оказывается даже меньше сложности обычного МПД, поскольку в данном случае на первых итерациях декодирования некоторые элементы синдромного регистра просто не участвуют в процессе вычисления суммы на пороговом элементе.

Каскадные коды, декодируемые с использованием многопороговых декодеров

Высокие характеристики МПД способствуют его широкому применению в составе различных кодовых конструкций, поскольку эффективность последних непосредственно связана с эффективностью их составных элементов.

Особое место среди кодовых схем на базе МПД занимает его каскадирование с кодами контроля четности (ККЧ), использование которых позволяет существенно повысить эффективность применения кодирования. Особенность данной схемы заключается в том, что такое каскадирование практически не требует дополнительных затрат на оборудование (например, в схему кодирования требуется добавить лишь один сумматор по модулю 2), тогда как использование в каскадном коде, например, кодов Рида-Соломона несравненно труднее. Подробно принципы каскадирования МПД с ККЧ рассмотрены в [4, 5].

Эффективность работы каскадных схем, состоящих из СОК с $d=7$ и 9 и ККЧ с длиной 50, для канала с АБГШ отражена на рис. 5. Как видно из рисунков, каскадный код на основе МПД оказывается значительно лучше некаскадного. При этом использование простейшего ККЧ совместно с СОК позволяет получить дополнительный энергетический выигрыш около 1...1,5 дБ при вероятности ошибки на выходе декодера $P_b(e)=10^{-5}$. Также отметим, что каскадный код, состоящий из кода Рида-Соломона (255, 223, 33) и сверточного кода с кодовой скоростью 1/2 и длиной кодового ограничения $K=7$, декодируемый с помощью оптимального алгоритма Витерби, даже при меньшей общей кодовой скорости ($R=0,437$) уступает каскадной схеме на базе МПД при $P_b(e) > 10^{-6}$. Заметим, что при использовании каскадирования с ККЧ совместно с ранее рассмотренным параллельным кодированием, возможно получение значительного дополнительного энергетического выигрыша. Пример характеристик од-

ной из таких схем показан на рис. 5 кривой «МПДп+ККЧ». Использование малоизбыточного кода во внешнем каскаде данной схемы позволит получить сколь угодно малую вероятность ошибки при потерях в энергетике около 0,1...0,2 дБ.

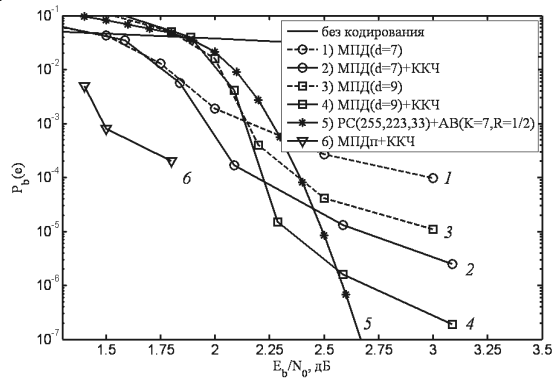


Рис. 5. Результаты моделирования каскадного кода на базе МПД в канале с АБГШ

Сложность декодирования рассмотренной каскадной схемы по сравнению со сложностью обычного МПД увеличивается на сложность реализации декодера ККЧ, примерно равную всего двум операциям на информационный бит.

Многopороговые алгоритмы в каналах с неравномерной энергетикой

Рассмотрим типичный пример очень простой модификации алгоритма МПД, которая с учётом конкретных свойств метода очень точно использует его свойства и фактически вообще без усложнения самого метода решающим образом улучшает его характеристики энергетической эффективности в полном соответствии с принципом «от простого к эффективному». Происходит просто согласование системы сигналов со свойствами кода и декодера.

Рассмотрим двухканальную схему передачи цифровых данных по спутниковым, космическим или иным каналам связи с достаточно большим уровнем гауссовского шума. Выберем для некоторого отношения сигнал/шум, первоначально одинакового для каждого из двух рассматриваемых каналов связи, такое перераспределение общей суммарной энергии, чтобы было обеспечено максимально возможное независимое последующее декодирование принятых информационных символов на основе многопорогового декодирования двоичных блоковых или свёрточных кодов. Иначе говоря, критерием наилучшего перераспределения энергии между каналами следует выбрать минимальный уровень проявления эффекта размножения ошибок при мажоритарном декодировании. В теории МПД эти вопросы достаточно полно проработаны [1, 4]. Снижение данного эффекта позволяет значительно улучшить сходимость решений МПД к оптимальным, что и создаёт условия для более эффективной работы алгоритмов МПД при больших уровнях шума.

При формировании такой достаточно простой новой сигнально-кодовой конструкции можно рассматривать различные способы балансировки энергетике. Например, каналы могут быть организованы так, что по одному из них передаются информационные символы кода, а по другому – проверочные. В этом случае анализ размножения ошибок упрощается в наибольшей степени, что позво-

ляет достаточно быстро и полно рассматривать применимость максимального числа кодов и соответствующих им МПД алгоритмов в подобных схемах кодирования. Такие модели получили название каналов с неравномерной энергетикой (НЭК) [4, 11]. Они могут быть просто реализованы в обычных трактах передачи цифровых данных.

Как показал детальный анализ ряда кодов и некоторых модификаций МПД алгоритмов для НЭК каналов с различными параметрами, перемещение границы области эффективной работы МПД в сторону более высокого уровня шума канала в диапазоне кодовых скоростей R от $1/4$ до $3/4$ может составлять до 1 дБ, что очень важно, поскольку уже исходная эффективность МПД в каналах обычного типа также оказывается весьма высокой. При этом отношение энергетики каналов должно находиться в диапазоне от 1,3 до 3,2.

Необходимость работы при более высоких уровнях шума требует увеличения числа итераций декодирования в МПД, но такое увеличение обычно оказывается не более чем двукратное, что сохраняет небольшую сложность реализации МПД как в программном, так и в аппаратном вариантах.

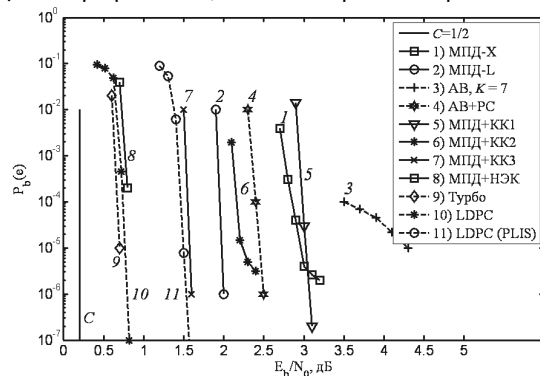


Рис. 6. Характеристики МПД, декодера Витерби, турбо и низкоплотностных кодов в гауссовском канале при $R=1/2$

Новые полученные результаты в этой области иллюстрируются графиками на рис. 6, на которых представлены возможности предложенных алгоритмов и уже известных методов. График «1) МПД-X» соответствует эффективности МПД декодера на ПЛИС Xilinx, кривые «5) МПД+КК1», «6) МПД+КК2» и «7) МПД+КК3» даны для применения МПД в простейших каскадных схемах с кодом контроля четности. Все они детально обсуждались в [9]. На рис. 6 также представлены кривые эффективности для алгоритма Витерби со стандартным кодом длины $K=7$ (кривая «3) АВ, $K=7$ ») и для каскадной схемы декодера Витерби с кодом Рида-Соломона (кривая «4) АВ+РС»), а также для турбо кода (кривая «9) Турбо») [12] и низкоплотностного кода, рекомендованного в стандарте DVB-S2 [13] (кривая «10) LDPC»). Отметим, что при реализации высокоскоростного декодера низкоплотностных кодов на ПЛИС потери в эффективности составляют более 0,5 дБ (кривая «11) LDPC (PLIS)»). Вертикаль $C=1/2$ определяет пропускную способность гауссовского канала, к которой стремятся разработчики при улучшении характеристик декодирования при кодовой скорости $R=1/2$. «МПД-L» – длинный код и МПД декодер с $L=40$ итерациями, реализованный в ИКИ РАН на ПЛИС Altera. Новый результат для МПД и канала НЭК – пункт «8) МПД+НЭК» – соответствует возможности декодирования кода при задержке принятия решения не бо-

лее 400000 битов, при котором сохраняется хорошо известная достаточно большая скорость работы МПД как в программном, так и особенно в аппаратном варианте.

С учетом уже достигнутой близости области эффективной работы МПД к пропускной способности канала связи, можно считать, что МПД имеет хорошие перспективы по дальнейшему приближению его характеристик к границе Шеннона. При этом значительное преимущество МПД перед другими алгоритмами по числу операций, составляющее один-два десятичных порядка для различных сочетаний параметров кодирования, дает основание полагать, что МПД можно активно использовать при разработках современной аппаратуры передачи цифровых данных для космических и спутниковых каналов связи.

Применение многопороговых декодеров с многопозиционными системами сигналов

В предыдущих разделах представлены результаты исследования МПД в гауссовских каналах передачи данных с двоичной фазовой модуляцией (ФМ2). Вместе с тем на каналы передачи данных часто накладываются значительные ограничения по занимаемой полосе частот и с каждым годом эти ограничения становятся все жестче. Одним из способов уменьшения занимаемой полосы частот является использование многопозиционных сигналов, для формирования которых обычно применяется многопозиционная фазовая (ФММ) или квадратурная амплитудная модуляция (КАММ). При переходе к таким сигналам все подходы к применению МПД остаются аналогичными двумерному случаю, что позволяет одновременно получить значительный энергетический выигрыш кодирования и существенно сэкономить полосу частот передаваемого сигнала.

Рассмотрим результаты моделирования МПД и других методов коррекции ошибок в канале с многопозиционными системами сигналов при использовании мягких решений демодулятора, когда демодулятор оценивает надежность выносимых им решений.

На рис. 7 кривыми «МПД, КАМ16», «МПД, КАМ32» и «МПД, КАМ64» представлены экспериментальные графики зависимости вероятности ошибки на бит $P_b(e)$ на выходе МПД от отношения сигнал/шум E_b/N_0 в канале с АБГШ и квадратурной амплитудной модуляцией при использовании 16, 32 и 64 символьных созвездий. При декодировании выполнялось от 10 до 20 итераций декодирования блочного СОК с кодовой скоростью $R=1/2$, кодовым расстоянием $d=11$ и длиной n порядка 10000. При этом использовался ранее рассмотренный код с параллельным кодированием.

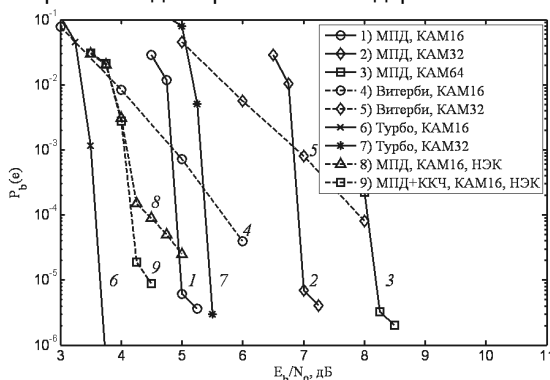


Рис. 7. Эффективность МПД в каналах с КАММ, мягкий модем

На этом же рисунке кривыми «АВ, КАМ16» и «АВ, КАМ32» представлены характеристики декодера Витерби для кода с длиной регистра $K=7$ при использовании КАМ16 и КАМ32 соответственно. Как видно, декодер Витерби в данных условиях при $P_b(e)=10^{-4}$ проигрывает МПД более 1 дБ. Кривыми «Турбо, КАМ16» и «Турбо, КАМ32» на рис. 7 показаны характеристики очень мощного турбо кода [5] с кодовой скоростью $R=1/2$, который образован путем параллельного каскадирования двух рекурсивных систематических сверточных кодов с конструктивной длиной $K=4$. В данном турбо коде применялся перемежитель типа S-random длиной $L=5000$ (общая длина турбо кода составляет $n=10000$). При декодировании турбо кода выполнялось 8 итераций, на каждой из которых для декодирования составляющих кодов применялся Max-Log-MAP алгоритм. Из сравнения характеристик декодера турбо кода и МПД видно, что эффективность последнего оказывается хуже примерно на 1,5 дБ, но МПД при этом почти на два порядка проще для практической реализации, чем данный турбо декодер.

На рис. 8 представлены характеристики МПД для того же блочного кода, что и на рис. 7, в канале с многопозиционной фазовой модуляцией (ФММ). Видно, что соотношения между характеристиками многопорогового декодера, декодера Витерби и декодера турбо кода сохраняются и при данном виде модуляции.

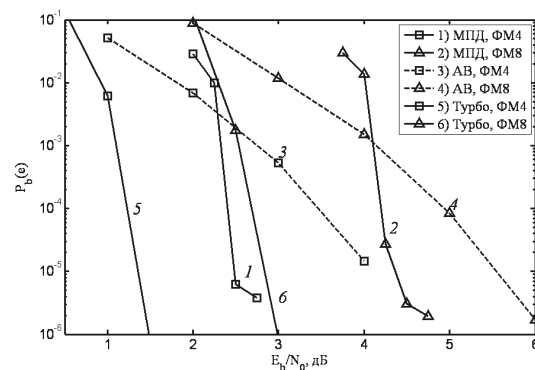


Рис. 8. Эффективность МПД в каналах с ФММ, мягкий модем

Рассмотрим один из возможных способов приближения области эффективной работы МПД к пропускной способности канала в каналах с многопозиционной модуляцией. Известно, что в таких каналах отдельные биты сигнального созвездия защищены по-разному. Например, для системы КАМ16 при использовании кода Грэя первый и третий биты могут быть защищены больше, а второй и четвертый – меньше. При этом вероятность ошибки в первом и третьем битах оказывается в два раза меньше вероятности ошибки во втором и четвертом битах. Похожая ситуация наблюдается и при использовании других типов модуляции. Таким образом, канал с многопозиционными системами сигналов можно рассматривать в качестве канала с неравномерной энергетикой. В результате для приближения области эффективной работы МПД к пропускной способности канала можно информационные символы сообщения располагать в более надежных битах созвездия, а проверочные – в менее надежных.

На рис. 7 кривой «МПД, КАМ16, НЭК» показаны характеристики МПД блокового СОК с кодовой скоростью $R=1/2$, кодовым расстоянием $d=11$ и длиной n порядка 10000 в канале с АБГШ при использовании КАМ16 и демодулятора, формирующего мягкие решения, при расположении информационных битов в более надежных позициях символа, а проверочных – в менее надежных. Заметим, что область эффективной работы МПД приблизилась к пропускной способности канала примерно на 0,5 дБ, но при этом область насыщения вероятности ошибки оказалась несколько выше. Вместе с тем для уменьшения вероятности ошибки в области эффективной работы, как показано в [26], возможно использование совместно с МПД простейшего кода с контролем четности (ККЧ). Характеристики каскадной схемы, состоящей из МПД и ККЧ длины 50, в случае расположения информационных битов в более надежных позициях символа для тех же условий показаны на рис. 7 кривой «МПД+ККЧ, КАМ16, НЭК». Из рисунка видно, что применение предложенного подхода позволило приблизить эффективность МПД к пропускной способности канала примерно на 0,7 дБ. В результате преимущество гораздо более сложного ранее рассмотренного декодера турбо кода (кривая «Турбо, КАМ16») перед МПД при вероятности ошибки порядка 10^{-4} оказалось даже меньшим, чем 0,5 дБ. Заметим, что похожего результата можно добиться и при использовании других многопозиционных систем сигналов.

Недвоичные многопороговые декодеры

Во многих случаях в реальных системах удобно работать с данными, имеющими байтовую структуру. Отметим, что кроме кодов Рида-Соломона (РС) в настоящее время вообще нет других сколько-нибудь эффективных и одновременно довольно простых методов декодирования недвоичных символьных данных, если выбранный код достаточно короткий.

В данном разделе рассмотрим обобщение МПД для q -ичных симметричных каналов (q СК). По аналогии с соответствующими декодерами для двоичных данных эти алгоритмы названы q -ичными многопороговыми декодерами (q МПД) [4, 5, 18]. Они также обладают свойством сходимости к решению ОД при сохранении линейной от длины кода сложности реализации, которая свойственна только пороговым процедурам. Ценность q МПД заключается в том, что в случае больших значений основания кода q , $q > 10$, практически невозможно создать эффективные ОД, поскольку их сложность в большинстве случаев будет пропорциональна q^k , где k – длина информационной части кода, выраженная числом q -ичных символов.

Изложим основные принципы работы q МПД. Пусть задан q СК ($q > 2$) с вероятностью ошибки $P_0 > 0$ такой, что при передаче любой исходный символ кода переходит в один из оставшихся $q-1$ символов случайно, независимо и равновероятно. Для этого канала решением ОД будет такое, может быть единственное, кодовое слово из q^k возможных, которое отличается от принятого из канала сообщения в минимальном числе кодовых символов.

Рассмотрим линейный недвоичный код, проверочная матрица которого имеет такой же вид, как и в двоичном

случае, т.е. состоит только из нулей и единиц, за исключением того, что вместо 1 в единичной подматрице будут -1 . Пусть эта матрица соответствует блоковому СОК. Поскольку проверочная (а значит, и порождающая) матрица кода содержит только нули и единицы, то для выполнения операций кодирования и декодирования принятого сообщения достаточно использовать операции сложения и вычитания по модулю q . Таким образом, для кодирования и декодирования не требуется наличие недвоичного поля, а достаточно создать только группу чисел, что существенно упрощает все процедуры кодирования и декодирования. Пусть декодер типа q МПД (рис. 9) устроен так, что после вычисления обычным образом вектора синдрома s принятого сообщения начинается процедура декодирования, заключающаяся в том, что для очередного контролируемого недвоичным пороговым элементом информационного символа кода u_j происходит подсчет количества и определение значений двух относящихся к нему и наиболее часто встречающихся проверок кода, например, b_1 и b_2 , причем b_1 встречается m_1 раз, $b_2 - m_2$ раз ($m_1 > m_2$), а остальные значения проверок для декодируемого символа u_j встречаются не более m_2 раз. Тогда на выходе q -ичного порогового элемента (q ПЭ) будет значение b_1 и q МПД при каждом изменении символа u_j будет переходить к все более правдоподобным решениям, так как при этом число различий между кодовым словом, соответствующим текущему содержимому информационного регистра, и принятой из канала последовательностью будет уменьшаться. Если окажется, что два наиболее часто встречающихся значения проверок таковы, что $m_1 = m_2$, то выход q ПЭ устанавливается равным нулю, т.е. символ u_j не изменяется, и делается попытка декодирования любого другого информационного символа кода. Наиболее существенным обстоятельством, повышающим корректирующие возможности описанного q МПД, является возможность принимать безошибочные решения при больших значениях q всего при двух правильных проверках относительно u_j из $d-1$ возможных, что происходит в том случае, когда все неправильные проверки относительно декодируемого символа u_j имеют различные значения.



Рис. 9. q МПД блокового СОК с $R=1/2$, $d=5$ и $n=26$. Верхние входы ячеек 0, 1, 4 и 6 регистра синдрома вычитаются по модулю q из содержимого соответствующих ячеек

Далее рассмотрены результаты моделирования работы q МПД в недвоичном симметричном канале q СК, характеристики каскадирования кодов для q МПД с кодами контроля

по mod q , а также возможности обычных декодеров кодов РС. Отметим, что в отличие от кодов Рида-Соломона для q МПД никаких ограничений по длине кода вообще нет, поскольку длина кода и величина его основания в недвоичных кодах с мажоритарным декодированием совершенно не зависят друг от друга. Объем моделирования в нижних точках графиков для q МПД составлял от $5 \cdot 10^{10}$ до $2 \cdot 10^{12}$ битов, что свидетельствует о крайней простоте метода.

На рис. 10 представлены зависимости вероятности ошибки на символ $P_s(e)$ от вероятности символьной ошибки P_0 в q СК для кодов Рида-Соломона, которые обозначены как RSn , где n – длина кода, выраженная в числе символов. Отметим, что реально сейчас используются только коды РС длины 255 или менее. Коды длины 4095 символов и, тем более, длины $n=65535$ (каждый символ – размером 16 битов), в обозримом будущем реализации не подлежат.

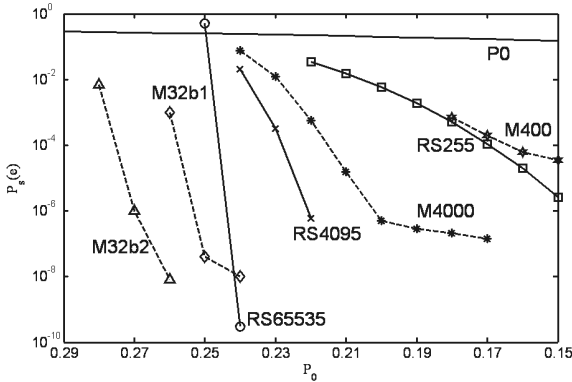


Рис. 10. Характеристики недвоичных блочных МПД и кодов РС с $R=1/2$

Здесь же пунктирными линиями показаны возможности кодов с мажоритарным декодированием при $R=1/2$ для случая $q=256$ (символ – один байт) для разных длин кодов, поскольку при любом $q>2$, как и в двоичном случае, для q МПД можно строить сколь угодно длинные коды с различными значениями кодового расстояния d и кодовой скорости R . Эти коды отмечены как M400 и M4000 с числами, обозначающими длины кодов, выраженные числом символов. Далее, обозначение M32b1 соответствует q МПД для кода длины 32000 символов. Как видно из рис. 10, возможности q МПД во всех случаях сопоставимы или лучше, чем у весьма сложных декодеров кодов РС. Более того, очень простой для реализации последний декодер для кода длины 32000 оказывается способным обеспечить простейшими мажоритарными методами помехоустойчивость, принципиально недостижимую даже для кода РС длины 65535 двухбайтовых символов, декодер для которого не будет создан никогда. А если перейти к двухбайтовым недвоичным кодам с мажоритарным декодированием, то его характеристики для длины кода 32000 символов будут соответствовать графику M32b2, ещё более показательному по уровню помехоустойчивости в области, где коды РС уже не работают. При этом q МПД для двухбайтовых символов практически ни в чём не сложнее однобайтового, так как даже обычные микропроцессоры одинаково просто и быстро работают и с однобайтовыми символами, и с 2-х и даже иногда с 8-байтовыми словами.

На рис. 11 показаны возможности q МПД и кодов РС в q СК при кодовой скорости $R=7/8$. Сплошными линиями с указанием длин блоков представлены вероятности ошибки на символ для кодов РС. Пунктирными линиями представ-

лены коды с q МПД декодированием и длиной 48000 символов: b1 – байтовых (символ – 8 битов) и b2 – двухбайтовых (символ – 16 битов). Подчеркнём, что возможность создания кодов РС длины 4095 при $R=7/8$ в ближайшее время останется очень проблематичной, в то время как даже для кодов длины 48000 байтов рассматриваемые недвоичные мажоритарные декодеры остаются очень простыми.

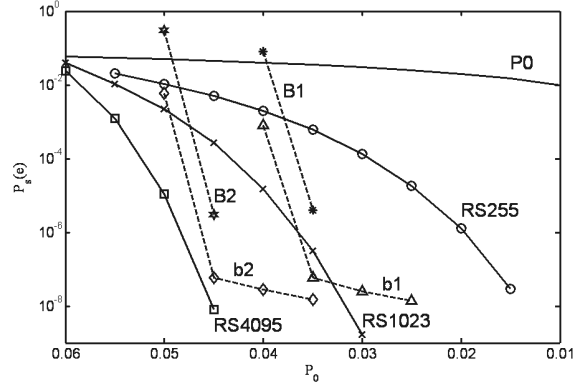


Рис. 11. Характеристики кодов РС и q МПД с $R=7/8$

На рис. 12 для кодов с малой избыточностью при $R=0,95$ представлены аналогичные характеристики для q МПД и кодов РС. Для сопоставления на рис. 12 приведён также график для кода РС с $n=255$ и $R=7/8$ с рис. 11. Пунктирами b1 и b2 указаны возможности двух q МПД для кодов длины $n \sim 80000$ и символов размером 1 и 2 байта.

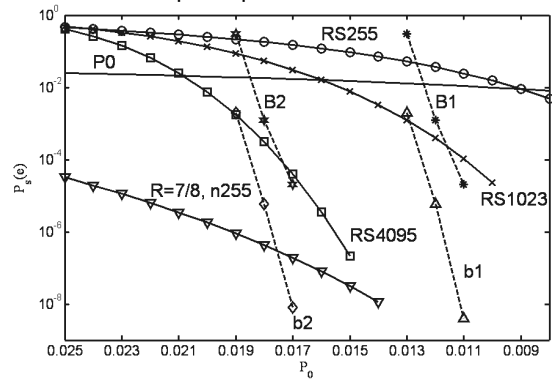
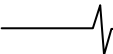


Рис. 12. Характеристики q МПД и кодов РС при $R=19/20$

Из сопоставления кодов РС длины $n=255$ при $R=7/8$ и $R=19/20$ видно, насколько последний менее эффективен первого и насколько труднее обеспечивать хорошую эффективность при уменьшении избыточности. Тем не менее характеристики малоизбыточных кодов с мажоритарным декодированием на основе q МПД оказываются весьма высокими и могут существенно поднять уровень помехоустойчивости, если выбранные коды имеют достаточно большие длины. Более того, q МПД при $R=0,95$, как следует из рис. 12, эффективнее кода РС с $R=7/8$, у которого избыточность в 2,25 раз больше. Этим снимаются все вопросы о применении любых новых самых сложных методов декодирования для кодов РС: они малоэффективны по сравнению с q МПД. В частности, например, алгоритмы Судана и прочие серьёзные усложнения декодеров для кодов РС приводят к росту их асимптотической от длины кода сложности с уровня n^2 до величины порядка n^3 . При этом в самом лучшем случае для этих алгоритмов вес ошибок канала, при котором возможно получение правильного решения, возрастает при использовании самого сложного алгоритма этого класса менее чем



на 4% для $R=7/8$ и менее чем на 1% для $R=0,95$, т.е. для тех значений скоростей, которые представлены на графиках. Стоит повторить, что рис. 12 показывает превосходство q МПД с $R=0,95$ перед кодом РС длины 255 даже с $R=7/8$, т.е. при его гарантированной корректирующей способности на 125% большей, чем при $R=0,95$. Поэтому рост корректирующей способности алгоритма Судана на 4% и 1% ничего не даст даже для длинных кодов РС, сопоставимых по длине с кодами, выбранными для q МПД.

Полезно отметить, что везде для графиков b1 и b2 нижние экспериментальные точки соответствуют оптимальному (совпадающему с переборным) декодированию с одиночными ошибками при частоте их появления, близкой к оценкам, представленным в [4 – 6]. Другие экспериментальные данные для q МПД можно найти в [4 – 6, 17].

Характеристики каскадирования недвоичных многопороговых декодеров

Согласно общим принципам теории кодирования, переход к каскадным принципам кодирования ещё более улучшает характеристики q МПД. При этом сложность декодирования увеличится по сравнению с исходным алгоритмом очень незначительно.

Возможности каскадирования q МПД с использованием кодов контроля по mod q также представлены для высокоскоростных кодов на рис. 11 и рис. 12. Вероятности ошибки на блок для каскадных кодов с внутренним СОК кодом при $R=7/8$ и внешнего кода длиной $L=190$ представлены кривой В1 для кода с $q=256$ (символ – 1 байт) и кривой В2 для кода с $q=65536$ (символ – 2 байта) на рис. 11.

Для каскадного кода с внутренним кодом при $R=0,95$ и внешнего кода с $L=190$ вероятность ошибки на блок на рис. 12 даётся кривыми В1 для $q=256$ и В2 для $q=65536=2^{16}$. Во всех случаях на графиках В1 и В2 нижние точки соответствуют величине N_B^{-1} , где N_B – число декодированных блоков, поскольку в экспериментах не было ни одного случая неправильного декодирования каскадного кода в этих точках. Как и ожидалось, применение каскадирования на много порядков снижает вероятность ошибки на блок по сравнению с обычным q МПД почти без сколько-нибудь заметного роста избыточности каскадного кода. При этом увеличение объёма вычислений в каскадном коде составляет менее 20% по сравнению с исходным алгоритмом q МПД.

Дальнейшее значительное улучшение эффективности декодирования методами q МПД возможно при переходе к свёрточным кодам, методам последовательного и параллельного каскадного кодирования, применению кодов с выделенными ветвями и другим мерам, некоторая часть из которых описана в [3 – 5].

Сложность реализации недвоичных многопороговых декодеров

Рассмотрение недвоичного (символьного) q МПД показывает, что линейная сложность декодирования сохраняется. При программной реализации такого алгоритма подпрограмма работы его порогового элемента, которая и составляет практически весь декодер, занимает менее десятка коротких строк на языке С++ и обеспечивает обработку одновременно такого количества байтов принятого или хранимого сообщения, которое допускает архитектура используемого процессора. Это ещё более увеличивает высочайшую

производительность декодеров класса МПД. Демопрограмма для символьного q МПД также выложена для всеобщего использования на веб-сайте www.mtdbest.iki.rssi.ru. Она показывает, что при крайне малой избыточности ($R=0,95$) и вероятности ошибки на символ в недвоичном канале более 10^{-2} достигается практически оптимальное декодирование очень длинных кодов со скоростью более 10 Мбит/с, а иногда, на относительно быстрых ПК общего назначения, – до 30 Мбит/с. При этом демопрограмма выполняет полную имитацию работы всего тракта передачи данных: формирование информационного потока, кодирование его в выбранных форматах, внесение шума, значительного по уровню искажений, и затем работу обсуждаемого алгоритма декодирования. Так что реальная производительность программного q МПД декодера может считаться большей примерно в два – три раза или даже более. Демопрограмма классического декодера кода РС также представлена в обзорной странице веб-сайта www.mtdbest.iki.rssi.ru.

Сложность декодеров для длинных недвоичных кодов естественно сравнивать с вычислительными затратами декодеров кодов РС, которые растут как n^2 . Более простые декодеры для недвоичных кодов, кроме МПД, неизвестны. Разнообразные методы повышения эффективности кодов РС, в том числе все вариации алгоритма Судана, приводят к сложности порядка n^3 . Для кодов длины 30000 символов это приводит к разнице в порядке сложности около $n^2=30000^2\approx 10^9$, т.е. миллиард раз. Однако при этом, как оказывается, улучшение помехоустойчивости благодаря более сложному декодированию, например, при $R=7/8$ весьма незначительно. Это определяется тем, что улучшение соответствует как бы увеличению минимального кодового расстояния кодов РС примерно в 1,04 раза. Конечно, реально этого не происходит, но доля случаев, когда это не так, и декодер ошибается при меньшем весе ошибок, невелика. Для этого случая оценки показывают, что код РС длины 4095 символов при $R=7/8$ обеспечит вероятность ошибки на символ $\sim 10^{-6}$ (при вероятности ошибки канала около $p_0=0,050$), алгоритм Судана будет столь же эффективен при $p_0=0,052$, тогда как q МПД обеспечивает эту же вероятность ошибки на блок при $p_0=0,047$ для кода длины 10^5 символов. При использовании с символьным МПД каскадирования с ККЧ характеристики МПД будут ещё на несколько порядков лучше почти без роста сложности декодера. Таким образом, характеристики всех трёх методов близки, но даже обычный декодер РС будет на несколько порядков, видимо в 10^4 раз, более сложен по числу операций, чем q МПД. Алгоритм Судана, в случае его реализации для этого же кода РС, потребует ещё примерно на три порядка большего числа операций, чем обычный декодер РС, что вообще снимает с обсуждения вопросы его практического использования. Отметим, что для $R=1/2$ и $R=0,95$ приведённые графики показывают абсолютное преимущество недвоичных МПД перед кодами РС любой разумной длины. Об этом же свидетельствуют и демопрограммы разных методов декодирования недвоичных кодов, представленные на веб-сайте [3].

Выводы

Применение МПД в спутниковых и прочих дорогих каналах позволяет реализовать произвольно высокие скорости обработки и существенно повысить к.п.д. их использования. Крайне простое устройство МПД по сравнению с прочими

сопоставимыми с ним по эффективности методами делает их предпочтительными в быстрых широкополосных каналах при аппаратной реализации. В достаточно медленных каналах связи даже программные реализации МПД очень эффективны и требуют написания лишь нескольких десятков команд программного кода для порогового элемента. Простые методы согласования кода и сигналов ещё более повышают возможности МПД и делают их реализацию особенно простой. Совершенно незначительная разница в эффективности МПД по сравнению с некоторыми особенно сложными декодерами других типов, как показывает динамика улучшения характеристик МПД в последние годы, будет преодолена, видимо, в самое ближайшее время.

Кроме естественных областей применения простых высокоэффективных методов кодирования в сетях связи следует отметить хорошие возможности применения q МПД для кодирования информации на дисках и других носителях больших объёмов информации, в сверхбольших базах аудио- и видеоданных с намного более высоким уровнем достоверности, чем это было доступно до недавнего времени, а также при обновлении, восстановлении, переносе и использовании хранимых там данных. При этом легко обеспечить оперативный постоянный контроль за качеством хранимой информации, а также своевременную корректировку и перенос данных вследствие старения и возникающих дефектов носителя. Все виды динамического контроля уровня достоверности, управления памятью и её резервированием самым очевидным образом реализуются на основе того, что q МПД алгоритмы непрерывно проводят различные простые, но очень информативные и удобные мажоритарные оценки надёжности записанных данных. Этим и определяются все дополнительные преимущества многопороговых алгоритмов в их приложениях по обеспечению принципиально нового, на много десятичных порядков более высокого уровня целостности и достоверности хранения информации в сверхбольших массивах данных практически любой структуры.

Таким образом, принципиально новый уровень помехоустойчивости, достигаемый с помощью алгоритмов МПД разных типов, позволяет решать задачи обеспечения высокой надёжности передачи и хранения данных без какой-либо дополнительной доработки этих алгоритмов или всего лишь при незначительной их адаптации к возможным дополнительным требованиям, возникающим в крупномасштабных цифровых системах.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №08-07-00078а)

Разработки алгоритмов МПД поддерживались Научным советом по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР, НИИ «Квант» и ИКИ РАН. Дополнительная информация об МПД разных классов расположена на специализированном тематическом двуязычном веб-сайте ИКИ РАН www.mtdbest.iki.rssi.ru.

Литература

- Самойленко С.И., Давыдов А.А., Золотарёв В.В., Третьякова Е.И. Вычислительные сети. М.: Наука, 1981, 277 с.
- Золотарёв В.В., Овечкин Г.В. Эффективные алгоритмы помехоустойчивого кодирования для цифровых систем связи // Электросвязь. 2003, №9. С.34-37.
- Многопороговые декодеры. Веб-сайт ИКИ РАН www.mtdbest.iki.rssi.ru.
- Золотарёв В.В. Теория и алгоритмы многопорогового декодирования // Под научной редакцией члена-корреспондента РАН Ю.Б. Зубарева. М.: «Радио и связь», «Горячая линия – Телеком», 2006. 276 с.
- Золотарёв В.В., Овечкин Г.В. Помехоустойчивое кодирование. Методы и алгоритмы. Справочник. М.: «Горячая линия – Телеком», 2004. 124 с.
- Золотарёв В.В. Многопороговое декодирование для информационных потоков с байтовой структурой // Мобильные системы, 2006. №3. С. 25-27.
- Зубарев Ю.Б., Золотарёв В.В. Многопороговые декодеры: перспективы аппаратной реализации. // В сб.: «7-я Международная конференция и выставка «Цифровая обработка сигналов и её применение», М.: 2005. Вып. VII-1. С. 68-69.
- Зубарев Ю.Б., Золотарёв В.В., Овечкин Г.В., Строков В.В. Многопороговые декодеры для высокоскоростных спутниковых каналов связи: новые перспективы // Электросвязь, 2005. №2. С. 10-12.
- Зубарев Ю.Б., Золотарёв В.В., Овечкин Г.В., Дмитриева Т.А. Многопороговые алгоритмы для спутниковых сетей с оптимальными характеристиками // Электросвязь, 2006. №10. С. 9-11.
- Berrou C., Glavieux A., Thitimajshima P. Near Shannon Limit Error-Correcting Coding and Decoding: Turbo-Codes // Proceeding of ICC'93, Geneva, Switzerland, 1993. pp. 1064-1070.
- European Telecommunications Standards Institute. Digital video broadcasting (DVB) second generation framing structure, channel coding and modulation systems for broadcasting, interactive services, news gathering and other broadband satellite applications. DRAFT EN 302 307 (v. 1.1.2 06.2006).
- Zolotarev V.V., Averin S.V., Chulkov I.V. Optimum Decoding Characteristics Achievement on the Basis of Multithreshold Algorithms // 9-th ISCTA'07, July, UK, Ambleside, 2007.
- Zolotarev V.V., Nazirov R.R., Chulkov I.V. The Quick Almost optimal multithreshold decoders for Noisy Gaussian Channels // RCGSGO International Conference ESA in Moscow, Russia, June, 2007.
- Зубарев Ю.Б., Золотарёв В.В. Достижение характеристик оптимального декодирования на основе многопороговых алгоритмов // 9-я Международная конференция и выставка «Цифровая обработка сигналов и её применение», Доклады-1, Пленарный доклад, М.: 2007. С. 12–15.
- Zolotarev V.V., Averin S.V. Non-Binary Multithreshold Decoders with Almost Optimal Performance // 9-th ISCTA'07, July, UK, Ambleside, 2007.
- Золотарёв В.В. Обобщение алгоритма МПД на не двоичные коды // «Мобильные системы», №3, 2007, С. 39–42.
- Гринченко Н.Н., Овечкин Г.В. Помехоустойчивое кодирование для высокоскоростных спутниковых каналов связи // Цифровая обработка сигналов, 2006. №4, С. 29–33.
- Гринченко Н.Н., Золотарёв В.В., Овечкин Г.В., Овечкин П.В. Многопороговое декодирование в каналах с многопозиционной модуляцией // Вестник РГТУ, 2006 г. Вып. 19, С. 179–182.
- Гринченко Н.Н., Овечкин Г.В. Помехоустойчивое кодирование для цифровых систем связи // Известия ТРТУ, №15(70), Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2006. С. 5–10.
- Золотарёв В.В., Овечкин Г.В. Многопороговые декодеры для каналов с предельно высоким уровнем шума // Телекоммуникации. М.: 2005. №9. С. 29–34.
- Золотарёв В.В., Овечкин Г.В. Использование многопорогового декодера в каскадных схемах // Вестник РГТА. 2003. Вып. 11. С. 112–115.