УДК 62-52

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ФИЛЬТРАЦИИ КАЛМАНА-БЬЮСИ ПРИ ПЛОХОЙ ОБУСЛОВЛЕННОСТИ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ШУМА

Ашинянц Р.А., Морозова Т.Ю.

Представлен обобщенный алгоритм фильтрации Калмана - Бьюси, который применим как для случая отсутствия помех, так и при зашумленных измерениях.

Введение

Успешное решение задач анализа и синтеза систем автоматического управления, повышение эффективности их работы связано с получением возможно более полной информации о сигналах, воздействующих на объект управления. В большинстве случаев точное описание входных воздействий затруднено недоступностью их измерения. В тех же случаях, когда возможно измерение, для описания необходимо учитывать искажения, вносимые измерительными устройствами, внешними помехами. С аналогичной ситуацией сталкиваются и в тех случаях, когда для успешного ведения некоторого процесса необходимы знания об определенных компонентах вектора состояния объекта, которые в силу их физической природы или специфики процесса не измеримы.

В указанных случаях возникает задача определения оптимальных в некотором смысле оценок полезных сигналов (входных воздействий, компонент вектора состояния объекта) косвенным путем: по искаженным помехами измерениям входных сигналов.

Широкое применение в решении задач восстановления полезных труднодоступных сигналов получили оптимальные фильтры Калмана [1], [2]. Прямое применение методов оптимальной фильтрации Калмана для решения задач восстановления сигналов затруднено тем обстоятельством, что чаще всего мы находимся в условиях недостаточности априорной информации, когда неизвестны некоторые параметры процесса и характеристики шумов измерения. В то время как реализация алгоритмов фильтрации Калмана связана с необходимостью полной априорной информации о полезном сигнале и статистике воздействий.

Возможно ли, используя основные преимущества метода, уменьшить, если не устранить, влияние тех факторов, которые определяют недостатки? В частности, возможно ли определение весовых коэффициентов фильтра сделать независимым от решения уравнения для дисперсий и возможно ли устранение расходимости оценок фильтрации при плохой обусловленности или нулевой матрице интенсивностей помех измерения?

Следует обратить внимание, что цель работы – получение эффективных, несмещенных оценок и алгоритма оценивания, который был бы доступен для инженерной практики.

Постановка задачи

Пусть линейная динамическая система (объект) описывается системой дифференциальных уравнений *n*–го порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = Fx(t) + Gu(t), \quad x(t_0) = x_0\,, \tag{1}$$

где $x(t)$ – *n* – мерный вектор координат состояний; $u(t)$ – *l*–мерный вектор воздействий; *F, G* – матрицы коэффициентов размером соответственно $[n \times n]$ и $[n \times l]$; x_0 – вектор начальных условий.

Выходной сигнал $y(t)$ определяется линейной комбинацией координат вектора состояния

$y(t) = Hx(t)$,

где $y(t)$ – *m*– мерный вектор, *H* – матрица наблюдений размера $[m \times n]$.

Наблюдаемый в момент времени сигнал $z(t)$ представляет сумму выходного сигнала и помехи

$$z(t) = y(t) + v(t)\,, \tag{2}$$

где $v(t)$ – *m* – мерный вектор шума интенсивности *R*.

Тогда оптимальная оценка состояний системы в смысле минимума среднеквадратической ошибки определяется решением системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = F\hat{x}(t) + K(t)\left[z(t) - H\hat{x}(t)\right], \quad \hat{x}(t_0) = 0 \tag{3}$$

В алгоритмах фильтрации Калмана оптимальные весовые коэффициенты $K(t)$ системы фильтрации (3) определяются решением уравнений для дисперсий

$$\frac{dP}{dt} = FP(t) + P(t)F^T(t) - P(t)H^T R^{-1} HP(t) + GQG^T \tag{4}$$

$$K(t) = P(t)H^T R^{-1}, \tag{5}$$

где $P(t)$ – матрица дисперсий ошибок фильтрации, *R* – матрица интенсивностей помехи измерения, *H*– матрица наблюдений, *Q* – матрица интенсивностей белого шума.

Предположим, что матрица интенсивностей *R* помех измерения плохо обусловлена или нулевая. В этом случае имеет место некорректная постановка задачи. Задача состоит в отыскании такого процесса $\hat{x}^{\alpha}(t)$, который был бы близок в некотором смысле процессу $x(t)$ при плохо обусловленной матрице *R*.

Пусть линейный динамический объект описывается системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (1). При выполнении условия (2) будем считать заданной структуру системы восстановления (3). Откажемся от решения системы уравнений (4) с целью определения элементов матрицы $K(t)$. Тогда система (3) не замкнута. Естественно, что при некотором значении элементов матрицы $K(t)$ достигается минимум среднеквадратической ошибки.

Необходимо получить алгоритм настройки параметров восстановления состояний системы (3), чтобы достигался минимум среднеквадратической ошибки.

Известно, что невыполнение условия теоремы Калмана об управляемости может привести к неустойчивости системы фильтрации. При этом дисперсия ошибки восстановления при $t \to \infty$ стремится к нулю, и расходимость оценок фильтрации обуславливается накоплением ошибок за счет моделирующей системы. Однако это не единственная причина расходимости оценок фильтрации. Одной из причин расходимости оценок, известной как проблема расходимости фильтра Калмана, является неадекватность модели реальной наблюдаемой системе, которая объясняется грубой аппроксимацией характеристик реальной системы и преднамеренным уменьшением числа наблюдаемых координат. Кроме того, очень часто в модели принимают входное воздействие и шум измерения независимыми белыми шумами, в то время как они являются взаимно коррелированными. Такая проблема рассматривалась в [3].

Отметим еще одну проблему расходимости оценок фильтра Калмана. Так же как и в работе [4], примем входное воздействие и шум измерения независимыми белыми шумами. Поскольку при определении матрицы коэффициентов усиления фильтра Калмана применяется операция обращения матрицы интенсивностей помехи измерения *R* в формуле (5), то необходимо решать задачу повышения устойчивости алгоритма обращения матрицы *R*.

Решение задачи методом регуляризации

При решении данной задачи воспользуемся методами регуляризации некорректно поставленных задач [5], [6].

В выражении (5) умножим обе части справа на *R*, получим

$$KR = PH^T \tag{6}$$

Введем обозначения

$K^T = z$ - матрица [*m* × *n*],

$HP^T = u$ - матрица [*m* × *n*],(7)

$R^T = A$ - матрица [*m* × *m*].

Уравнение (6) принимает вид

$$Az = u. \tag{8}$$

Представим матрицы *z* и *u* в уравнении (8) в виде

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix},$$

где $z_1, z_2, ..., z_m, u_1, u_2, ..., u_m$ - строки матрицы *z* и *u* соответственно.

Пусть решения *z* системы (8) принадлежат метрическому пространству $\overline{Z}$, а свободные члены *u* линейному подпространству $\overline{U}$. Предположим, что $u^o \in \overline{U}$ и элементы матрицы *A* определены с точностью δ:

$\tilde{u} = \tilde{u}^\delta, \quad \tilde{A} = \tilde{A}^\delta$.

Устойчивое решение уравнения (8) будет получено, если

$$\rho_u(u^0, \tilde{u}^\delta) \le \delta, \quad \rho_z(z^0, \tilde{z}) < \varepsilon,$$

где $\rho_z(z^0, \tilde{z})$ - расстояние, мера уклонения на линейном пространстве, $\varepsilon > 0$; ε - любое число, представляющее заданную точность решения *z.*

Поскольку задача определения *z* по уравнению (8) поставлена некорректно, $\tilde{z}^\delta$ не может быть определено как точное решение уравнения

$$A\tilde{z}^\delta = \tilde{u} \tag{9}$$

Меру отклонения определим с помощью норм

$$\left\|A - \tilde{A}\right\| \le \delta, \quad \left\|u - \tilde{u}\right\| \le \delta$$

В качестве норм *u* и *z* примем

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + ... + u_m^2}, \quad \|z\| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + ... + z_m^2},$$

где u_i^2, z_i^2 -скалярные квадраты.

Для матрицы *A*

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{ij} a_{ij}^2}$$

Решение $\tilde{z}^\delta$ уравнения (9) получим с помощью параметрического функционала $M^\alpha[\tilde{u}, \tilde{A}, \delta]$, в котором параметр α связан с точностью δ [5]. При этом решения $\tilde{z}^\delta$ дают приближения к точному решению: z^0 $\left\|z^0 - \tilde{z}^\delta\right\| \le \varepsilon$, если $\|u - \tilde{u}\| \le \delta$, $\left\|A - \tilde{A}\right\| \le \delta$.

Рассмотрим параметрический функционал, введенный в [5]

$$M^\alpha[z, \tilde{u}, \tilde{A}] = \left\|\tilde{A}z - \tilde{u}\right\|^2 + \alpha\|z\|^2. \tag{10}$$

Используя методы вариационного исчисления, для заданных $\tilde{A}, \tilde{u}$ находим единственный элемент z^α, реализующий минимум функционала (10).

В развернутом виде функционал (10) можно представить в виде

$$\sum_j \left(\sum_{i=1} a_{ij} z_j - u_i\right)^2 + \alpha \sum_j z_j^2 = M^\alpha, \quad i = 1,2,...m, \quad j = 1,2,...n \tag{11}$$

Приравнивая частные производные функционала (11) по z_j нулю, получим $m \times n$ уравнений относительно z_j:

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j - u_i\right) a_{is} + \alpha z_s = 0, \quad s = 1,2,...,n$$

После элементарных преобразований получим регуляризованные уравнения в матричной форме

$$\left[A^T A + \alpha I\right]^T z = A^T u. \tag{12}$$

Учитывая обозначения (7), уравнение (12) принимает окончательный вид

$$K^\alpha = P^\alpha H^T R^T \left[R^T R + \alpha I\right]^{-1}, \tag{13}$$

где I – единичная матрица $[m \times m]$. Сопоставляя уравнения (5) и (4), последнее можно переписать следующим образом:

$$\frac{dP}{dt} = FP + PF^T - KHP + GQG^T, \qquad P(t_0) = P_0$$

Подставим в это уравнение значение K^α из (13)

$$\frac{dP^\alpha}{dt} = FP^\alpha + P^\alpha F^T - P^\alpha H^T R^T \left[RR^T + \alpha I\right]^{-1} HP^\alpha + GQG^T . \quad (14)$$

Для стационарного случая (F, H, R, G, Q - матрицы с постоянными элементами) установившееся решение задачи оценки восстановления координат исходного процесса может быть получено приравниванием нулю правой части уравнения (14) и решением системы алгебраических уравнений второй степени.

Уравнение (14) представляет регуляризованное уравнение дисперсий ошибок фильтрации Калмана-Бьюси.

Рассмотрим вопрос о выборе параметра α. В основной теореме работы [5] доказано, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое δ_0, что норма разности регуляризованного и точного решений окажутся меньше ε, если заданная точность $\delta \le \delta_0$. При этом параметр регуляризации α удовлетворяет условию

$$\frac{\delta^2}{\varepsilon(\delta)} \le \alpha \le \alpha_0(\delta), \quad (15)$$

где $\varepsilon(\delta)$ и $\alpha_0(\delta)$ какие-либо убывающие функции δ, стремящиеся к нулю при $\delta \to 0$.

Отсюда следует, что при увеличении точности исходных данных регуляризованное решение стремится к точному.

Выбор параметра α, удовлетворяющий условию (15), очень широк.

Другой способ определения параметра α заключается в следующем. Среди множества решений, соответствующих различным значениям параметра α, можно найти такое, которое минимизирует функционал

$$f(\alpha, \delta) = \left|\delta - \left\|Az^\alpha - \tilde{u}\right\|\right|,$$

где z^α - элемент, реализующий минимум функционала (10).

Приведенные способы не исчерпывают возможности выбора параметра регуляризации α. Различные методы выбора можно найти в работах [7], [8] Заметим, что метод регуляризации в достаточной мере трудоемкий, нерегулярный. Так, каждый раз при изменении точности исходных данных необходимо заново отыскивать параметр регуляризации.

Заметим, что полученное выражение (13) для матрицы коэффициентов усиления системы восстановления имеет частное применение. Существенным ограничением в применении этой формулы является отличие от нуля матрицы интенсивностей шумов измерения $R \neq 0$. Здесь следует оговорить и вид матрицы наблюдений H.

Рассмотрим случай, когда матрица H имеет диагональный вид.

Рассмотрим двумерный объект с матрицей наблюдений

$$H = \begin{vmatrix} h_{11} & 0 \\ 0 & h_{22} \end{vmatrix}.$$

Это означает, что наблюдаются две координаты. В этом случае отсутствие шумов измерения $(z_1 = h_{11}x_1,\ z_2 = h_{22}x_2,\ R = 0)$ вообще снимает проблему фильтрации. Однако, если матрица наблюдений имеет более общий вид $[m \times n]$ и матрица интенсивностей нулевая, уравнения для оценок Калмана теряют смысл. Предположим, что матрица наблюдений имеет вид H=[1 0 0], то есть наблюдается одна координата трехмерного объекта, при этом R=0. Восстановление неизмеримых координат по точному измерению выходной координаты означает, что необходимо восстановить ее первую и вторую производные. Дифференцирование же приведет к еще большим ошибкам. Следовательно, выражение (13) применимо только при наличии шумов измерения.

Однако можно получить регуляризованный алгоритм фильтрации, который применим как для случая отсутствия помех (R=0), так и при зашумленных измерениях ($R \neq 0$). Для этого вместо известного функционала (10) рассмотрим функционал вида

$$M^\alpha = \left\|Az - u\right\|^2 + \alpha \sum_{i=1}^{n} z_i^T A z_i \quad (16)$$

или в развернутом виде

$$M^\alpha = \sum_j \left(\sum_i a_{ij} z_i - u_j \right)^2 + \alpha \sum_i \sum_j a_{ij} z_i z_j .$$

Так же как и в предыдущем случае, приравнивая частные производные по z_j нулю, получим $m \times n$ уравнений вида

$$\sum_j \left(\sum_i a_{ij} z_i - u_j \right) a_{is} + \alpha \sum_i (a_{is} + a_{si}) z_i = 0, \qquad s = 1,2,\ldots,m.$$

Учитывая, что $a_{ij} = a_{ji}$, получим уравнение в матричной форме

$$\left(A^T A + \alpha A^T\right) z^\alpha = A^T u$$

или в окончательном виде

$$(A + \alpha I) z^\alpha = u . \quad (17)$$

В обозначениях (7) уравнение (17) принимает вид

$$K^\alpha = P^\alpha H^T (R + \alpha I)^{-1} \quad (18)$$

Оптимальная оценка вектора состояний процесса в смысле минимума среднеквадратической ошибки при любой матрице *R* шума измерения определяется из уравнения

$$\frac{d\hat{x}^\alpha}{dt} = F\hat{x}^\alpha + P^\alpha H^T (R + \alpha I)^{-1} \left[z - H\hat{x}^\alpha\right], \quad (19)$$

а матрица дисперсий удовлетворяет уравнению

$$\frac{dP^\alpha}{dt} = FP^\alpha + P^\alpha F^T - P^\alpha H^T (R + \alpha I)^{-1} HP^\alpha + GQG^T . \quad (20)$$

При $\alpha \to 0$ $x^\alpha(t)$ приближается к точной оценке.

Заметим, что, по существу, добавление к диагональным элементам матрицы *R* величины α означает введение в уравнения наблюдений дополнительного шума с интенсивностью α.

Примеры оценивания координат исходного процесса

Рассмотрим примеры, в которых при различной информации о шуме необходимо получить оценки координат исходного процесса, коэффициенты фильтрации Калмана – Бьюси и элементы матрицы дисперсий ошибок фильтрации.

Пусть процесс описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -ax_1 + x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -bx_2 + x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = u. \end{cases} \tag{21}$$

Наблюдаются координаты x_1 и x_2 в присутствии шумов v_1 и v_2

$$\begin{cases} z_1 = h_{11}x_1 + v_1, \\ z_2 = h_{22}x_2 + v_2. \end{cases}$$

Необходимо восстановить координаты исходного процесса, то есть получить их оценки, если v_1 и v_2 коррелированные белые шумы.

Имеем

$$H=\begin{bmatrix} h_{11} & 0 \\ 0 & h_{22} \end{bmatrix}, \quad R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}, \quad F=\begin{bmatrix} -a & 1 & 0 \\ 0 & -b & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Система восстановления описывается уравнениями (19):

$$\frac{d\hat{x}_1}{dt} = -a\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + k_{11}\left(z_1 - h_{11}\hat{x}_1\right) + k_{12}\left(z_2 - h_{22}\hat{x}_2\right),$$

$$\frac{d\hat{x}_2}{dt} = -b\hat{x}_2 + \hat{x}_3 + k_{21}\left(z_1 - h_{11}\hat{x}_1\right) + k_{22}\left(z_2 - h_{22}\hat{x}_2\right),$$

$$\frac{d\hat{x}_3}{dt} = k_{31}\left(z_1 - h_{11}\hat{x}_1\right) + k_{32}\left(z_2 - h_{22}\hat{x}_2\right).$$

В соответствии с (18) и (20) имеем систему уравнений

$$\frac{dp_{11}}{dt} = -2ap_{11} + 2p_{12} -$$
$$-\frac{1}{\beta}\left(h_{11}^2 p_{11}^2 (r_{22}+\alpha) - 2h_{11} - h_{22} p_{12} r_{12} + h_{22}^2 (r_{11}+\alpha) p_{12}^2\right),$$

$$\frac{dp_{12}}{dt} = -(a+b)\, p_{12} + p_{22} + p_{13} -$$
$$-\frac{1}{\beta}\left(h_{11}^2 (r_{22}+\alpha)\, p_{11}p_{12} - h_{11}h_{22}r_{12}\left(p_{12}^2 + p_{11}p_{22}\right) + h_{22}^2 (r_{11}+\alpha)\, p_{11}p_{22}\right),$$

$$\frac{dp_{13}}{dt} = -ap_{13} + p_{23} -$$
$$-\frac{1}{\beta}\left(h_{11}^2 p_{11}p_{13} (r_{22}+\alpha) - h_{11}h_{22}r_{12}\left(p_{13} + p_{23}\right) + h_{22}^2 p_{22}p_{23} (r_{11}+\alpha)\right),$$

$$\frac{dp_{22}}{dt} = -2bp_{22} + 2p_{23} -$$
$$-\frac{1}{\beta}\left(h_{11}^2 p_{12}^2 (r_{22}+\alpha) - 2h_{11}h_{22} p_{12}p_{22}r_{12} + h_{22}^2 p_{22}^2 (r_{11}+\alpha)\right),$$

$$\frac{dp_{23}}{dt} = -bp_{23} + p_{13} -$$
$$-\frac{1}{\beta}\left(h_{11}^2 p_{12}p_{13} (r_{22}+\alpha) - h_{11}h_{22}r_{12}\left(p_{13}p_{22} + p_{12}p_{23}\right) + h_{22}^2 p_{22}p_{23} (r_{11}+\alpha)\right),$$

$$\frac{dp_{33}}{dt} = -\frac{1}{\beta}\left(h_{11}^2 p_{13}^2 (r_{22}+\alpha) - 2h_{11}h_{22} p_{13}p_{23}r_{12} + h_{22}^2 p_{23}^2 (r_{11}+\alpha)\right) + Q,$$

$$k_{11} = \frac{1}{\beta}\left(p_{11}h_{11}(r_{22}+\alpha) - p_{12}h_{22}r_{12}\right), \qquad k_{12} = \frac{1}{\beta}\left(p_{12}h_{22}(r_{11}+\alpha) - p_{11}h_{11}r_{12}\right),$$

$$k_{21} = \frac{1}{\beta}\left(p_{12}(r_{22}+\alpha)h_{11} - p_{12}h_{22}r_{12}\right), \qquad k_{22} = \frac{1}{\beta}\left(p_{22}h_{22}(r_{11}+\alpha) - p_{12}h_{11}r_{12}\right),$$

$$k_{31} = \frac{1}{\beta}\left(p_{13}h_{11}(r_{22}+\alpha) - p_{32}h_{22}r_{12}\right), \qquad k_{32} = \frac{1}{\beta}\left(p_{23}h_{22}(r_{11}+\alpha) - p_{13}h_{11}r_{12}\right),$$

где $\beta = (r_{11}+\alpha)(r_{22}+\alpha) - r_{12}^2$.

Пусть процесс описывается той же системой уравнений (21). Наблюдается координата x_1 $z = x_1$, то есть H=[1 0 0], R=0. Необходимо получить оценки $\hat{x}_2$ и $\hat{x}_3$.

Очевидно, оптимальные оценки $\hat{x}_2$ и $\hat{x}_3$ совпадают с первой и второй производными измеряемого сигнала x_1, вычисление которых связано с большими ошибками. Применяя (19), (20) и (18), получим

$$\frac{d\hat{x}_1}{dt} = -a\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + k_{11}(z - \hat{x}_1), \quad \frac{d\hat{x}_2}{dt} = -b\hat{x}_2 + \hat{x}_3 + k_{21}(z - \hat{x}_1), \quad \frac{d\hat{x}_3}{dt} = k_{31}(z - \hat{x}_1),$$

$$\frac{dp_{11}}{dt} = -2ap_{11} + 2p_{12} - \frac{p_{11}^2}{\alpha}, \quad \frac{dp_{12}}{dt} = -(a+b)\, p_{13} + p_{22} - \frac{p_{11}p_{12}}{\alpha},$$

$$\frac{dp_{13}}{dt} = -ap_{13} + p_{13} - \frac{p_{11}p_{13}}{\alpha}, \quad \frac{dp_{22}}{dt} = -2bp_{22} + 2p_{23} - \frac{p_{12}^2}{\alpha},$$

$$\frac{dp_{23}}{dt} = -bp_{23} + p_{13} - \frac{p_{13}p_{12}}{\alpha}, \quad \frac{dp_{33}}{dt} = -\frac{p_{13}^2}{\alpha} + Q,$$

$$k_{11} = \frac{p_{11}}{\alpha}, \qquad k_{21} = \frac{p_{12}}{\alpha}, \quad k_{31} = \frac{p_{13}}{\alpha}.$$

Поскольку $v = 0$, то очевидно, что P=0. Тогда при $\alpha \to 0$ оценки $\hat{x}_2^\alpha$ и $\hat{x}_3^\alpha$ приближаются к истинным значениям.

Заключение

Таким образом, метод регуляризации не определяет однозначно вид регуляризирующего функционала. Решения одной и той же задачи при выборе различного вида функционалов могут существенно отличаться друг от друга. Одна и та же, казалось бы, часто употребляемая форма функционала приводит к успешным результатам при решении одних задач и к нереализуемым (неуспешным) при решении других.

Значения параметров регуляризации задаются, исходя из дополнительных соображений. Причем для одной и той же задачи можно предложить различные условия выбора параметра регуляризации, конкретный же выбор требует дополнительных исследований.

В заключение отметим, что в статье рассмотрена задача обобщения фильтра Калмана на случай отсутствия шумов ($R=0$). При этом использовался математический подход, основанный на приведении исходного уравнения (6) к матричному виду (8) и использовании функционала (16) для решения уравнения (8).

Литература

1. Ioffe B.L., Sargent R.W. The design of an jn-line control schema for a tubular catalityc reactor. Trans. Inst. Chem.Eng., 1972, №5.
2. Гулько Ф.Б., Новосельцева Ж.А., Смирнов Н.А. О корректности решения задач фильтрации и восстановления сигналов на АВМ. В сб. «Теория автоматического управления», Тр. Всесоюзного совещания по автоматическому управлению, «Наука», 1972.
3. Лифшиц Н.А., Виноградов В.Н., Голубев Г.А. Линейная фильтрация при особенной матрице интенсивностей помех. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1969, №3.
4. Калман Р.Е., Бьюси Р.С. Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания. Техническая механика, т.83, серия Д, №1, 1961.
5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1986.
6. Петров Ю.П. Корректные, некорректные и промежуточные задачи с приложениями. СПб.: Политехника, 2003.
7. Морозов В.А. О регуляризации некорректно поставленных задач и выборе параметра регуляризации. ЖВМ и МФ, 1967, №2.
8. Арсенин В.Я., Иванов В.В. Восстановление формы сигнала, свободной от искажений, обусловленных аппаратурой и каналом передач. «Измерительная техника», 1969, №1.