

ВЕЙВЛЕТ-КОДИРОВАНИЕ ЗАШУМЛЕННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПРЕСЛЕДОВАНИЕМ БАЗИСА ПО КОГЕРЕНТНЫМ СТРУКТУРАМ

Бехтин Ю.С.

Введение

Специфика формирования некоторых классов изображений оптико-электронными приборами обуславливает наличие искажений. Очевидным (но не лучшим) решением задачи сжатия таких зашумленных изображений является применение предварительной фильтрации. Однако из-за несогласованности алгоритмов фильтрации с последующим кодированием возможны ситуации, когда ошибки квантования будут превалировать над остаточным шумом после фильтрации. Следовательно, для согласования фильтрации и компрессии необходимо использовать единый механизм обработки изображения. Такой механизм можно построить на основе пороговой (грубой или мягкой) вейвлет-обработки сигналов (*hard thresholding* или *soft thresholding*) [1, 2], если величину нулевой, или «мертвой» зоны (*dead zone*) кодера (увеличенный интервал квантования около нуля [2, 3]) сделать адаптивной к интенсивности шума. Данный подход применяется в работах [4 – 7], где рассматриваются варианты выбора порогов и интервалов квантования, приводящие к субоптимальным оценкам оригинального изображения. Метод поиска оптимальной величины порога и оптимального интервала квантования, исходя из общего критерия качества, предложен автором в [8].

Вышеуказанные работы используют один базис для вейвлет-преобразования. Однако разные базисы по-разному аппроксимируют сигнал, поэтому выбор наилучшего в смысле некоторого критерия базиса из известной библиотеки базисов обеспечивает эффективное решение поставленной задачи. В работе [9] в качестве критерия отбора базисов используется принцип «минимума длины описания» (*minimum description length*), согласно которому наилучшим является базис, обеспечивающий минимальную суммарную длину кода для значимых вейвлет-коэффициентов, интервалов и уровней квантования, а также названия базиса. Однако данный подход трудно применить на практике, поскольку полученная степень сжатия не гарантирует выполнение ограничений на скорость кодирования (квоту бит). В другой работе [10] базис отбирается исходя из верхней границы минимального риска, который обеспечивает эффективное шумоподавление, но не сжатие. Для целей восстановления искаженных звукозаписей (одномерных сигналов) в работе [11] был разработан

Рассматривается решение задачи вейвлет-компрессии зашумленного изображения путем выбора последовательности «лучших» базисов из библиотеки по предложенной функции стоимости. На каждой итерации в оптимальном базисе алгоритм выделяет в зашумленном изображении когерентные структуры. Алгоритм минимизирует среднеквадратическую погрешность восстановления оригинала с учетом ошибок квантования при заданной квоте бит. Приводятся результаты моделирования, подтверждающие эффективность предложенного алгоритма работы кодера по сравнению с другими методами компрессии изображений, в частности с SPIHT.

метод преследования базиса по когерентным структурам, то есть путем отбора тех частей сигнала, которые сильно коррелированы с базисом по сравнению с белым шумом. В статье данный метод распространяется на случай сжатия зашумленных изображений (двумерных сигналов), при этом одновременно решается задача фильтрации и квантования при заданной скорости кодирования (квоте бит).

Теоретические аспекты совмещения фильтрации и квантования.

Многомасштабный анализ позволяет получить декомпозицию зашумленного изображения

$$Y = X + Z, \quad (1)$$

где Y – наблюдаемое изображение, X – неизвестный оригинал, Z – гауссовский шум с нулевым средним, при заданном числе уровней Q в виде:

$$W_Y = \mathbf{W}Y = \mathbf{W}(X + Z) = \mathbf{W}X + \mathbf{W}Z = W_X + W_\xi, \quad (2)$$

где \mathbf{W} – символ прямого вейвлет-преобразования [1, 2]. Таким образом, требуется выполнить сжатие данных зашумленного изображения (1), кодируя вейвлет-коэффициенты (2) таким образом, чтобы ошибка восстановления была минимальной в смысле среднего квадрата евклидовой нормы:

$$E \left\{ \|W_X - \hat{W}_X\|^2 \right\} \rightarrow \min, \quad (3)$$

где \hat{W}_X – вейвлет-коэффициенты восстановленного после компрессии изображения \hat{X} . В работах [1, 3] показано, что среднеквадратическая ошибка (СКО) восстановления (3), которая вычисляется в области вейвлет-преобразования (трансформанты), эквивалентна СКО $E \left\{ \|X - \hat{X}\|^2 \right\}$ в пространственной области.

Оценки вейвлет-коэффициентов \hat{W}_X для сепаративных вейвлет-базисов могут быть найдены с помощью нелинейной аппроксимации, которая строит-

ся по M первым вейвлет-коэффициентам наибольшей амплитуды. Для того чтобы выполнить нелинейную аппроксимацию, необходимо произвести сортировку всех I вейвлет-коэффициентов по абсолютной амплитуде:

$$|w_{Y_k}| \geq |w_{Y_{k+1}}|, \forall k \in [1, \dots, I]. \quad (4)$$

Сортированные вейвлет-коэффициенты имеют быстрый спад, причем, как показали проведенные исследования, в одном базисе у изображений одного класса поведение кривых спада практически одинаково. Для подбора значения M можно использовать также аппроксимацию кривой спада. Ф.Фальзон и С.Малла в работе [12] определили эту аппроксимацию как $|w_{Y_k}| \sim Ck^{-\gamma}$, где $C > 0$ и $\gamma > \frac{1}{2}$ – некоторые константы при условии, что существуют две другие константы $A > 0, B > 0$, не зависящие от C, γ и I , такие что

$$ACK^{-\gamma} \leq |w_{Y_k}| \leq BCK^{-\gamma}, \forall k \in [1, \dots, I].$$

При действии шума, как показали проведенные эксперименты, удастся подобрать показатель степени γ , при котором ошибка аппроксимации кривой спада всех вейвлет-коэффициентов относительно невелика. Рис.1 иллюстрирует подбор аппроксимации кривой спада с показателем степени $\gamma=0,53$ для зашумленного изображения Lena ($\sigma_{ш}=30$), показанного на рис.2.

Разные базисы обеспечивают и разные кривые спада вейвлет-коэффициентов. На рис.3 приведены графики части нормированных упорядоченных вейвлет-коэффициентов изображения Lena, полученные соответственно с помощью вейвлетов CDF 9.7 (Cohen-Daubeshies-Feauveau) и db4 (Daubeshies 4) при трех уровнях декомпозиции ($Q=3$). Нормировка необходима потому, что величина первого сортированного вейвлет-коэффициента $|w_{Y_1}|$, принадлежащего НЧ субполосе декомпозиции, изменяется при выборе базиса. Для зашумленного изображения Lena (рис. 2) при базисах CDF 9.7 и db4 абсолютная разность между первыми вейвлет-коэффициентами составила 504,3 (для db7 $|w_{Y_1}|=6955,8$, а для CDF9.7 $|w_{Y_1}|=6451,5$). Из рис.3 видно, что основные отличия между кривыми проявляются в начальной области быстрого спада сортированных вейвлет-коэффициентов. При этом нормированные кривые идут параллельно друг другу, не пересекаясь.

Нелинейная аппроксимация является основой для получения оценок вейвлет-коэффициентов $W_{\hat{X}}$, поскольку отбрасываемые вейвлет-коэффициенты малой амплитуды соответствуют высокочастотным субполосам, где сосредотачивается энергия шума.

Сжатие изображения после вейвлет-преобразования также сопровождается отбрасыванием части вейвлет-коэффициентов малой амплитуды из-за нулевой зоны. Таким образом, выбор числа M обеспечивает компромисс между степенью сжатия и эффективностью шумоподавления. Квантованные, или значимые вейвлет-коэффициенты (не попавшие в нулевую зону) кодируются, расходуя заданный пользователем бюджет бит R_C . Выбор базиса и числа M значимых вейвлет-коэффициентов влияет на эффективность использования квоты бит R_C .

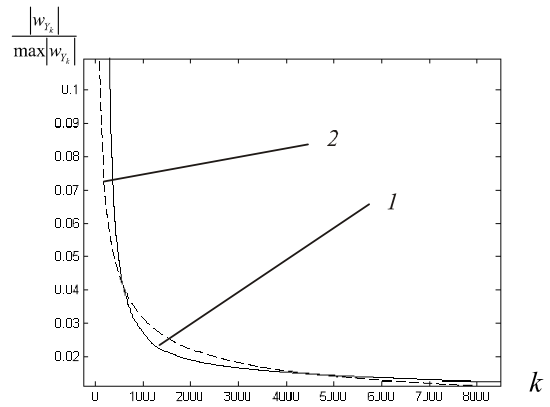


Рис.1. Фрагменты нормированной кривой спада сортированных вейвлет-коэффициентов зашумленного изображения Lena (1) и ее аппроксимации (2) при $\gamma=0,53$; вейвлет db7.



Рис.2. Искаженное изображение Lena при $\sigma_{ш}=30$.

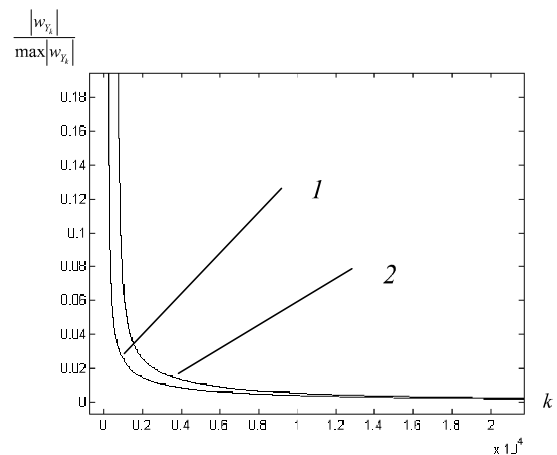


Рис.3. Кривые спада части вейвлет-коэффициентов изображения Lena при двух базисах CDF 9.7 (1) и db4 (2), $Q=3$.

Различают два варианта кодирования и, следовательно, два варианта расходования полного бюджета бит R_C [1, 3]. При высоких скоростях кодирования (свыше 1 бит/пиксель, $R_C > I$) принимается гипотеза о равномерном квантовании с высоким разрешением. Тогда можно доказать, что при кодировании значимых вейвлет-коэффициентов с помощью двоичных слов постоянной длины дисперсия ошибки квантования составит:

$$\sigma_{кв}^2 = \frac{C^2}{3} (1 - M^{-\gamma})^2 2^{-2\bar{R}_C}, \text{ где } \bar{R}_C = R_C / M. \quad (5)$$

Действительно, при равномерном квантовании с высоким разрешением дисперсия ошибки квантования есть $\sigma_{кв}^2 = \frac{\Delta^2}{12}$, где Δ – интервал квантования.

Число интервалов (бинов) квантования K задается квотой бит $\bar{R}_C = \log_2 K$. Поскольку диапазон изменения значимых вейвлет-коэффициентов составит $2(|w_{Y_1}| - |w_{Y_M}|)$, то интервал квантования равен $\Delta = 2 \frac{C}{K} (1 - M^{-\gamma})$, откуда выводится (5).

При малых скоростях кодирования (меньше 1 бит/пиксель, $R_C \leq I$) M квантованных значимых вейвлет-коэффициентов зашумленного изображения кодируются с помощью двоичных слов переменной длины. Дисперсия ошибки квантования определяется аналогичным образом, но для квантования с низким разрешением, поскольку число M сильно ограничено:

$$\sigma_{кв}^2 = C^2 (1 - M^{-\gamma})^2 2^{-2\bar{R}_1}, \quad (6)$$

где $\bar{R}_1 = (R_C - R_0) / M$.

Здесь R_0 – число бит, необходимое для кодирования карты существенности (координат) вейвлет-коэффициентов. Координаты квантованных вейвлет-коэффициентов $\langle w_k \rangle$, $\forall k \in [1, \dots, I]$, где скобки $\langle \cdot \rangle$ обозначают операцию квантования, записываются в виде двоичной карты:

$$s(k) = \begin{cases} 0, & \text{если } \langle w_k \rangle = 0; \\ 1, & \text{если } \langle w_k \rangle \neq 0. \end{cases} \quad (7)$$

Для числа M ($M \geq 1$) значимых вейвлет-коэффициентов относительные количества 0 и 1 в карте существенности соответственно равны $p_0 = (I - M) / I = 1 - \varepsilon$ и $p_1 = M / I = \varepsilon$. При адаптивном кодировании вначале находится число M , которое кодируется числом бит, равным $\log_2 I$. Затем вычисляется величина ε , и полный расход квоты бит на кодирование карты существенности, таким образом, составит:

$$R_0 = \log_2 I - I[(1 - \varepsilon) \log_2 (1 - \varepsilon) + \varepsilon \log_2 \varepsilon]. \quad (8)$$

Для кодирования типа базиса также требуется некоторое число бит R_B из заданной квоты R_C . Тогда целесообразно использовать распределение вероятности символов, описывающих базисы, чтобы код с переменной длиной уменьшил среднее значение расхода бит R_B и слабо влиял на дисперсию ошибки квантования (5) и (6).

Для вычисления полной ошибки, вызванной нелинейной аппроксимацией и квантованием, вначале рассматривается сумма квадратов отклонений оценок вейвлет-коэффициентов

$$w_{\bar{X}_k} = \begin{cases} \langle w_{Y_k} \rangle, & \text{если } |w_{Y_k}| \geq |w_{Y_M}|, \\ 0, & \text{если } |w_{Y_k}| < |w_{Y_M}|, \end{cases} \quad \forall k \in [1, \dots, I], \quad (9)$$

от их истинных значений:

$$\sum_{i=1}^I (w_{X_i} - w_{\bar{X}_i})^2 = \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^I w_{Y_i}^2 - \sum_{i=1}^M w_{Y_i}^2 + \sum_{i=1}^I w_{\xi_i}^2 + \sum_{i=1}^M \sigma_{\xi i}^2.$$

Для удобства вводятся следующие обозначения:

$$\sigma^2 = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I w_{Y_i}^2 - \text{средняя сумма квадратов всех вейвлет-коэффициентов зашумленного изображения};$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M w_{Y_i}^2 - \text{средняя сумма квадратов значимых вейвлет-коэффициентов};$$

$$\sigma_{W_{\xi}}^2 = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I w_{\xi_i}^2 - \text{дисперсия вейвлет-коэффициентов шума с нулевым средним};$$

$$\sigma_{кв}^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sigma_{кв i}^2 - \text{выборочная дисперсия ошибки квантования значимых вейвлет-коэффициентов}.$$

Тогда среднее квадрата нормы (3) с учетом (10) и условных обозначений принимает вид:

$$E\{\|W_X - W_{\bar{X}}\|^2\} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I (w_{X_i} - w_{\bar{X}_i})^2 = \sigma^2 - \varepsilon \tilde{\sigma}^2 + \sigma_{W_{\xi}}^2 + \varepsilon \sigma_{кв}^2. \quad (11)$$

Уравнение (11) показывает, что для качественного шумоподавления при сжатии (кодировании) зашумленного изображения желательно иметь как можно большую среднюю сумму квадратов значимых вейвлет-коэффициентов и как можно меньшую дисперсию ошибки квантования. Данные требования являются противоречивыми, поскольку с увеличением числа M значимых вейвлет-коэффициентов одновременно увеличивается и ошибка квантования. Тогда выбор базиса необходимо проводить при фиксированных значениях M , поскольку базис определяет характер кривых спада упорядоченных вейвлет-коэффициентов.

Будем полагать, что базис β^{α} лучше, чем базис β^{ω} при кодировании зашумленных изображений, если при всех $\varepsilon \in [I^{-1}, 1]$ выполняется неравенство

$$\mathcal{E}^{(\alpha)}(\tilde{\sigma}_{\alpha}^2(\mathcal{E}^{(\alpha)}) - \sigma_{\alpha \xi \alpha}^2(\mathcal{E}^{(\alpha)})) \geq \mathcal{E}^{(\omega)}(\tilde{\sigma}_{\omega}^2(\mathcal{E}^{(\omega)}) - \sigma_{\omega \xi \omega}^2(\mathcal{E}^{(\omega)})). \quad (12)$$

Чтобы избавиться от неопределенности при парном сравнении базисов, необходимо иметь некоторый критерий, однозначно показывающий преимущество одного базиса перед другим. Для неискаженных сигналов (изображений) в теории вейвлет-преобразования рассматриваются критерии, построенные на вогнутых функциях стоимости Шура [1].

Из выражений (5), (6) следует, что с ростом показателя степени γ возрастает дисперсия ошибки квантования и одновременно убывает сумма квадратов значимых вейвлет-коэффициентов. Проведенные исследова-

ния показали, что характер изменения величины $u\sigma^2 = \varepsilon(\tilde{\sigma}^2 - \sigma_{\hat{e}\hat{a}}^2)$ при низких и высоких скоростях кодирования примерно одинаков. На рис.4 показано изменение теоретической оценки величины $\varepsilon(\tilde{\sigma}^2 - \sigma_{\hat{e}\hat{a}}^2)$ при разных показателях степени γ . Из рис.4 видно, что при выборе базисов при фиксированном значении M выигрывает базис с наименьшим значением γ (кривая 1). Расчеты сделаны без учета расходов R_B на кодирование названия базиса.

Необходимо отметить, что фактические дисперсии ошибок квантования никогда не превосходят верхних границ (5), (6). Следовательно, если величина $\tilde{\sigma}^2$ доминирует над теоретической величиной $\sigma_{\hat{e}\hat{a}}^2$ (5) или (6), то такое соотношение сохранится и при расчете фактических дисперсий ошибок квантования. Для зашумленного изображения, декомпозированного при двух разных базисах, величина $\tilde{\sigma}^2$ отражает точность оценки оригинала (нелинейной аппроксимации), следовательно, наибольшая из двух величин $\varepsilon(\tilde{\sigma}^2 - \sigma_{\hat{e}\hat{a}}^2)$ соответствует наилучшему базису.

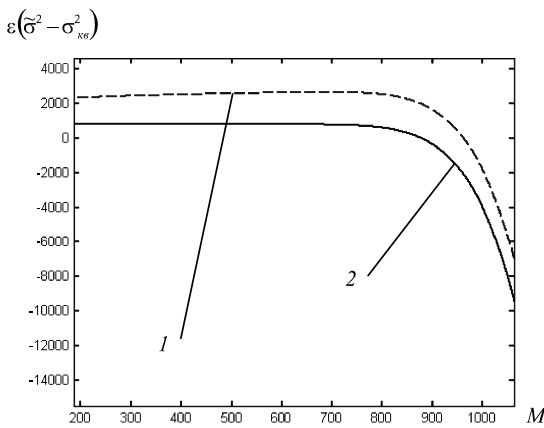


Рис.4. Поведение величины $\varepsilon(\tilde{\sigma}^2 - \sigma_{\hat{e}\hat{a}}^2)$ при $\gamma=0,55$ (1) и $\gamma=1$ (2), $l=20000$; $R_c = 0,2I$ (0,2 бит/пиксель); $C=5000$.

Таким образом, можно доказать, что базис β^α лучше, чем базис β^ω при кодировании зашумленных изображений тогда и только тогда, когда при всех вогнутых функциях $\Phi(u)$, $u>0$, справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^l \Phi\left(\frac{1}{\sigma^2 I} \left(|W_{Y_i}^{(\alpha)}|^2 - \sigma_{\hat{e}\hat{a}i}^{(\alpha)2} \right)\right) \leq \sum_{i=1}^l \Phi\left(\frac{1}{\sigma^2 I} \left(|W_{Y_i}^{(\omega)}|^2 - \sigma_{\hat{e}\hat{a}i}^{(\omega)2} \right)\right) \tag{13}$$

Из практических соображений необходимо использовать какую-либо одну вогнутую функцию $\Phi(u)$. На основании (13) в рассмотрение вводится функция стоимости:

$$C(\beta^\iota) = \sum_{i=1}^l \Phi\left(\frac{1}{\sigma^2 I} \left(|W_{Y_i}^{(\iota)}|^2 - \sigma_{\hat{e}\hat{a}i}^{(\iota)2} \right)\right), \tag{14}$$

где $\iota = 1, \dots, L$, L – число базисов в библиотеке Λ :

$$\Lambda = \{\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^L\} \tag{15}$$

Тогда наилучший базис β^α минимизирует стоимость аппроксимации [1]:

$$\tilde{N}(\beta^\alpha) = \min_{\iota} \tilde{N}(\beta^\iota) \tag{16}$$

Выбор наилучшего базиса зависит от вида вогнутой функции $\Phi(u)$. В качестве функций стоимости в статье используется энтропия вида

$$\Phi(u) = -u \ln u, \quad u \geq 0. \tag{17}$$

Библиотека базисов. Библиотека базисов Λ представляет собой коллекцию L ортонормированных базисов (15). Состав библиотеки не является постоянным, а может изменяться в зависимости от класса кодируемого зашумленного изображения. В библиотеку могут, например, входить: стандартный базис евклидова пространства \mathbf{R}^l , базисы Хаара-Уолша, различные вейвлет-базисы семейства Добеши (Daubeshis), биортогональные вейвлет-базисы (семейство bior), в том числе базисы, эффективные для сжатия, CDF 9.7, LeGall 5.3 и т.п. На их основе строятся соответствующие вейвлет-пакетные базисы и их менее асимметричные версии – куафлеты (coiflet). В состав библиотеки можно добавить локальные тригонометрические базисы. Такая коллекция базисов является достаточно адаптируемой для эффективного представления сигналов любой размерности, в том числе 2D сигналов (изображений).

Вычислительная сложность применения того или иного базиса из библиотеки определяется размером изображения I и составляет:

- для процессов декомпозиции (анализа) и реконструкции (синтеза) по ортонормированным 2D базисам, включая 2D вейвлеты – $O(I)$ операций;
- при нахождении лучшего базиса при 2D вейвлет-пакетной обработке – $O(\text{Log}_4 I)$ операций;
- при нахождении лучшего 2D локально-тригонометрического базиса - $O(I[\log_4 I]^2)$ операций.

В библиотеку базисов также можно добавить базис, вычисляемый по преобразованию Карунена-Лозва, который дает минимальную энтропию [1, 3]. Однако вычислительная сложность такого преобразования равна $O(I^3)$ уже в 1D варианте из-за проблемы нахождения собственных чисел.

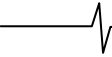
В результате неизвестный сигнал f может быть полностью представлен M элементами ($M < l$) базиса β^l , $l = 1, \dots, L$:

$$f = \mathbf{B}^{(l)} W_M^{(l)}, \tag{18}$$

где $\mathbf{B}^{(l)} \in \mathbf{R}^l$ – ортогональная матрица, столбцы которой являются элементами базиса β^l ; а $W_M^{(l)}$, $\iota = 1, \dots, L$, – матрица с M ненулевыми коэффициентами преобразования.

Таким образом, задача совместной фильтрации и сжатия данных искаженного изображения представляется как задача поиска модели из набора моделей, которые формируются базисами β^l , $\iota = 1, \dots, L$.

Подбор числа значимых вейвлет-коэффициентов через когерентные структуры. Вейвлет-декомпозиция зашумленного изображения в библиотеке базисов является его рассмотрением в разных масштабах и определением наилучшего совпадения с выбираемой моделью (базисом). Шум представляет такие компоненты декомпозированного изображения, которые не имеют сильной корреляции ни с одним из базисов библиотеки. Тогда для фильтрации следует выделить когерентные структуры [1, 12], то есть те компоненты двумерного сигнала,



которые сильно коррелированы с базисом. Для сортированных по (4) вейвлет-коэффициентов формируется следующее решающее правило отделения когерентной структуры в базисе β^l , $l = 1, \dots, L$:

$$\rho(Y_k) = \frac{|w_{Y_k}^{(l)}|}{\|Y\|} > \rho_l, \quad (19)$$

где ρ_l - максимум нормированной корреляции шума в l вейвлет-коэффициентах зашумленного изображения. При любом M можно определить остаток Y_M , вычисляемый как разность между исходным зашумленным изображением и изображением, полученным после обратного вейвлет-преобразования (восстановления) над всеми когерентными структурами:

$$Y_M = Y - \sum_{k=1}^M \mathbf{W}^{-1} \{w_{Y_k}\} = \sum_{k=M+1}^L \mathbf{W}^{-1} \{w_{Y_k}\}, \quad (20)$$

где символом \mathbf{W}^{-1} обозначена операция вычисления обратного вейвлет-преобразования. Остаток Y_M является ортогональной проекцией Y на пространство размерности $l - M$. Остаток Y_M будет считаться шумом, если при сравнении нормированной корреляции этого остатка с базисом β^l , $l = 1, \dots, L$, с нормированной корреляцией шума ρ_{l-M} справедливо неравенство [1, 12]:

$$\rho^2(Y_M) = \frac{|w_{Y_M}|^2}{\sum_{k=M+1}^L |w_{Y_k}|^2} > \rho_{l-M}^2. \quad (21)$$

Оценка оригинального сигнала является тогда суммой M когерентных структур:

$$\hat{X} = \sum_{k=1}^M \mathbf{W}^{-1} \{w_{Y_k}\}. \quad (22)$$

Таким образом, из (21) следует, что удаление когерентных структур внешне похоже на грубую пороговую обработку вейвлет-коэффициентов (2) с величиной порога:

$$\tau = \rho_{l-M} \sqrt{\sum_{k=M+1}^L |w_{Y_k}|^2}. \quad (23)$$

Соотношения (21), (22) нуждаются в уточнении относительно ошибок квантования. Поскольку минимизация СКО восстановления зашумленного изображения после компрессии $E\{\|W_X - W_{\hat{X}}\|^2\}$ эквивалентна максимизации величины $\varepsilon(\tilde{\sigma}^2 - \sigma_{\kappa\delta}^2)$, то с учетом (2), (21) и (23) выводится следующий алгоритм оценки числа значимых вейвлет-коэффициентов M по когерентным структурам:

$$f(M) = \varepsilon(\tilde{\sigma}^2 - \sigma_{\kappa\delta}^2) \rightarrow \max_M, \quad (24)$$

$$\forall |w_{Y_i}|^2 \geq \rho_{l-M}^2 \sum_{i=M+1}^L |w_{Y_i}|^2 = \rho_{l-M}^2 I(\sigma^2 - \varepsilon\tilde{\sigma}^2). \quad (25)$$

Из соотношений (24), (25) видно, что алгоритм имеет итерационный характер. Пусть произведена сортировка всех l вейвлет-коэффициентов по убыванию их абсолютных значений. Тогда алгоритм содержит следующую последовательность шагов.

1. Инициализация алгоритма начинается с установки $M = l - 1$.

2. Вычисляется кумулятивная сумма квадратов вейвлет-коэффициентов и по (23) находится величина

порога при известной нормированной корреляции шума ρ_{l-M} .

3. Проверяется выполнение условия (25), которое дает новое, скорректированное значение числа M .

4. Проверяется достижение максимума целевой функции $f(M)$ по (24).

5. Если максимум достигнут, то останов алгоритма. Иначе переход к п.2.

Для гауссовского белого процесса Z размером l и с дисперсией σ_w^2 при больших значениях l существует вероятность, стремящаяся к 1, что для любого ортонормированного базиса выполняется [1]:

$$\frac{\max_{1 \leq k \leq l} |w_{\xi}|}{\|Z\|} \leq \frac{\sqrt{2 \ln l} \sigma_w}{\sqrt{l} \sigma_w} = \frac{\sqrt{2 \ln l}}{\sqrt{l}} = \rho_l. \quad (26)$$

Поскольку отделение когерентных структур производится с помощью механизма грубой пороговой обработки вейвлет-коэффициентов, то в результате работы алгоритма (24), (25) автоматически получаются оценки вейвлет-коэффициентов

$$w_{\hat{X}_i} = \langle w_{Y_i} \rangle, \quad i = \overline{1, M}, \quad \text{и} \quad w_{\hat{X}_i} = 0, \quad i = \overline{M+1, l}.$$

Предложенный алгоритм может быть модифицирован для мягкой пороговой обработки:

$$w_{\hat{X}_i} = \begin{cases} \langle w_{Y_i} \rangle, & i = \overline{1, t}, \\ \text{sign}(w_{Y_i}) \langle |w_{Y_i}| - \rho_{l-M} \sqrt{I(\sigma^2 - \varepsilon\tilde{\sigma}^2)} \rangle, & \\ i = \overline{t+1, M}, & \\ 0, & i = \overline{M+1, l}. \end{cases} \quad (27)$$

При этом целевая функция (24) изменяется и алгоритм поиска оценки M принимает вид:

$$f(M) = \varepsilon(\tilde{\sigma}^2 - \sigma_{\kappa\delta}^2) - (\varepsilon - \theta) \rho_{l-M}^2 I(\sigma^2 - \varepsilon\tilde{\sigma}^2) \rightarrow \max_M, \quad (28)$$

$$\forall |w_{Y_i}|^2 \geq \rho_{l-M}^2 I(\sigma^2 - \varepsilon\tilde{\sigma}^2).$$

Здесь t - число вейвлет-коэффициентов НЧ субполосы (аппроксимации), которые обычно не подвергаются мягкой пороговой обработке [5], $\theta = t/l$.

Преследование базисов по когерентным структурам. Изображения являются сигналами сложной структуры, для которых практически невозможно подобрать один, «идеальный» базис. Кроме того, при действии шума одна часть изображения может оказаться когерентной структурой при одном базисе, а другая - иметь сильную корреляцию с другим базисом. При использовании выше-рассмотренных алгоритмов получения оценок значимых вейвлет-коэффициентов и их числа M (24)-(28) может оказаться, что для одного базиса β^α из библиотеки базисов Λ (15) остаток Y_M вида (20) содержит когерентную структуру для другого базиса β^ω , $\alpha, \omega \in [1, \dots, L]$. Таким образом, качество восстановления оригинального изображения по одному базису не будет высоким из-за потери информативной части изображения.

С учетом вышесказанного алгоритм обработки изображения на основе преследования базиса по когерентным структурам содержит следующую последовательность шагов.

1. Инициализация алгоритма начинается с установки $Y_M = Y$, $l = 1$.

2. Выполняется вейвлет-преобразование (2) над изображением Y по базису β^l и формируется массив вейвлет-коэффициентов W_Y .

3. Все вейвлет-коэффициенты w_{Y_i} , $i = \overline{1, I}$, сортируются по убыванию их абсолютных значений. Находится аппроксимация кривой спада сортированных вейвлет-коэффициентов (не обязательно, опционально).

4. В зависимости от величины R_C производится распределение квоты бит по одному из двух вариантов кодирования (на низких или высоких скоростях). Если аппроксимация кривой спада упорядоченных вейвлет-коэффициентов получена на предыдущем шаге, то рассчитывается теоретическая дисперсия ошибки квантования. Если аппроксимация кривой спада не определена, тогда вычисляется фактическая дисперсия ошибки квантования.

5. Составляется вогнутая функция стоимости Шура (14) и вычисляется ее значение.

6. Если библиотека базисов не исчерпана, то есть $\iota < L$, то $\iota = \iota + 1$ и переход к п.2. В противном случае переход к п.7.

7. Наилучший базис β^α является минимумом функции стоимости Шура $\tilde{N}(\beta^\alpha) = \min \tilde{N}(\beta^l)$. Вейвлет-коэффициенты, полученные по наилучшему базису, автоматически сохраняются в буферной памяти и извлекаются оттуда для следующего шага.

8. Производится отделение когерентных структур алгоритмами по поиску оценки M числа значимых вейвлет-коэффициентов, описанных в предыдущем разделе. Вычисляются оценки значимых вейвлет-коэффициентов каким-либо способом пороговой обработки (грубой или мягкой) с учетом квантования, которые сохраняются в буферной памяти.

9. Если $M=0$, то останов алгоритма. В противном случае выполняется обратное вейвлет-преобразование над отброшенными (незначимыми) вейвлет-коэффициентами, формируется остаток Y_M , корректируется квота бит и осуществляется переход к п.2.

Таким образом, в результате работы алгоритма в буферной памяти остаются несколько множеств квантованных оценок вейвлет-коэффициентов, соответствующих набору «лучших» базисов из библиотеки Λ . Эти коэффициенты кодируются либо кодом постоянной, либо переменной длины в зависимости от величины R_C .

Для восстановления изображения необходимо найти сумму изображений, полученных после обратного вейвлет-преобразования с соответствующими базисами над

множествами квантованных оценок вейвлет-коэффициентов после декодирования.

Результаты моделирования. Чтобы продемонстрировать эффективность алгоритма при ограниченности объема статьи, ниже приводятся результаты, полученные для относительно «слабой», но «быстрой» библиотеки базисов, построенной из 36 типов вейвлетов различных семейств, содержащихся в среде Matlab, а также вейвлетов CDF 9.7, LeGall 5.3 и Coiflet 22.14. Библиотеки базисов на основе пакетного разложения дают блестящие результаты, но требуют больше времени на вычисления. Моделирование зашумленного изображения Lena (рис.2) проводилось при разных интенсивностях шумов и низких скоростях кодирования для грубой пороговой обработки вейвлет-коэффициентов. Обработанные пакетным алгоритмом SPIHT [1-3] и предложенным алгоритмом изображения помещены на рис.5 и рис.6 соответственно. В результате экспериментов вычислялись СКО и пиковое отношение сигнал/шум (ПОСШ), изменения которых по итерациям соответственно показаны на рис.7 и рис.8. Последовательность выбора базиса иллюстрируется табл.1. Из табл.1 и рис.8, 9 видно, что сходимость достигается на 15-й итерации при $M=36$. Достигнутое СКО составило 38,45 против 270,27, рассчитанное при сжатии данного изображения пакетным алгоритмом SPIHT. Величина ПОСШ составила 32,4 дБ против 22,5 дБ у SPIHT. Из рис.5 и рис.6 видно, что искажения оригинала изображения, обработанного по SPIHT, значительно сильнее, чем искажения при обработке предложенным алгоритмом при скорости 0,2 бит/пиксель, на которой все кодеки, как показано в [5], обеспечивают наилучшее шумоподавление у искаженного изображения.

Кроме того, при разных интенсивностях шумов было проведено моделирование для ряда тестовых изображений и сравнение с другими методами кодирования. Результаты моделирования, помещенные в табл.2, показывают преимущество предложенного алгоритма по сравнению с известными алгоритмами кодирования по СКО и ПОСШ для изображений разных классов при 0,2 бит/пиксель. Из табл.2 видно, что для сильно текстурированных изображений (типа Lena и Goldhill) предложенный метод сжатия обеспечивает значительный выигрыш по СКО и ПОСШ по сравнению с методами JPEG и вейвлет-пакетным методом SPIHT. Однако для изображений с большим числом однородных текстур, например для изображения самолета F16, предложенный метод лишь немного выигрывает у пакетного SPIHT.



Рис.5. Обработанное пакетным SPIHT изображение Lena при $\sigma_{ш} = 30$, 0,2 бит/пиксель, $Q=3$.



Рис.6. Обработанное предложенным алгоритмом изображение Lena при $\sigma_{ш} = 30$; 0,2 бит/пиксель, $Q=3$.

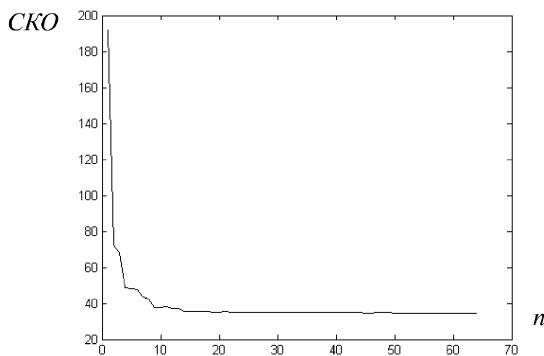


Рис.7. Изменение СКО по итерациям.

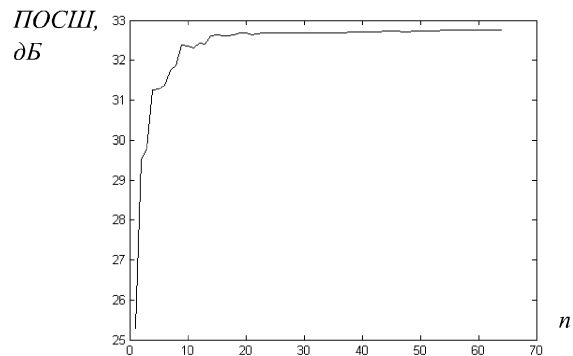


Рис.8. Изменение ПОСШ по итерациям.

Таблица 1.

Номера итераций	1, 5, 7	3, 4, 6, 8-11, 13, 14, 16-36	12	2	15
Название базиса	bior3.5	bior3.9	bior2.2	db6	db3

Таблица 2.

Метод сжатия	JPEG		SPIHT		Преследование базиса		
	СКО	ПОСШ, дБ	СКО	ПОСШ, дБ	СКО	ПОСШ, дБ	
«Лена» (Lena)							
$\sigma_{ш}$	10	96,52	24,56	85,43	27,63	16,78	32,85
	20	285,34	21,67	116,38	25,47	21,13	32,67
	30	390,56	18,32	270,27	22,52	38,45	32,41
«Золотой холм» (Goldhill)							
$\sigma_{ш}$	10	112,87	23,47	92,23	27,12	23,64	30,04
	20	312,45	19,34	135,58	24,12	68,34	28,57
	30	560,34	15,73	310,32	21,57	107,35	25,23
«F16g»							
$\sigma_{ш}$	10	87,33	26,87	26,57	31,93	15,34	32,8
	20	215,34	23,52	86,41	27,44	79,32	28,35
	30	456,24	17,88	176,35	25,67	84,23	25,34

Заключение

Данный алгоритм сжатия зашумленного изображения, как показали проведенные исследования, обладает достаточной эффективностью даже при относительно небольшой и «примитивной» библиотеке базисов. Наилучшие результаты следует ожидать при использовании вейвлет-пакетных и локально-косинусных словарей. Данное обстоятельство приводит к увеличению вычислительных и временных затрат, несмотря на быструю сходимость, продемонстрированную в примере. Таким образом, предложенный подход можно рекомендовать для приложений, связанных с архивацией зашумленных изображений различных классов в базах данных.

Литература

1. С.Малла. Вейвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005.
2. Р.Гонсалес, Р.Вудс. Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2006.
3. В.И.Воробьев, В.Г.Грибунин. Теория и практика вейвлет-преобразования. С.-Петербург, ВУС, 1999.
4. S.G.Chang, B.Yu, M.Vetterli, "Adaptive wavelet thresholding for image de-noising and compression", *IEEE Trans. on Image Processing*, Vol. 9, No. 9, 2000, pp.1532-1546.
5. O.-K. Al-Shaykh, R.M.Mercereau, "Lossy Compression of Noisy images", *IEEE Trans. on Image Processing*, Vol.7, Nr.12, 1998, pp.1641-1652.

6. M.L. Mittal, V.K.Singh, R. Krishnan, "Wavelet Transform based Technique for Speckle Noise Suppression and Data Compression for SAR Images". *Proc. of the Fifth International Symposium on Signal Processing and Applications*, 1999, pp. 781-784.
7. D.Wei, J.E.Odegard, H. Guo, M. Lang, C.S.Burrus, "Simultaneous Noise Reduction and SAR Image Data Compression Using best Wavelet Packet Basis", *Proceedings of International Conference on Image Processing*, Vol. 3, 1995, pp. 200-203.
8. Ю.С.Бехтин. Поиск оптимального распределения бит при сжатии данных зашумленных изображений на основе вейвлет-преобразования. *Цифровая обработка сигналов*, № 1, апрель, 2007. 10 с.
9. N. Saito, "Simultaneous Noise Suppression and Signal Compression using a Library of Orthonormal Bases and the Minimum Description Length Criterion." In *Wavelets in Geophysics*, E.Foufoula-Georgiou, P. Kumar, Eds. New York: Academic Press, 1994, pp. 299-324.
10. D.Donoho, I.Johnstone, "Ideal De-noising in an Orthonormal Basis chosen from a Library of Bases", *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 319, 1994. pp. 1317-1322.
11. J.Berger, R.Coifman, and M.Goldberg, "Removing Noise from Music using Local Trigonometric bases and Wavelet Packets", *J. Audio Eng. Sci.*, 42(10), 1994. pp. 808-818.
12. S.Mallat and F.Falzon, "Analysis of low bit rate image transform coding", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol.46, no. 4, pp.1027-1042, Apr. 1998.