

УДК: 621.391

АЛГОРИТМ СИНТЕЗА БАЗИСА ОРТОНОРМИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ МНОГОКАНАЛЬНОЙ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ

Батенков А.А., Богачев Г.В., Батенков К.А.

Введение

Тенденции развития современных систем передачи информации предполагают переход к цифровым методам ее обработки. Это вызвано рядом причин. Основным преимуществом такого подхода является легкость восстановления точной копии передаваемого сигнала вследствие его избыточности. Цифровое программное обеспечение допускает более гибкую реализацию по сравнению с аналоговым [1]. Кроме того, наиболее разработанной частью общей теории связи является теория передачи дискретных сообщений [2].

Тем не менее, основой остается аналоговый канал связи, содержащий бесконечное число измерений. Если для передачи информации используется конечное число линейно независимых сигналов, каждому из которых соответствует свой подканал, то общая модель канала связи может быть представлена как параллельное соединение нескольких подканалов.

В целях передачи максимально возможного количества информации каждый такой подканал должен быть линейно независим от других. Это связано с необходимостью как можно точнее различать сигналы отдельных подканалов [3]. Кроме того, задачи обнаружения решаются значительно проще, если рассматриваются в координатной системе, где случайные величины не коррелированы [4].

Наиболее удобным для применения классом линейно независимых сигналов являются ортонормированные функции, получить которые возможно с помощью процесса ортогонализации Грама-Шмидта [5]. Представление сигналов посредством обобщенного ряда Фурье в выбранном базисе позволяет с необходимой точностью воспроизводить исходные сигналы посредством относительно несложных преобразований. Предпочтитель-

Предложена модель непрерывного канала связи, учитывающая ограничения как на частотный и энергетический ресурсы, так и на время передачи информации. В рамках этой модели показано появление дополнительных шумов на входе приемника. Доказана возможность их устранения путем синтезирования систем базисных функций на входе и выходе канала связи, представляющих собой линейную комбинацию произвольной системы ортонормированных функций и их свертки с импульсной характеристикой соответственно.

ность ортонормированных функций объясняется отсутствием переходных помех при выделении подканалов путем вычисления коэффициентов обобщенного ряда Фурье [6].

Согласно аппаратной реализации ортогонального разложения сигналов [6], типовая схема канала связи с использованием базиса ортонормированных функций изображена на рис.1.

Сигнал на входе аналогового канала представляется обобщенным рядом Фурье:

$$X(\tau) = \sum_{i=1}^{N_b} x_i \cdot \varphi_i(\tau), \quad (1)$$

где N_b – число подканалов;

$x_i, i = \overline{1, N_b}$ – координаты точки сигнального созвездия;

$\varphi_i(\tau)$ – i -ая базисная функция на входе канала.

Координаты точки на выходе канала связи определяются как скалярное произведение сигнала на выходе аналогового канала $X'(t)$ и i -ой базисной функции на выходе канала $\varphi'_i(t)$:

$$x'_i = \int_i X'(t) \cdot \varphi'_i(t) dt, \quad i = \overline{1, N_b}. \quad (2)$$

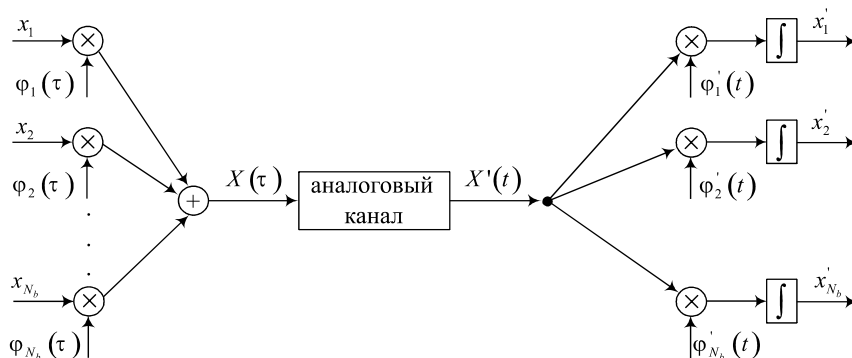


Рис.1. Модель канала связи с использованием базиса ортонормированных функций.

Постановка задачи

Рассмотрим канал связи с аддитивным белым гауссовским шумом. Сигнал на его выходе задается выражением [3]:

$$X'(t) = \int X(\tau)h(t, \tau)d\tau + n(t), \quad (3)$$

где $h(t, \tau)$ – импульсная характеристика аналогового канала (в общем случае нестационарного), $n(t)$ – белый гауссовский шум.

Наряду с ограничениями на энергетический и частотный ресурсы присутствует и лимит на временные затраты, не учитываемый требованиями к характеристике канала связи. Поэтому целесообразно представить импульсную характеристику аналогового канала в виде:

$$h(t, \tau) = q(\tau)h_a(t - \tau)q'(t), \quad (4)$$

где $q(\tau)$ – оконная функция [7] на входе канала; $h_a(t - \tau)$ – импульсная характеристика линейной системы модели канала; $q'(t)$ – оконная функция на выходе канала.

Необходимо отметить, что в результате такого преобразования исходный аналоговый канал перестает быть инвариантным, и его спектральные характеристики будут изменяться во времени.

Определим величину взаимной энергии (шумов неортогональности [8] в случае, если $i \neq j$) между сигналами подканалов на выходе канала связи:

$$E_{i,j} = M\{x_i' \cdot x_j'\}, \quad i, j = \overline{1, N_b}, \quad (5)$$

где $M\{x\}$ – математическое ожидание случайной величины x .

Входные и выходные базисные функции однозначно связаны между собой [9]:

$$\varphi_i'(t) = \alpha_i \int h(t, \tau) \cdot \varphi_i(\tau) d\tau, \quad i = \overline{1, N_b}, \quad (6)$$

где α_i^{-2} – энергия i -ой базисной функции на выходе канала.

Подставив (1) в (3), координаты точек выхода выразим в виде:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{N_b} \frac{x_j}{\alpha_j} \int \varphi_j'(t) \cdot \varphi_i'(t) dt + \int n(t) \cdot \varphi_i'(t) dt, \quad i = \overline{1, N_b}. \quad (7)$$

Тогда, учитывая независимость x_i и гауссовского шума, а также его нулевое математическое ожидание, взаимная энергия определяется формулой:

$$E_{i,j} = M \left\{ \sum_{k=1}^{N_b} \frac{x_k}{\alpha_k} \int \varphi_k'(t) \cdot \varphi_i'(t) dt \times \right. \\ \left. \times \sum_{p=1}^{N_b} \frac{x_p}{\alpha_p} \int \varphi_p'(t_1) \cdot \varphi_j'(t_1) dt_1 \right. \\ \left. + \sigma^2 \int \varphi_i'(t) \cdot \varphi_j'(t) dt \right\} \quad (8)$$

где σ^2 – дисперсия гауссовского шума.

Рассматриваемые сигналы различных подканалов x_j можно предполагать независимыми, т.к. почти во всех современных модемах применяется скремблиро-

вание, практически полностью устраняющее переходные помехи. Поэтому (8) преобразуется к виду:

$$E_{i,j} = \sum_{k=1}^{N_b} \frac{M\{x_k^2\}}{\alpha_k^2} \int \varphi_k'(t) \cdot \varphi_i'(t) dt \times \\ \times \int \varphi_k'(t_1) \cdot \varphi_j'(t_1) dt_1 + \sigma^2 \int \varphi_i'(t) \cdot \varphi_j'(t) dt \quad (9)$$

В идеальном случае, когда базисные функции входа и выхода ортонормированны, подканалы являются некоррелированными, а в случае гауссовского шума еще и независимыми [4]. Однако в используемых системах передачи информации это условие для выходных функций зачастую не выполняется.

Для подтверждения этого факта исследуем прохождение сигналов через канал связи тональной частоты, остаточное затухание которого изображено на рис.2, в отсутствие аддитивного шума. Предполагается, что подканалы на входе независимы и $M\{x_i^2\} = 1, i = \overline{1, N_b}$. Оконные функции зависят от скорости модуляции V_k и имеют форму видеоимпульсов:

$$q(t) = q'(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, V_k^{-1}] \\ 0, & t \notin [0, V_k^{-1}] \end{cases}. \quad (10)$$

При этом в качестве базисных функций входа и выхода используются несущие колебания протоколов модуляции для коммутируемых линий [10].

Относительная величина шумов неортогональности выражается как:

$$E_m = \frac{\sum_{i=1}^{N_b} \sum_{j=1}^{N_b} |E_{i,j}|}{\sum_{i=1}^{N_b} \sum_{j=1}^{N_b} |E_{i,j}|}. \quad (11)$$

Результаты вычислений согласно (9) и (11) приведены на рис.3. Протоколы, использующие частотную модуляцию (V.21, V.22, V.23, PEP, TurboPEP), оказываются наименее эффективными с точки зрения шумов неортогональности. Это вызвано наличием более двух несущих, разнесенных по частоте. Взаимная энергия между подканалами при фазовой модуляции (V.26, V.27) близка к нулю, поскольку несущих всего две, а скорость модуляции мала. Переход к квадратурной амплитудной модуляции (V.29, V.32, V.33, V.34, HST, ZyX) не изменяет структуру системы несущих, но увеличивает скорость модуляции, а следовательно, и возрастают шумы.

При обработке информации на выходе дискретного канала связи (даже в отсутствии канальных помех) будут присутствовать шумы неортогональности, снижающие характеристики приемника. Согласовав структуру системы базисных функций входа и выхода со статистическими и частотными характеристиками канала связи, можно добиться уменьшения негативного воздействия переходных помех, а в идеальном случае их полностью устранить.

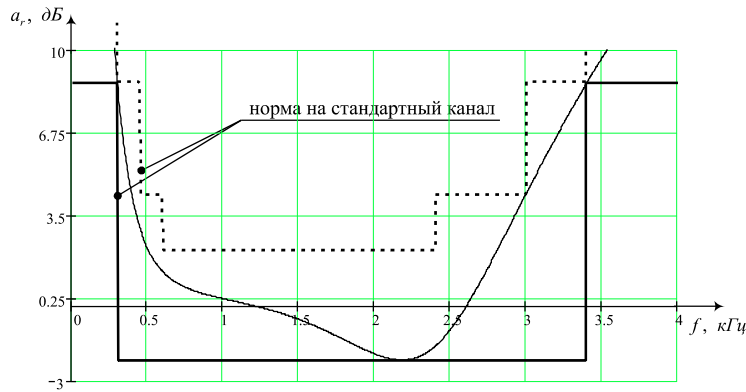


Рис.2. Зависимость остаточного затухания a_r исследуемого канала от частоты f

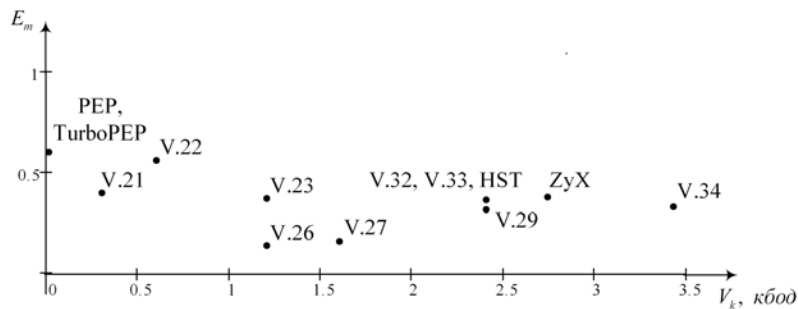


Рис.3. Относительная величина шумов неортогональности для различных протоколов модуляции

Отсутствие шумов неортогональности подразумевает выполнение равенства:

$$E'_{i,j} = \beta_i \cdot \delta_{i,j}, \quad i, j = \overline{1, N_b}, \quad (12)$$

где β_i – смесь дисперсий i -го подканала и аддитивного шума на выходе;
 $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

Для соблюдения (12) необходимо, согласно (9), обеспечить как минимум ортогональность функции $\varphi'_i(t)$ между собой [4], а с целью простоты использования – их ортонормированность:

$$\int_i \varphi'_i(t) \cdot \varphi'_j(t) dt = \delta_{i,j}, \quad i, j = \overline{1, N_b}. \quad (13)$$

Тогда:

$$\beta_i = \frac{M\{x_i^2\}}{\alpha_i^2} + \sigma^2. \quad (14)$$

Первое слагаемое как в (14), так и в (8) при $i = j$ представляет собой отношение энергии передаваемого сигнала по i -му подканалу к величине его ослабления и соответствует энергии полезного сигнала в подканале на приеме. Различие состоит в том, что в первом случае наложено ограничение на ортонормированность базисных функций.

Наиболее предпочтительно оценивать помехоустойчивость системы передачи информации, использующей непрерывные по уровню сигналы, отношением средних мощностей полезного сигнала и шума [3]. Поэтому эффективная система должна не только удовлетворять требованию отсутствия шумов неортогональности, но и

достигать максимально возможного отношения энергии полезного сигнала к дисперсии аддитивного шума.

На основании вышесказанного целесообразно сформулировать следующие оптимизационные задачи:

$$\frac{M\{x_i^2\}}{\alpha_i^2 \cdot \sigma^2} \rightarrow \max_{\varphi_i(t)}, \quad i = \overline{1, N_b}, \quad (15)$$

при ограничениях (13) и (6). Их можно классифицировать как задачи с нелинейной целевой функцией при наличии нелинейных ограничений в виде равенств.

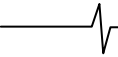
Решение оптимизационной задачи

Поскольку энергии сигнала на входе для любого i -го подканала и дисперсия шума не зависят от структуры базисных функций, то, предполагая их отличными от нуля, можно преобразовать целевую функцию (15) и рассматривать максимизацию только α_i^{-2} . Необходимо учесть и то, что если несущие входа можно задавать произвольным образом, накладывая ограничение только на их ортонормированность, то выходные должны к тому же удовлетворять (6). Подставляя вместо правой части (9) выражение (12), а в левой представляя с помощью (6) первое слагаемое через входные функции, на основании (13) и (14) уравнение (9) преобразуется к виду:

$$\lambda_i \cdot \delta_{i,j} = \int_i \varphi_i(t) \int_{\tau} R(t, \tau) \cdot \varphi_j(\tau) d\tau, \quad (16)$$

где $\lambda_i = \alpha_i^{-2}$ и

$$R(t, \tau) = \int_{\tau'} h(\tau', t) h(\tau', \tau) d\tau'. \quad (17)$$



Таким образом, максимизация целевой функции (15) для любого i эквивалентна поиску структуры системы базисных функций входа, максимизирующей функционал (16) при $i = j$. Значит, задачи оптимизации интерпретируются к виду:

$$\int_i \varphi_i(t) \int_{\tau} R(t, \tau) \cdot \varphi_i(\tau) d\tau \rightarrow \max_{\varphi_i(\tau)}, i = \overline{1, N_b}, \quad (18)$$

$$\int_i \varphi_i(t) \int_{\tau} R(t, \tau) \cdot \varphi_j(\tau) d\tau = 0, i \neq j, \quad (19)$$

$$\int_i \varphi_i(t) \cdot \varphi_j(t) dt = \delta_{i,j}, i, j = \overline{1, N_b}. \quad (20)$$

Их также можно классифицировать как задачи с нелинейной целевой функцией и нелинейными ограничениями в виде равенств. Целевой функционал (18) определяет энергию полезного сигнала на выходе i -го подканала. Ограничения (19) обеспечивают ортогональность выходных, а (20) – ортонормированность входных базисных функций. Решение этих задач уже не зависят от мощности шума в канале и энергии сигнала на входе. Кроме того, максимизация производится по базисным функциям входа, задание которых может быть в достаточной мере произвольным.

Данные задачи эквиваленты достаточно часто встречающейся в математике и физике [9] задаче поиска множества собственных чисел λ_i и собственных функций $\varphi_i(t)$, которые удовлетворяют интегральному уравнению Фредгольма второго рода:

$$\lambda_i \varphi_i(t) = \int_{\tau} R(t, \tau) \cdot \varphi_i(\tau) d\tau, i = \overline{1, N_b}. \quad (21)$$

В общем виде его решение не существует [11]. Есть лишь частные случаи при задании определенной формы ядра $R(t, \tau)$ [4,9]. В связи с этим при поиске множества ортонормированных функций целесообразно использовать приближенные методы. Анализ многочисленных источников показал, что наиболее предпочтительным является метод сведения ядра к вырожденному [12]. При этом задача сводится к решению системы алгебраических уравнений, причем с увеличением их количества растет точность решения исходного интегрального уравнения.

В качестве вырожденного ядра $R_{N_y}(t, \tau)$ рационально использовать частичную сумму ряда Фурье ядра $R(t, \tau)$ по некоторой системе ортонормированных функций $\psi_i(t)$, $i = \overline{1, N_y}$. Следующее утверждение поясняет подобный выбор: **существует система ортонормированных функций, сохраняющая свойство ортогональности после прохождения канала связи с аддитивным гауссовским шумом и представляющая собой линейную комбинацию произвольной системы функций, ортонормированных на интервале, где импульсная характеристика этого канала отлична от нуля.**

Рассмотрим произвольную системы ортонормированных функций $\psi_{N_y}(t) = (\psi_1(t) \psi_2(t) \dots \psi_{N_y}(t))$, для которой:

$$\int_i \overline{\psi_{N_y}(t)} \cdot \overline{\psi_{N_y}(t)}^T dt = \vec{I}_{N_y}, \quad (22)$$

где T – оператор транспонирования; N_y – общее число функций в системе. \vec{I}_N – единичная матрица размером $N \times N$.

Вектор коэффициентов

$$\overline{M}_{N_y}(\tau) = (M_1(\tau) M_2(\tau) \dots M_{N_y}(\tau))^T$$

обобщенно го ряда Фурье ядра, заданного импульсной характеристикой канала связи согласно (17), по системе ортонормированных функций (22) выражается в виде [5, 13]

$$\overline{M}_{N_y}(\tau) = \int_i R(t, \tau) \cdot \overline{\psi_{N_y}(t)} dt. \quad (23)$$

С целью получения ненулевых коэффициентов (23) необходимо, чтобы интервал ортогональности T_h функций (22) включал интервал, где ядро $R(t, \tau)$ по переменной t отлично от нуля [5]. Значит, согласно (17) T_h – интервал, где импульсная характеристика канала (4) по τ не равна нулю.

В этом случае ядро можно представить как сумму бесконечного числа произведений коэффициентов разложения и базисных функций (для общности обозначений введен символ ∞):

$$R(t, \tau) = R_{\infty}(t, \tau) = \overline{M}_{\infty}(\tau)^T \cdot \overline{\psi}_{\infty}(t). \quad (24)$$

Тогда усеченное ядро $R_{N_y}(t, \tau)$ будет конечной суммой N_y слагаемых выражения (24). Система собственных функций $\tilde{\varphi}_i(\tau)$, $i = \overline{1, N_y}$ для этого ядра определяется решением интегрального уравнения Фредгольма второго рода [11]:

$$\tilde{\lambda}_i \tilde{\varphi}_i(t) = \int_{\tau} R_{N_y}(t, \tau) \cdot \tilde{\varphi}_i(\tau) d\tau, i = \overline{1, N_b} \quad (25)$$

где $\tilde{\lambda}_i$ – собственные числа интегрального уравнения (25), и к тому же является приближенным решением (21), т.к.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_N(t, \tau) = R(t, \tau).$$

Подстановка вырожденного [11] (усеченного по числу слагаемых) ядра в виде (24) преобразует (25) к выражению:

$$\tilde{\lambda}_i \tilde{\varphi}_i(t) = \overline{\psi}_{N_y}(t)^T \int_{\tau} \overline{M}_{N_y}(\tau) \cdot \tilde{\varphi}_i(\tau) d\tau. \quad (26)$$

Обозначим вектор в подынтегральном выражении как:

$$\overline{C}_i = \int_{\tau} \overline{M}_{N_y}(\tau) \cdot \tilde{\varphi}_i(\tau) d\tau. \quad (27)$$

Тогда приближенная система собственных функций ядра $R(t, \tau)$ задается в виде:

$$\tilde{\varphi}_i(t) = \frac{1}{\tilde{\lambda}_i} \overline{\psi}_{N_y}(t)^T \overline{C}_i. \quad (28)$$

Замена в (27) последнего множителя выражением (28) приводит к уравнению:

$$\tilde{\lambda}_i \overline{C}_i = \int_{\tau} \overline{M}_{N_y}(\tau) \cdot \overline{\psi}_{N_y}(\tau)^T d\tau \cdot \overline{C}_i, \quad (29)$$

которое является формулировкой задачи [14] на поиск собственных чисел $\tilde{\lambda}_i$ и векторов \overline{C}_i матрицы приближения:

$$\overline{P} = \int_{\tau} \overline{M}_{N_y}(\tau) \cdot \overline{\psi}_{N_y}(\tau)^T d\tau. \quad (30)$$

После нормировки собственных функций (28) ортонормированный базис представляется как линейная комбинация:

$$\tilde{\varphi}_i^N(t) = \bar{\psi}_{N_y}(t)^T \bar{C}_i. \quad (31)$$

Рассмотрим прохождение приближенной системы ортонормированных функций (31) по каналу связи с заданной импульсной характеристикой $h(t, \tau)$. Сигнал на выходе определяется выражением:

$$\tilde{\varphi}_i^*(t) = \int_t h(t, \tau) \cdot \tilde{\varphi}_i^N(\tau) dt, \quad i = \overline{1, N_y}. \quad (32)$$

Тогда взаимная энергия системы функций $\tilde{\varphi}_i^*(t)$:

$$E_{i,j}^* = \int_t \tilde{\varphi}_i^*(t) \cdot \tilde{\varphi}_j^*(t) dt, \quad i, j = \overline{1, N_y}. \quad (33)$$

Подставив в (33) выражений (32) и (17), получим:

$$E_{i,j}^* = \int_t \tilde{\varphi}_i^N(t) \cdot \int_\tau \tilde{\varphi}_j^N(\tau) R(t, \tau) d\tau dt. \quad (34)$$

Используя (31) и (24), (34) преобразуем к виду:

$$E_{i,j}^* = \int_\tau \bar{C}_j^T \cdot \bar{\psi}_{N_y}(\tau) \cdot \bar{C}_i^T \int_t \bar{\psi}_{N_y}(t) \bar{\psi}_\infty(t)^T dt \cdot \bar{M}_\infty(\tau) d\tau \quad (35)$$

Условие ортогональности (22) и перегруппировка множителей позволяет перейти к следующему уравнению:

$$E_{i,j}^* = \bar{C}_j^T \cdot \int_t \bar{\psi}_{N_y}(\tau) \bar{M}_{N_y}(\tau)^T d\tau \cdot \bar{C}_i. \quad (36)$$

Интеграл представляет собой матрицу (30). Согласно (29), взаимная энергия определяется скалярным произведением соответствующих собственных векторов этой матрицы:

$$E_{i,j}^* = \tilde{\lambda}_i \cdot \bar{C}_j^T \cdot \bar{C}_i. \quad (37)$$

Учитывая их свойство ортонормированности [15], получим, что взаимная энергия приближенной системы ортонормированных функций отлична от нуля только при $i = j$:

$$E_{i,j}^* = \tilde{\lambda}_i \delta_{i,j}, \quad (38)$$

что подразумевает ее ортогональность. Чем и завершается доказательство сформулированного утверждения.

Таким образом, выбор подобного вырожденного ядра позволит найти приближенное решение интегрального уравнения (21). При этом потери из-за неточности определения системы собственных функций заключаются в неполном использовании энергетики канала связи, а шумы неортогональности отсутствуют при любой точности решения. Это вытекает из следующих соображений.

На основании (17) и (23) матрица (30) преобразуется к виду:

$$\bar{P} = \int_{\tau'} \left[\int_t h(\tau', t) \cdot \bar{\psi}_{N_y}(t) dt \cdot \int_\tau h(\tau', \tau) \cdot \bar{\psi}_{N_y}(\tau)^T d\tau \right] d\tau' \quad (39)$$

Следовательно, элементы ее главной диагонали являются неотрицательными. Согласно [14] след любой матрицы равен сумме ее собственных чисел. Поэтому сумма собственных чисел при переходе к системе с

большим количеством ортонормированных функций (22) не может уменьшаться. Исходя из физического смысла собственных чисел, – суммарная энергия приближенных собственных функций на выходе канала связи растет при увеличении точности аппроксимации ядра $R(t, \tau)$, т.е. выполняется неравенство:

$$\sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_i \leq \sum_{i=1}^\infty \lambda_i, \quad 0 \leq n \leq N_y, \quad (40)$$

причем равенство возможно при $N_y \rightarrow \infty$.

Согласно [9]:

$$\sum_{i=1}^{N_y} \tilde{\lambda}_i = \iint_{t \tau} h_{N_y}^2(t, \tau) d\tau dt, \quad (41)$$

где аппроксимированная импульсная характеристика определяется выражением:

$$h_{N_y}(t, \tau) = \int_t h(t, \tau) \cdot \bar{\psi}_{N_y}(t)^T dt \cdot \bar{\psi}_{N_y}(\tau). \quad (42)$$

Поскольку число используемых несущих N_b не может быть больше количества функций рассматриваемого базиса N_y , то верхняя граница относительного проигрыша в энергетике вследствие приближенного вычисления собственных функций определяется в виде:

$$\delta_h(N_y) = 1 - \frac{\iint_{t \tau} h_{N_y}^2(t, \tau) d\tau dt}{\iint_{t \tau} h^2(t, \tau) d\tau dt}. \quad (43)$$

Таким образом, задачи (18), (19), (20) сводятся к нахождению собственных чисел и функций матрицы (30).

Для определения собственных чисел необходимо найти корни характеристического уравнения [11,15]:

$$\left| \bar{P} - \tilde{\lambda} \cdot I_{N_y} \right| = 0, \quad (44)$$

где $|\bar{A}|$ – определитель матрицы \bar{A} .

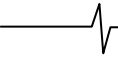
В общем виде решения данного уравнения не существует [14,15]. Применение численных методов также затруднено вследствие трудоемкости вычисления определителя. Поэтому желательно (44) представить в виде алгебраического уравнения степени N_y с неизвестным $\tilde{\lambda}$:

$$f_1^v(\tilde{\lambda}) = \sum_{i=0}^{N_y} a_i^P \cdot \tilde{\lambda}^i = 0, \quad (45)$$

где a_i^P – i -ый коэффициент характеристического уравнения.

Наиболее предпочтительным методом определения a_i^P является метод Крылова [15], т.к. не требует решений вспомогательных систем уравнений и число вычисляемых определителей не больше порядка (45).

Не смотря на то, что полученное уравнение также в общем виде не имеет решения [5], его корни можно найти с помощью численных методов, не требующих больших вычислительных затрат. Основная сложность заключается в не разработанности итерационных процедур поиска всех возможных корней и зависимости получающегося решения от задания начальной точки. Поэтому целесообразно разбить процесс поиска на N_y этапов, результатом которых является один из корней (45).



Начальной точкой первого этапа должно служить допустимое значение на границе диапазона, например (согласно свойства неотрицательности собственных чисел ядра $R_{N_y}(t, \tau)$ [9]):

$$\tilde{\lambda}_1^1 = \int \int_{i \tau} h_{N_y}^2(t, \tau) d\tau dt, \quad (46)$$

где $\tilde{\lambda}_j^i$ – j -ый корень (j -ый этап) на i -ой итерации.

Для исключения повторяемости корней необходимо в конце каждого этапа делить многочлен $f_j^v(\tilde{\lambda})$ на разность между его аргументом и полученным корнем $\tilde{\lambda}_j$. Значит, в конце j -го этапа характеристическое уравнение представимо в виде алгебраического степени $N_y - j$:

$$f_{j+1}^v(\tilde{\lambda}) = \frac{\sum_{i=0}^{N_y} a_i^p \cdot \tilde{\lambda}^i}{\prod_{k=1}^j (\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}_k)} = 0, \quad j = \overline{1, N_y - 1}. \quad (47)$$

Каждый этап представляет собой итерационную процедуру поиска одного из корней (47) (на первом – (45)). Начальная точка на каждом этапе:

$$\tilde{\lambda}_j^1 = k_\lambda \cdot \tilde{\lambda}_{j-1}, \quad j = \overline{2, N_y - 1}, \quad (48)$$

где $0 < k_\lambda < 1$ – некоторый коэффициент.

В этом случае даже, если получаемое решение только приближенно равно корню (45), то функция (47) на следующем этапе в его окрестности будет иметь всплеск, что предотвращает возвращение итерационной процедуры к решению предыдущего этапа.

Поскольку существуют в явном виде производные первого порядка многочленов (45) и (47), то для численного решения уравнений (45) и (47) целесообразно использовать метод Ньютона [16]. На i -ой итерации j -го этапа значения собственных чисел определяются на основе итерационной формулы:

$$\tilde{\lambda}_j^i = \tilde{\lambda}_j^{i-1} - \frac{f_j^v(\tilde{\lambda}_j^{i-1})}{\left. \frac{d[f_j^v(\tilde{\lambda})]}{d\tilde{\lambda}} \right|_{\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_j^{i-1}}}. \quad (49)$$

Результатом выполнения описанных процедур является вектор собственных чисел ядра интегрального уравнения (25), посредством которых вычисляется приближенное максимальное значение целевых функций (15).

Собственные функции матрицы (30) определяются на основе найденных значений собственных чисел, решением системы (29) N_y однородных линейных уравнений с N_y неизвестными [11]. Она имеет неоднозначное решение, поскольку ранг матрицы $\overline{P} - \tilde{\lambda}_i \cdot I_{N_y}$ меньше N_y (ее определитель равен нулю) [5].

Поэтому рассмотрим преобразованные вектора:

$$\overline{C}_i^p = \frac{1}{\overline{C}_{i,1}} \left(\overline{C}_{i,2} \ \overline{C}_{i,3} \ \dots \ \overline{C}_{i,N_y} \right)^T, \quad i = \overline{1, N_y}, \quad (50)$$

где $\overline{C}_{i,j}$ – j -ый элемент вектора \overline{C}_i .

Они определяются решением системы $N_y - 1$ линейных уравнений с $N_y - 1$ неизвестными:

$$\tilde{\lambda}_i \cdot \overline{C}_i^p = \overline{P}_{(1,1)} \cdot \overline{C}_i^p + \overline{P}_{(1,2)}^{(1)}, \quad (51)$$

где $\overline{A}_{(i,j)}$ – матрица, полученная вычеркиванием i -ой строки и j -го столбца матрицы \overline{A} ;

$\overline{A}^{(j)}$ – j -ый столбец матрицы \overline{A} .

Тогда значения преобразованных векторов равны:

$$\overline{C}_i^p = \left(\tilde{\lambda}_i \cdot I_{N_y-1} - \overline{P}_{(1,1)} \right)^{-1} \cdot \overline{P}_{(1,2)}^{(1)}. \quad (52)$$

Учитывая нормировку векторов \overline{C}_i и (52), получим:

$$\overline{C}_{i,1} = \left(\overline{C}_i^{pT} \cdot \overline{C}_i^p + 1 \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (53)$$

Приближенные собственные вектора определяются на основе (50):

$$\overline{C}_i = \left(\left(\overline{C}_i^{pT} \cdot \overline{C}_i^p + 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \left| \overline{C}_{i,1} \cdot \overline{C}_i^{pT} \right. \right)^T, \quad i = \overline{1, N_y}. \quad (54)$$

Таким образом, приближенным решением задачи (18), (19), (20) является совокупность ортонормированных функций, представляющих собой линейную комбинацию ортонормированной системы (22) с коэффициентами (54) и их энергий $\tilde{\lambda}_i$ на выходе канала связи. Еще раз отметим, что с увеличением числа базисных функций разложения (23) растет и точность решения рассмотренной задачи, определяемая (43), а в пределе ему полностью соответствует.

Выбор числа функций $N_b \leq N_y$, используемых при передаче информации, должен осуществляться исходя из требований на отношение сигнал-шум для конкретной системы. А их синтез, согласно решения задачи (18), (19), (20), позволит получить подканалы с максимальной возможной величиной этого отношения.

Алгоритм синтеза базиса ортонормированных функций

На основании вышеизложенного разработан следующий алгоритм синтеза ортонормированного базиса для канала связи с аддитивным белым гауссовским шумом.

Исходные данные:

- импульсная характеристика канала связи – $h(t, \tau)$;
- оконные функции входа и выхода – $q(\tau)$, $q'(t)$;
- требование к верхней границе относительного проигрыша в энергетике – δ_h^t ;
- ортонормированный базис разложения – $\overline{\psi}_{N_y}(t)$;
- коэффициенты k_λ , k_n .

Выходные данные:

- система ортонормированных функций на входе канала $\overline{\varphi}_i^N(t)$, $i = \overline{1, N_y}$;
- система ортонормированных функций на выходе канала $\overline{\varphi}_i'(t)$, $i = \overline{1, N_y}$;
- энергия ортонормированных функций на выходе канала $\tilde{\lambda}_i$, $i = \overline{1, N_y}$.

Алгоритм синтеза:

1. Число базисных функций разложения:

- 1.1. Число базисных функций разложения – $N_y = 1$.
- 1.2. Аппроксимированная импульсная характеристика – (42).

1.3. Верхняя граница относительного проигрыша в энергетике $\delta_h(N_y)$ – (43).

1.4. Если $\delta_h(N_y) \leq \delta'_h$, то переходим к пункту 2 алгоритма.

1.5. Число базисных функций разложения – $N_y = N_y + 1$, переход к пункту 1.2 алгоритма.

2. Матрица приближения:

2.1 Ядро интегрального уравнения – (17).

2.2. Вектор коэффициентов обобщенного ряда Фурье ядра – (23).

2.3. Матрица приближения – (30).

3. Вектор коэффициентов характеристического уравнения (метод Крылова):

3.1. Исходный вектор длиной N_y – $\bar{X} = (1 \ 0 \ \dots \ 0)^T$.

3.2. Матрица Крылова –

$$\bar{A}^K = \begin{pmatrix} \bar{X} & \bar{P}\bar{X} & \bar{P}^2\bar{X} & \dots & \bar{P}^{N_y}\bar{X} \\ 1 & \tilde{\lambda} & \tilde{\lambda}^2 & \dots & \tilde{\lambda}^{N_y} \end{pmatrix}^T.$$

3.3. Коэффициенты характеристического уравнения –

$$a_i^P = \left| \bar{A}^K \langle N_y+1, i \rangle \right|, \quad i = \overline{1, N_y+1}.$$

4. Собственные числа:

4.1. Начальное приближение первого этапа ($j=1$, $i=1$) $\tilde{\lambda}_1^1$ – (46).

4.2. Если $\frac{f_j^v(\tilde{\lambda}_{i-1}^j)}{d[f_j^v(\tilde{\lambda})] \Big|_{\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_{i-1}^j}} < k_n$, то переходим к

пункту 4.4 алгоритма.

4.3. Приближенное значение корня характеристического уравнения на $i+1$ итерации $\tilde{\lambda}_j^i$ – (49), переход к пункту 4.2 алгоритма.

4.4. j -ый корень характеристического уравнения $\tilde{\lambda}_j = \tilde{\lambda}_j^i$.

4.5. Если $j = N_y$, то переход к пункту 5 алгоритма.

4.5. Начальное приближение на $j+1$ этапе – (48), переход к пункту 4.2 алгоритма.

5. Ортонормированный базис:

5.1. Преобразованные вектора – (52).

5.2. Приближенные собственные вектора – (54).

5.3. Ортонормированный базис на входе канала – (31).

5.4. Ортонормированный базис на выходе канала – (6).

Заключение

В работе предложена модель канала связи, учитывающая не только его частотные и энергетические характеристики и аддитивный гауссовский шум, но и ограничение на время использования канала. В рамках этой модели показано наличие дополнительных шумов на входе приемника вследствие неортогональности несущих на выходе канала.

Доказанная возможность синтеза системы функций, ортонормированных на входе и ортогональных на выходе, позволяет получить несущие колебания для пе-

редатчика в виде линейной комбинации произвольного ортонормированного базиса и интеграла свертки этих колебаний с импульсной характеристикой канала для приемника.

На основании этого факта разработан алгоритм синтеза системы ортонормированных функций для канала связи с аддитивным белым гауссовским шумом. Использование этой системы обеспечивает отсутствие шумов неортогональности как на входе, так и на выходе канала связи при соответствующем согласовании системы с характеристиками канала и независимости сигналов на входе отдельных подканалов. Приближенные методы решения уравнений, примененных при разработке, снижают энергию сигналов в подканалах на приеме относительно точного решения. Тем не менее, ошибка будет незначительна при использовании порядка пятидесяти функций разложения и более, в то время как вычислительные затраты существенно снижаются.

Литература

1. Скляр Б. Цифровая связь. Теоритические основы и практическое применение. Изд. 2-е испр.: Пер. с англ.– М.: Вильямс, 2003.– 1104 с.
2. Финк Л.М. Теория передачи дискретных сообщений.– М.: Советское радио, 1970.– 533 с.
3. Теория электрической связи: Учебник для ВУЗов/ Под ред. Д.Д. Кловского – М.: Радио и связь, 1999. – 432 с.
4. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т.1 – М.: Сов. радио, 1972. - 744 с.
5. Корн Г., Корн К. Справочник по математике для научных работников и инженеров.– М.: 1970.– 720 с.
6. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник. – М.: Высш. Школа., 1983.– 536 с.
7. Бакулин М.Г., Крейнделин В.Б., Шумов А.П. Повышение скорости передачи информации и спектральной эффективности беспроводных систем связи // Цифровая обработка сигналов.– 2006.– № 1, с. 2-11.
8. Варакин Л.Е. Системы связи с шумоподобными сигналами.– М.: Радио и связь, 1985.– 384 с.
9. Галлагер Р. Теория информации и надежная связь. Пер. с англ., под ред. М.С. Пинскера и Б.С. Цыбакова. – М.: Советское радио, 1974. – 720 с.
10. Григорьев В.А., Григорьев С.В. Передача сообщений.– СПб.: ВУС, 2002.– 224 с.
11. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения.– 2-е изд. стереот.– М.: Физматлит, 2002.– 160 с.
12. Краснов М.Л. и др. Интегральные уравнения.– М.: Наука, 1968.– 192 с.
13. Линович А.Ю. Применение методов частотно-временной декомпозиции при решении задач обратного моделирования // Цифровая обработка сигналов.– 2005.– № 3, с. 28-37.
14. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ: Пер. с англ.– М.: Мир, 1989.– 655 с.
15. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.– М.: Наука, 1966 – 576 с.
16. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. Пер. с англ., под ред. М.Л. Быховского. – М.: Мир, 1975. – 534 с.