

## РАСЧЕТ БАНКОВ ФИЛЬТРОВ ДИСКРЕТНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И АНАЛИЗ ИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Дворкович В.П., Дворкович А.В.

Несмотря на то, что новое научное направление, связанное с разработкой непрерывных и дискретных вейвлет-преобразований, имеет незначительную временную историю [1-4], эти преобразования нашли широкое применение, в частности, при решении проблем обработки и сжатия статических и динамических изображений [5-8].

При дискретном вейвлет-преобразовании цифровых нестационарных сигналов чаще всего используют так называемые двухполосные фильтры, которые делят сигнал на два уровня – низкочастотную и высокочастотную составляющие. Характеристики этих фильтров обозначены на рис. 1 системными функциями  $H(z)$  и  $G(z)$  соответственно. Далее сигналы прореживаются в два раза и через блок памяти (или кодирования и передачи по кана-

Приводятся расчеты параметров дискретных вейвлет-преобразований путем решения систем нелинейных уравнений и анализируются формы частотных характеристик соответствующих фильтров.

лам связи) поступают на схему синтеза. При восстановлении исходного сигнала между прореженными отсчетами добавляются нулевые отсчеты, и полученные таким образом дискретные отсчеты подаются на восстанавливающие фильтры, характеристики которых обозначены через  $Kh(z)$  и  $Kg(z)$  соответственно. Если отсчеты сигналов при кодировании дополнительно не квантуются, то после суммирования сигналов, возникающих на выходах фильтров  $Kh(z)$  и  $Kg(z)$ , исходный сигнал восстанавливается.

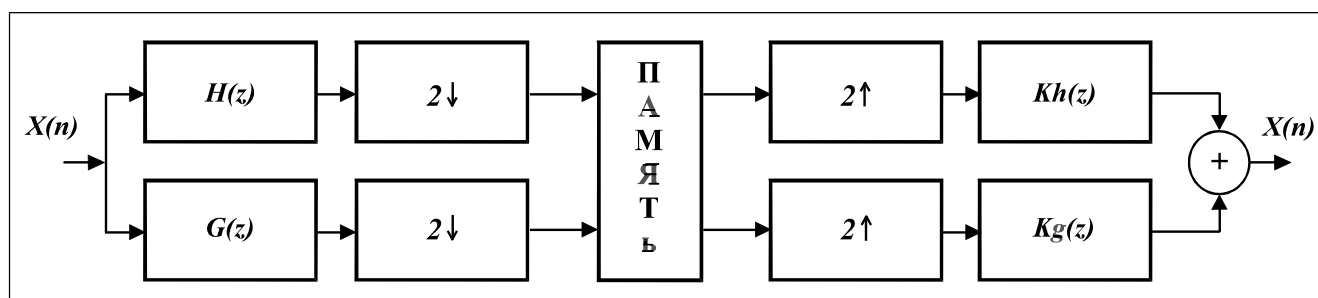


Рис. 1. Структурная схема двухполосного банка фильтров.

Пусть  $Z$ -преобразования двухполосных фильтров определяются соотношениями:

$$H(z) = \sum_{n=-N_1}^{N_2} h_n \cdot Z^{-n}, \quad G(z) = \sum_{n=-M_1}^{M_2} g_m \cdot Z^{-m}, \quad (1)$$

где  $Z = \exp(i\pi x)$ ,  $x = f \cdot T / 2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $T$  – интервал дискретизации.

Для того, чтобы фильтр с системной функцией  $H(z)$  обеспечивал выделение низкочастотной составляющей сигнала (ФНЧ), необходимо выполнение условий:

$$H(0) = \sum_{n=-N_1}^{N_2} h_n = Const \text{ и } H(1) = \sum_{n=-N_1}^{N_2} (-1)^n \cdot h_n = 0. \quad (2)$$

Фильтр с системной функцией  $G(z)$  выделяет высокочастотную составляющую (ФВЧ) при

$$G(0) = \sum_{n=-M_1}^{M_2} g_m = 0 \text{ и } G(1) = \sum_{n=-M_1}^{M_2} (-1)^m \cdot g_m = Const. \quad (3)$$

Если на вход банка фильтров поступает один дискретный отсчет сигнала, изображенный на рис. 2а, то на выходах ФНЧ и ФВЧ формируются сигналы, показанные на рис. 2б и рис. 2в, 2г соответственно

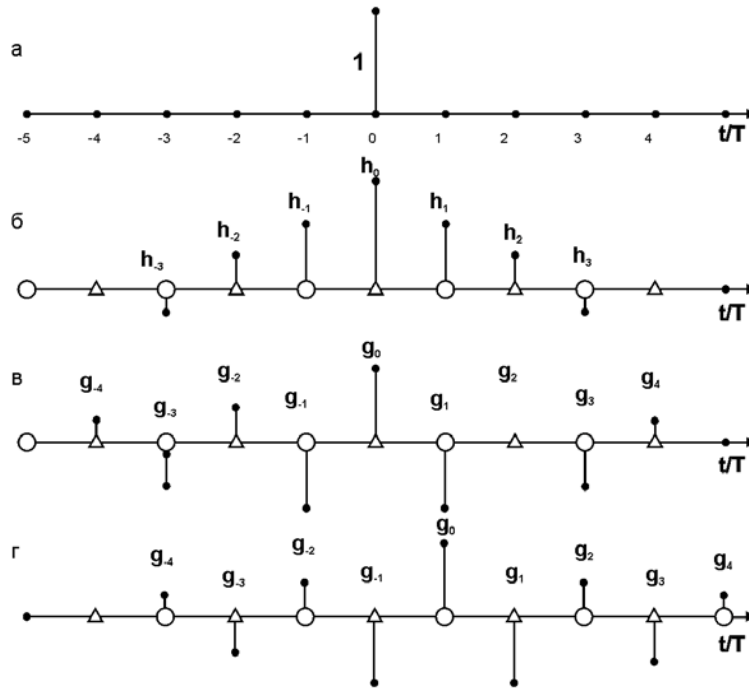


Рис. 2. Реакция низкочастотного (б) и высокочастотного (в, г) фильтров на дискретный отсчет входного сигнала (а).

В зависимости от того, каким образом осуществляется прореживание низкочастотного сигнала, после него выделяется сигнал, отмеченный на рис. 2б либо фигурой  $\Delta$ , либо фигурой  $\bigcirc$ :

$$H_{\Delta}(z) = \sum_{n=[-N_1/2]}^{[N_2/2]} h_{2n} \cdot Z^{-2n} \text{ или}$$

$$H_{\bigcirc}(z) = \sum_{n=[(-N_1+1)/2]}^{[(N_2+1)/2]} h_{2n-1} \cdot Z^{-(2n-1)}. \quad (4)$$

Если прореживание высокочастотного сигнала осуществляется синфазно, как показано на рис. 2в, то выделяются сигналы

$$G_{\Delta}(z) = \sum_{n=[-M_1/2]}^{[M_2/2]} g_{2n} \cdot Z^{-2n} \text{ или}$$

$$G_{\bigcirc}(z) = \sum_{n=[(-M_1+1)/2]}^{[(M_2+1)/2]} g_{2n-1} \cdot Z^{-(2n-1)}. \quad (5)$$

В этом случае входной сигнал будет восстановлен при расчете характеристик восстанавливающих фильтров  $Kh(z)$  и  $Kg(z)$  в соответствии с системой:

$$\begin{cases} H_{\Delta}(z) \cdot Kh(z) + G_{\Delta}(z) \cdot Kg(z) = 1, \\ H_{\bigcirc}(z) \cdot Kh(z) + G_{\bigcirc}(z) \cdot Kg(z) = 1. \end{cases} \quad (6)$$

В случае же, если прореживание высокочастотного сигнала смещено относительно прореживания низкочастотного сигнала на интервал дискретизации, как показано на рис. 2г, то восстановление сигнала будет осуществлено при выполнении условий:

$$\begin{cases} H_{\Delta}(z) \cdot Kh(z) + G_{\bigcirc}(z) \cdot Kg(z) = 1, \\ H_{\bigcirc}(z) \cdot Kh(z) + G_{\Delta}(z) \cdot Kg(z) = 1. \end{cases} \quad (7)$$

Вычитая и суммируя уравнения в соотношениях (6) и (7), можно получить стандартные соотношения [5]:

$$\begin{cases} \bar{H}(z) \cdot Kh(z) \pm \bar{G}(z) \cdot Kg(z) = 0, \\ H(z) \cdot Kh(z) + G(z) \cdot Kg(z) = 2, \end{cases} \quad (8)$$

где  $\bar{H}(z) = \sum_{n=-N_1}^{N_2} (-1)^n \cdot h_n \cdot Z^{-n}$ ,

$$\bar{G}(z) = \sum_{n=-M_1}^{M_2} (-1)^m \cdot g_m \cdot Z^{-m}.$$

Знак «+» в первом уравнении (8) соответствует соотношениям (6), а знак «-» – соотношениям (7).

Используя полученные соотношения, рассчитаем ряд банков КИХ-фильтров с нечетным и четным числом отсчетов цифровой решетки.

**А. КИХ-фильтры с нечетным числом отсчетов цифровой решетки и линейной (нулевой) ФЧХ**

Частотные характеристики таких фильтров, учитывая, что  $h_{-n} = h_n$  и  $g_{-n} = g_n$ , можно представить в виде:

$$H(x) = h_0 + 2 \sum_{n=1}^N h_n \cdot \cos nx, \quad G(x) = g_0 + 2 \sum_{n=1}^M g_m \cdot \cos mx, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$\bar{H}(x) = h_0 + 2 \sum_{n=1}^N (-1)^n \cdot h_n \cdot \cos nx, \quad \bar{G}(x) = g_0 + 2 \sum_{n=1}^M (-1)^m \cdot g_m \cdot \cos mx, \quad (9)$$

$$H(0) = \text{Const}, \quad H(1) = 0, \quad G(1) = \text{Const}, \quad G(0) = 0.$$

Можно показать, что в данном случае восстановление сигнала возможно также с помощью КИХ-фильтров, если используется система уравнений:

$$\begin{cases} \bar{H}(x) \cdot Kh(x) - \bar{G}(x) \cdot Kg(x) = 0, \\ H(x) \cdot Kh(x) + G(x) \cdot Kg(x) = 2, \end{cases} \quad (10)$$

и число  $N + M = 2K + 1$  – нечетное.

Детерминант системы уравнений (10) равен:

$$\begin{aligned} \det(x) &= [h_0 + 2 \sum_{n=1}^N h_n \cdot \cos \pi n x] \cdot [g_0 + 2 \sum_{m=1}^M (-1)^m \cdot g_m \cdot \cos \pi m x] + \\ & [h_0 + 2 \sum_{n=1}^N (-1)^n \cdot h_n \cdot \cos \pi n x] \cdot [g_0 + 2 \sum_{m=1}^M g_m \cdot \cos \pi m x] = \\ & 2 \cdot \{h_0 \cdot g_0 + h_0 \sum_{k=1}^M [1 + (-1)^k] \cdot g_k \cdot \cos \pi k x + g_0 \sum_{k=1}^N [1 + (-1)^k] \cdot h_k \cdot \cos \pi k x + \\ & \sum_{n=1}^N \sum_{k=n-1}^{n-M} (-1)^n \cdot h_n \cdot g_{n-k} \cdot [1 + (-1)^k] \cdot \cos \pi k x + \sum_{n=1}^N \sum_{k=n+1}^{n+M} (-1)^n \cdot h_n \cdot g_{k-n} \cdot [1 + (-1)^k] \cdot \cos \pi k x\} = \\ & A_0 + \sum_{\forall k} A_k \cdot \cos \pi k x \end{aligned}$$

Из этого соотношения следует:

- коэффициенты  $A_k$  при всех нечетных значениях  $k$  равны нулю;

- $A_0 = 2 \cdot (h_0 \cdot g_0 + 2 \sum_{n=1}^{\min\{N, M\}} (-1)^n \cdot h_n \cdot g_n)$ ; (11)

- если  $A_0 = 2$  и все значения  $A_{2k}$  при  $k \neq 0$  приравнять нулю, то восстанавливающие фильтры являются КИХ-фильтрами и  $Kh(x) = \overline{G}(x)$ ;  $Kg(x) = \overline{H}(x)$ ; (12)

- можно показать, что если

$$\begin{cases} A_{2k} = 0, \quad k \neq 0; \\ H(0) = h_0 + 2 \sum_{n=1}^N h_n = \sqrt{2}; \quad H(1) = h_0 + 2 \sum_{n=1}^N (-1)^n h_n = 0; \\ G(0) = g_0 + 2 \sum_{m=1}^M g_m = 0; \quad G(1) = g_0 + 2 \sum_{m=1}^M (-1)^m g_m = \sqrt{2}, \end{cases} \quad (13)$$

то  $h_0 \cdot g_0 + 2 \sum_{n=1}^{\min\{N, M\}} (-1)^n \cdot h_n \cdot g_n = 1$  и  $A_0 = 2$ .

Учитывая, что для вычисления неизвестных  $h_n$ ,  $0 \leq n \leq N$ , и  $g_m$ ,  $0 \leq m \leq M$ , требуется использовать  $N + M + 2$  уравнения, дополнительно можно приравнять нулю четные моменты функций  $H(x)$  и  $G(x)$ , т.е.

$$H^{(2r)}(x) \Big|_{x=0}, \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad \text{и} \quad G^{(2p)}(x) \Big|_{x=0}, \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

Нечетные производные в точке  $x = 0$  равны нулю по определению функций  $H(x)$  и  $G(x)$ . Равенство нулю четных производных функции  $H(x)$  в точке  $x = 0$  приводит к расширению спектра низкочастотной составляющей сигнала, равенство же нулю четных производных функции  $G(x)$  при  $x = 0$  обеспечивает уменьшение высокочастотной части спектра выделяемой составляющей сигнала. Зачастую для оптимизации формы спектра высокочастотной составляющей целесообразно подбирать значения некоторых производных  $G(x)$  в точке  $x = 0$ .

В Таблице 1 приведены параметры нескольких фильтров, рассчитанных по приведенной методике. Обозначение фильтров, приведенное в первом столбце, определяет число дискретных отсчетов фильтра при его реакции на одиночный входной сигнал:  $(2N + 1) / (2M + 1)$ . В ряде случаев система уравнений имеет несколько решений, наилучшие из которых (по мнению авторов) зафиксированы в Таблице 1.

Фильтры 5/3 и 9/7 по своим характеристикам идентичны соответствующим фильтрам, приведенным в стандарте JPEG2000 [2].

В качестве примера на рис. 3, для сравнения, приведены характеристики низкочастотного и высокочастотного фильтров для банков 5/3 и 13/11. Как следует из сравнения этих характеристик, высокочастотные составляющие сигнала на выходе банка 13/11 практически равны нулю в полосе частот до  $x = 0,25$ .

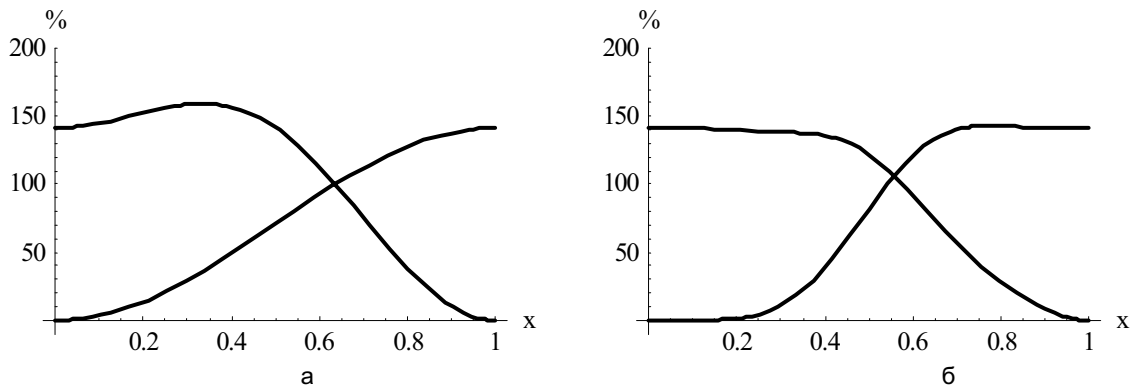


Рис. 3. АЧХ фильтров 5/3 (а) и 13/11 (б).

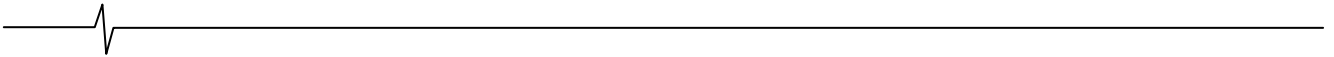
Таблица 1

Тип банка	$h_0$ $g_0$	$h_1$ $g_1$	$h_2$ $g_2$	$h_3$ $g_3$	$h_4$ $g_4$	$h_5$ $g_5$	$h_6$ $g_6$	$h_7$ $g_7$	$h_8$ $g_8$
3/5	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$							
5/3	$\frac{3}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{4\sqrt{2}}$						
	$\frac{3}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{4\sqrt{2}}$						
5/7	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$							
	0.91924	0.35355	-0.10607						
7/5	0.79549	-0.36681	-0.04419	0.01326					
	1.16168	0.33935	-0.22728	0.01421					
7/9	0.66291	-0.35355	0.02210						
	1.26091	0.25930	-0.27690	0.09426					
7/11	0.65488	-0.39145	0.03901	0.03790	-0.01290				
	0.79888	0.37480	-0.04589	-0.02125					
9/7	0.85202	-0.41007	-0.09961	0.06581	0.03146	-0.00929	-0.00430		
	1.01647	0.35355	-0.17678	0.0	0.02210				
9/11	0.70711	-0.39775	0.0	0.04419					
	1.19613	0.29344	-0.25647	0.06012	0.01196				
9/15	0.65833	-0.40098	0.03252	0.04905	-0.00813	-0.00162			
	1.0453	0.30266	-0.16208	0.05089	-0.00702	-0.00317	0.00089	-0.00012	
11/9	0.72798	-0.39802	-0.00855	0.04776	-0.00277	-0.00317	0.00089	-0.00012	
	1.0843	0.35890	-0.23400	0.00097	0.04540	-0.00632			
11/13	0.67017	-0.39775	0.02462	0.04419	-0.00616				
	1.08054	0.37587	-0.24648	-0.01323	0.05976	-0.00908			
11/17	0.66295	-0.39614	0.02923	0.04178	-0.00703	0.00081	-0.00012		
	1.09347	0.29619	-0.19617	0.06208	0.003000	-0.00472			
13/11	0.70220	-0.40955	0.00676	0.06203	-0.00660	-0.00612	0.00243	0.00009	-0.00014
	0.93001	0.35053	-0.12210	-0.00042	0.01638	0.00344	0.00574		
13/15	-0.74971	-0.42142	-0.02840	0.07970	0.00710	-0.01184			
	1.19422	0.23649	-0.21254	0.11253	-0.03020	0.00453	-0.00081		
	0.69160	-0.40702	0.01424	0.05747	-0.00882	-0.00359	0.00234	-0.00042	

Ниже для пояснения приведена система уравнений, использованная при расчете банка фильтров 13/11. Первые пять уравнений обеспечивают выполнение условия  $\det(x) = \text{Const}$ . Эти уравнения с последующими четырьмя уравнениями обеспечивают выполнение условий (13). Следующее урав-

нение определяет равенство нулю второго момента низкочастотного фильтра, а последние три уравнения накладывают условия на второй, четвертый и шестой моменты высокочастотного фильтра, при этом второй и четвертый моменты приравнены нулю.

$$\left. \begin{aligned}
 & -g_5 \cdot h_5 + g_4 \cdot h_6 = 0 \\
 & -g_5 \cdot h_3 + g_4 \cdot h_4 - g_3 \cdot h_5 + g_2 \cdot h_6 = 0 \\
 & -g_5 \cdot h_1 + g_4 \cdot h_2 - g_3 \cdot h_3 + g_2 \cdot h_4 - g_1 \cdot h_5 + g_0 \cdot h_6 = 0 \\
 & g_4 \cdot h_0 - g_3 \cdot h_1 - g_5 \cdot h_1 + g_2 \cdot h_2 - g_1 \cdot h_3 + g_0 \cdot h_4 - g_1 \cdot h_5 + g_2 \cdot h_6 = 0 \\
 & g_2 \cdot h_0 - g_1 \cdot h_1 - g_3 \cdot h_1 + g_0 \cdot h_2 - g_1 \cdot h_3 + g_4 \cdot h_2 - g_5 \cdot h_3 + g_2 \cdot h_4 - g_3 \cdot h_5 + g_4 \cdot h_6 = 0 \\
 & h_0 + 2 \cdot h_1 + 2 \cdot h_2 + 2 \cdot h_3 + 2 \cdot h_4 + 2 \cdot h_5 + 2 \cdot h_6 = \sqrt{2} \\
 & h_0 - 2 \cdot h_1 + 2 \cdot h_2 - 2 \cdot h_3 + 2 \cdot h_4 - 2 \cdot h_5 + 2 \cdot h_6 = 0 \\
 & g_0 + 2 \cdot g_1 + 2 \cdot g_2 + 2 \cdot g_3 + 2 \cdot g_4 + 2 \cdot g_5 = 0 \\
 & g_0 - 2 \cdot g_1 + 2 \cdot g_2 - 2 \cdot g_3 + 2 \cdot g_4 - 2 \cdot g_5 = \sqrt{2} \\
 & h_1 + 4 \cdot h_2 + 9 \cdot h_3 + 16 \cdot h_4 + 25 \cdot h_5 + 36 \cdot h_6 = 0 \\
 & g_1 + 4 \cdot g_2 + 9 \cdot g_3 + 16 \cdot g_4 + 25 \cdot g_5 = 0 \\
 & g_1 + 4 \cdot 4 \cdot g_2 + 9 \cdot 9 \cdot g_3 + 16 \cdot 16 \cdot g_4 + 25 \cdot 25 \cdot g_5 = 0 \\
 & g_1 + 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot g_2 + 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot g_3 + 16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot g_4 + 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot g_5 = -100
 \end{aligned} \right\}$$



На рис. 4 приведены сквозные характеристики банка фильтров 13/11 в точках до суммирования составляющих (см. рис. 1), соответствующие первому (а) и второму (б) уравнениям системы (7). В данном случае:  
 $H_{\Delta}(z) \cdot Kh(z) = H_{\Delta}(x) \cdot \bar{G}(x)$ ;  $G_{\otimes}(z) \cdot Kg(z) = G_{\otimes}(x) \cdot \bar{H}(x)$ ;  
 $H_{\otimes}(z) \cdot Kh(z) = H_{\otimes}(x) \cdot \bar{G}(x)$ ;  $G_{\Delta}(z) \cdot Kg(z) = G_{\Delta}(z) \cdot \bar{H}(x)$ .

Заметим, что в первом случае характеристика высокочастотной составляющей проходит через нуль при  $x = 0,5$ , во втором же случае через нуль в этой точке проходит характеристика низкочастотной составляющей.

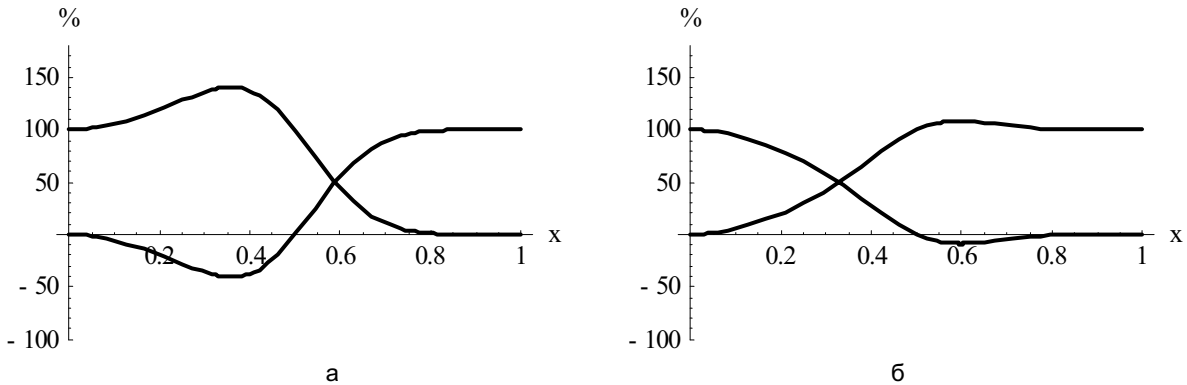


Рис. 4. Сквозные характеристики банка фильтров 13/11.

**Б. Ортогональные КИХ-фильтры с четным числом отсчетов цифровой решетки**

При четном числе отсчетов цифровой решетки низкочастотного и высокочастотного фильтров банка для

того, чтобы число отсчетов справа и слева от оси ординат было одинаково, необходимо ее установить по середине между центральными отсчетами, как показано на рис. 5.

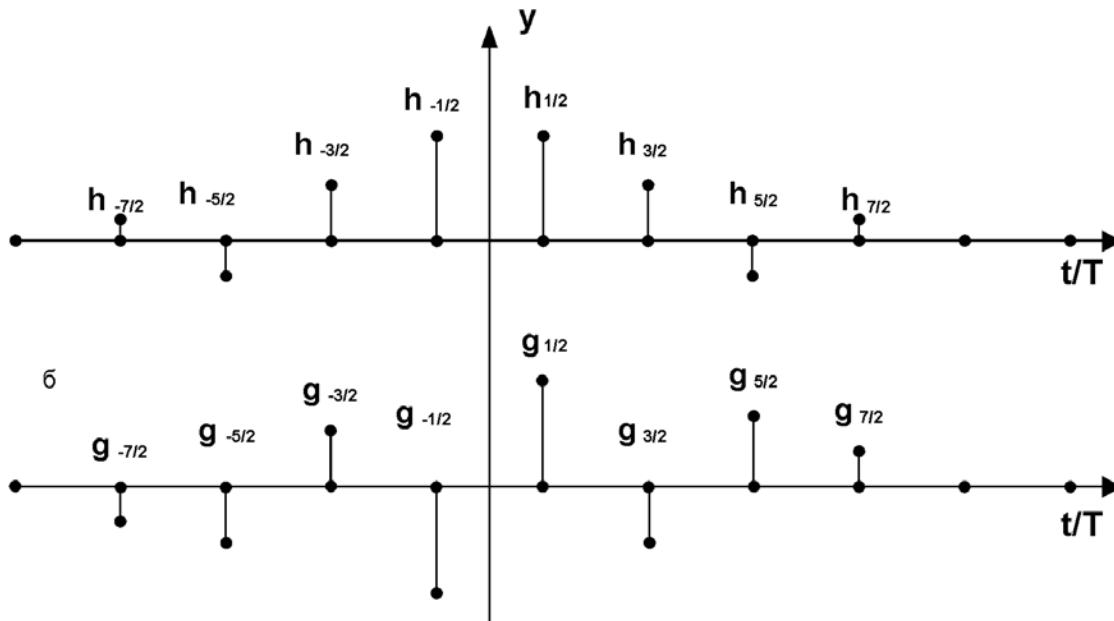


Рис. 5. Структура низкочастотного (а) и высокочастотного (б) КИХ-фильтров при четном количестве отсчетов цифровой решетки.

В этом случае положение каждого отсчета относительно оси ординат будет определяться интервалом, равным  $(2n-1)T/2$ ,  $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ . По этой причине обозначим отсчеты фильтра нижних частот через  $h_{(2n-1)/2}$ , а фильтра верхних частот – через  $g_{(2n-1)/2}$ . В случае, если

$h_{(2n-1)/2} = h_{-(2n-1)/2}$ , а  $g_{(2n-1)/2} = -g_{-(2n-1)/2}$  при  $n = 1, 2, 3, \dots$  комплексные частотные характеристики

ки соответствующих фильтров можно записать в виде:

$$H(x) = 2 \sum_{n=1}^N h_{(2n-1)/2} \cdot \cos\left(\pi \frac{2n-1}{2} x\right);$$

$$G(x) = -2j \sum_{m=1}^M g_{(2m-1)/2} \cdot \sin\left(\pi \frac{2m-1}{2} x\right). \quad (14)$$

В данном случае в Z-представлении величины  $H_{\Delta}(z)$ ,  $H_{\otimes}(z)$ ,  $G_{\Delta}(z)$ ,  $G_{\otimes}(z)$  соответственно равны:

$$\begin{aligned}
 H_{\Delta}(z) &= \sum_{n=1}^{[N/2]} h_{(4n-1)/2} \cdot Z^{\frac{4n-1}{2}} + \sum_{n=1}^{[(N+1)/2]} h_{(4n-1)/2} \cdot Z^{-\frac{4n-1}{2}}; \\
 H_{\otimes}(z) &= \sum_{n=1}^{[(N+1)/2]} h_{(4n-3)/2} \cdot Z^{\frac{4n-3}{2}} + \sum_{n=1}^{[N/2]} h_{(4n-3)/2} \cdot Z^{-\frac{4n-3}{2}}; \\
 G_{\Delta}(z) &= - \sum_{m=1}^{[M/2]} g_{(4m-1)/2} \cdot Z^{\frac{4m-1}{2}} + \sum_{n=1}^{[(M+1)/2]} g_{(4m-1)/2} \cdot Z^{-\frac{4m-1}{2}}; \\
 G_{\otimes}(z) &= - \sum_{m=1}^{[(M+1)/2]} g_{(4m-3)/2} \cdot Z^{\frac{4m-3}{2}} + \sum_{m=1}^{[M/2]} g_{(4m-3)/2} \cdot Z^{-\frac{4m-3}{2}}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Подставив эти соотношения в систему уравнений (6), можно рассчитать параметры банка фильтров.

Эквивалентно использование соотношения:

$$\begin{cases} \bar{H}(x) \cdot Kh(x) + \bar{G}(x) \cdot Kg(x) = 0, \\ H(x) \cdot Kh(x) + G(x) \cdot Kg(x) = 2, \end{cases} \tag{16}$$

где  $\bar{H}(x) = 2j \sum_{n=1}^N (-1)^n \cdot h_{(2n-1)/2} \cdot \sin(\pi \frac{2n-1}{2} x)$ ;

а  $\bar{G}(x) = -2 \sum_{m=1}^M (-1)^m \cdot g_{(2m-1)/2} \cdot \cos(\pi \frac{2m-1}{2} x)$ .

Число  $N + M = 2K$  должно быть четным.

Детерминант системы уравнений (16) можно записать в виде:

$$\det(x) = 2 \sum_{k=n-1}^N \sum_{n=1}^{n-M} (-1)^n \cdot [(-1)^k - 1] \cdot h_{(2n-1)/2} \cdot g_{(2(n-k)-1)/2} \cdot \cos(\pi kx) \tag{17}$$

$$2 \sum_{k=n}^N \sum_{n=1}^{n+M-1} (-1)^n \cdot [(-1)^{k+1} + 1] \cdot h_{(2n-1)/2} \cdot g_{(2(k-n)-1)/2} \cdot \cos(\pi kx) = A_0 + \sum_{\forall k} A_k \cdot \cos \pi kx.$$

Исследуя это соотношение, аналогично изложенному выше, можно показать, что:

– коэффициенты  $A_k$  при всех нечетных значениях  $k$  равны нулю;

$$A_0 = 4 \sum_{n=1}^{\min\{N, M\}} (-1)^n \cdot h_{(2n-1)/2} \cdot g_{(2n-1)/2}; \tag{18}$$

– если  $A_0 = 2$  и все значения  $A_{2k}$  при  $k \neq 0$  приравнять нулю, то восстанавливающие фильтры являются КИХ-

фильтрами и  $Kh(x) = \bar{G}(x)$ ;  $Kg(x) = \bar{H}(x)$ ; (19)  
 – из определения функций  $H(x)$ ,  $\bar{H}(x)$ ,  $G(x)$ ,  $\bar{G}(x)$  следует, что  $H(1) = 0$ ,  $\bar{H}(0) = 0$ ,  $G(0) = 0$ ,  $\bar{G}(1) = 0$ ;  
 – можно доказать также, что если

$$\begin{cases} A_{2k} = 0, \quad k \neq 0; \\ H(0) = 2 \sum_{n=1}^N h_{(2n-1)/2} = \sqrt{2}; \\ G(1) = g_0 + 2 \sum_{m=1}^M (-1)^m g_{(2m-1)/2} = \sqrt{2}; \end{cases}$$

то  $2 \sum_{n=1}^{\min\{N, M\}} (-1)^n \cdot h_{(2n-1)/2} \cdot g_{(2n-1)/2} = 1$  и  $A_0 = 2$ .

В Таблице 2 приведены параметры нескольких ортогональных фильтров, рассчитанных по приведенной методике. Обозначение фильтров, приведенное в первом столбце, определяет число дискретных отсчетов фильтра при его реакции на одиночный входной сигнал:  $2N / 2M$ . Существенно, что прореживание (децимация) сигналов на выходах низкочастотного и высокочастотного фильтров в данном случае должно осуществляться синфазно.

Заметим, что нечетные производные функции  $H(x)$  в точке  $x = 0$  равны нулю, а в точке  $x = 1$  равны нулю четные производные этой функции. Противоположный характер имеют производные функции  $G(x)$ .

На рис. 6 приведены амплитудно-частотные характеристики фильтров 2/2 (а, вейвлет Хаара) и 18/18 (б).

В отличие от фильтров, рассмотренных в разделе А, в данном случае характеристики цепей после децимации имеют близкие к равномерным частотные характеристики и нелинейные фазовые характеристики.

При этом АЧХ могут быть рассчитаны по формулам:

$$\begin{aligned}
 ModH_{\Delta}(x) &= ModH_{\otimes}(x) = \\
 &= \sqrt{\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N h_{(2n-1)/2} \cdot h_{(2m-1)/2} \cdot \cos \pi n x \cdot [n - \frac{1}{2} - (-1)^{n+m} \cdot (m - \frac{1}{2})]} \tag{20}
 \end{aligned}$$

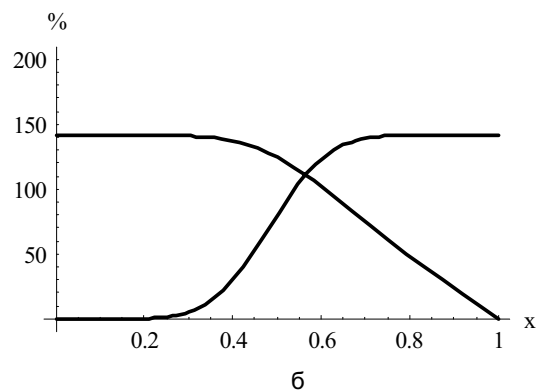
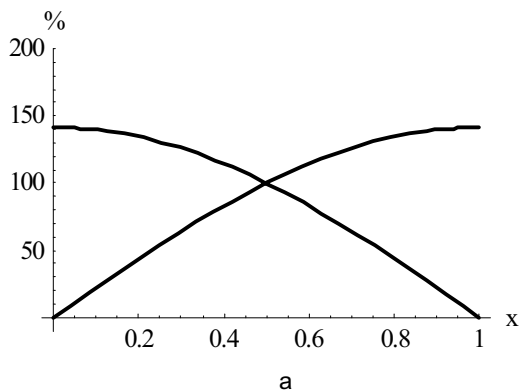


Рис. 6. АЧХ фильтров 2/2 (а) и 18/18 (б)

Таблица 2

Тип банка	$h_{1/2}$ $g_{1/2}$	$h_{3/2}$ $g_{3/2}$	$h_{5/2}$ $g_{5/2}$	$h_{7/2}$ $g_{7/2}$	$h_{9/2}$ $g_{9/2}$	$h_{11/2}$ $g_{11/2}$	$h_{13/2}$ $g_{13/2}$	$h_{15/2}$ $g_{15/2}$	$h_{17/2}$ $g_{17/2}$
2/2	$\frac{1}{\sqrt{2}}$								
2/6	$\frac{1}{\sqrt{2}}$								
4/4	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{8\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{8\sqrt{2}}$						
	$\frac{3}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$							
	$\frac{3}{4\sqrt{2}}$	$-\frac{3}{4\sqrt{2}}$							
4/8	0.79549	-0.08839							
	0.64302	-0.13037	-0.05966	0.00663					
6/6	0.92685	-0.19178	-0.02796						
	0.57159	-0.15865	-0.02313						
6/10	0.79502	0.04443	-0.13234						
	0.61023	-0.13676	-0.06635	-0.00665	0.01982				
8/8	0.85243	-0.07903	-0.12946	0.06317					
	0.59770	-0.17570	-0.04455	0.02174					
8/12	0.87834	-0.12222	-0.13234	0.08333					
	0.59247	-0.19503	-0.046422	0.03240	-0.00097	0.00061			
10/10	0.95972	-0.20193	-0.153082	0.11281	-0.01041				
	0.56320	-0.20458	-0.02744	0.03043	-0.00281				
10/14	0.72294	0.06177	0.09762	0.01435	0.00566				
	0.66927	-0.12086	-0.08869	-0.00005	0.00523	-0.00062	-0.00024		
12/12	0.98458	-0.23183	-0.16533	0.13003	-0.00284	-0.00749			
	0.55896	-0.21308	-0.02582	0.04000	-0.00054	-0.00143			
12/16	0.83729	-0.06918	-0.16953	0.085012	0.02353	-0.01692			
	0.59260	-0.19976	-0.05335	0.03983	0.00345	-0.00343	0.00061	-0.00044	
14/14	0.88664	-0.11406	-0.17114	0.10839	0.01655	-0.02133	0.00206		
	0.58656	-0.20810	-0.05111	0.04621	0.00316	-0.00602	0.00058		
16/16	0.85855	-0.12399	-0.08598	0.05468	0.02137	-0.01716	-0.00278	0.00241	
	0.60752	-0.20251	-0.07290	0.05207	0.01350	-0.01105	-0.00133	0.00116	
18/18	0.78189	0.04881	-0.03671	0.00673	0.00548	-0.00085	-0.00073	0.00006	0.00005
	0.64549	-0.17213	-0.10328	0.03688	0.02869	-0.00671	-0.00567	0.00061	0.00054

Для функций  $Mod G_{\Delta}(x)$  и  $Mod G_{\otimes}(x)$  формула аналогична, но вместо произведения

$h_{(2n-1)/2} \cdot h_{(2m-1)/2}$  необходимо подставить  $g_{(2n-1)/2} \cdot g_{(2m-1)/2}$ .

Для низкочастотного и высокочастотного фильтров банка 18/18  $Mod G_{\Delta}(x)$  и  $Mod G_{\otimes}(x)$  приведены на рис. 7.

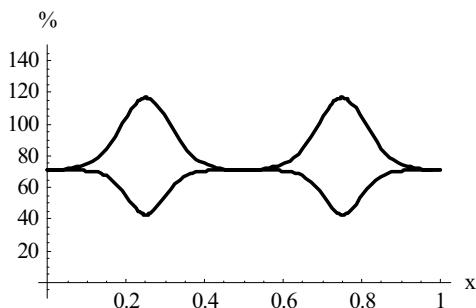


Рис. 7. АЧХ низкочастотного (сверху) и высокочастотного (снизу) фильтров банка 18/18 после децимации.

Групповое время запаздывания (производная фазовой характеристики) этих фильтров после децимации имеет вид:

$$t_{gr}[H_{\Delta}(x)] = -t_{gr}[H_{\otimes}(x)] = \frac{\pi \cdot T}{Mod H_{\Delta}(x)}$$

$$\left[ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{2n-1}{2} \cdot (-1)^{n+1} h_{(2n-1)/2} \cdot h_{(2m-1)/2} \cdot \cos \pi x \cdot \left[ n - \frac{1}{2} - (-1)^{n+m} \cdot \left( m - \frac{1}{2} \right) \right] \right] \quad (21)$$

Формулы расчета  $t_{gr}[G_{\Delta}(x)] = -t_{gr}[G_{\otimes}(x)]$  могут быть получены при замене

$h_{(2n-1)/2} \cdot h_{(2m-1)/2}$  на  $g_{(2n-1)/2} \cdot g_{(2m-1)/2}$

и  $Mod H_{\Delta}(x)$  на  $Mod G_{\Delta}(x)$ .

На рис. 8а и рис. 8б приведены относительные характеристики группового времени запаздывания фильтров 18/18 после децимации, соответствующие первому и второму уравнениям системы (6).

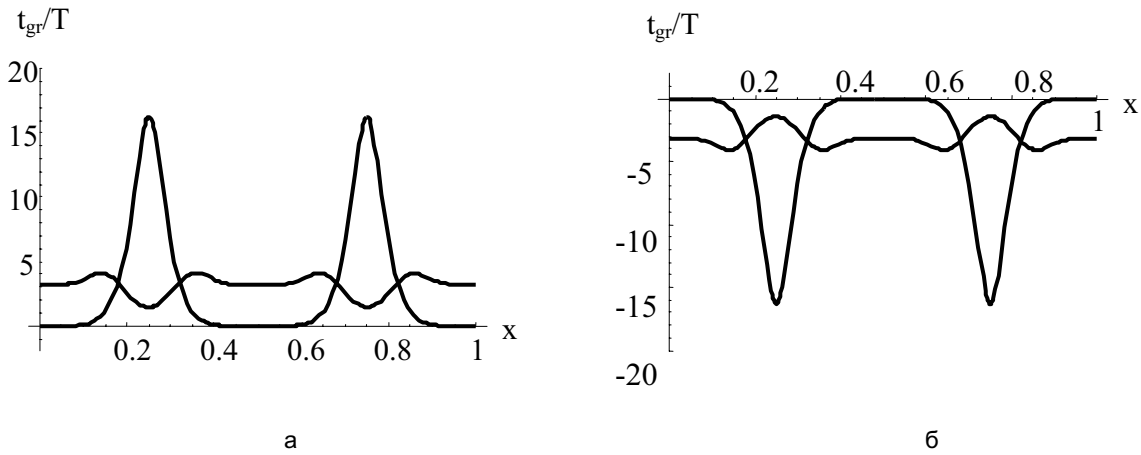


Рис. 8. Относительные характеристики группового времени запаздывания фильтров 18/18 после децимации (менее изменяющаяся характеристика соответствует низкочастотному, а более изрезанная – высокочастотному фильтру).

Аналогичным же образом можно рассчитывать квадратурно-зеркальные фильтры, для которых частотные характеристики в  $Z$ -представлении имеют вид:

$$H(z) = \sum_{n=1}^N (h_{\frac{2n-1}{2}} \cdot Z^{\frac{2n-1}{2}} + h_{\frac{2n-1}{2}} \cdot Z^{-\frac{2n-1}{2}}),$$

$$G(z) = \sum_{n=1}^N (-1)^n (h_{\frac{2n-1}{2}} \cdot Z^{\frac{2n-1}{2}} - h_{\frac{2n-1}{2}} \cdot Z^{-\frac{2n-1}{2}}). \quad (22)$$

В качестве примера приведем характеристики квадратурно-зеркального фильтра 10/10.

Система уравнений в данном случае дает четыре равнозначных решения, приведенных в Таблице 3. На рис. 9 приведены АЧХ этих фильтров.

Таблица 3

$h_{-9/2}$	$h_{-7/2}$	$h_{-5/2}$	$h_{-3/2}$	$h_{-1/2}$	$h_{1/2}$	$h_{3/2}$	$h_{5/2}$	$h_{7/2}$	$h_{9/2}$
0.16010	0.60383	0.72431	0.13843	-0.24229	-0.03224	0.07757	-0.00624	-0.01258	0.00334
0.00334	-0.01258	-0.00624	0.07757	-0.03224	-0.24229	0.13843	0.72431	0.60383	0.16010
0.02733	0.0295	-0.03913	0.19940	0.72341	0.63398	0.01660	-0.17533	-0.02110	0.01954
0.01954	-0.02110	-0.17533	0.01660	0.63398	0.72341	0.19940	-0.03913	0.02952	0.02733

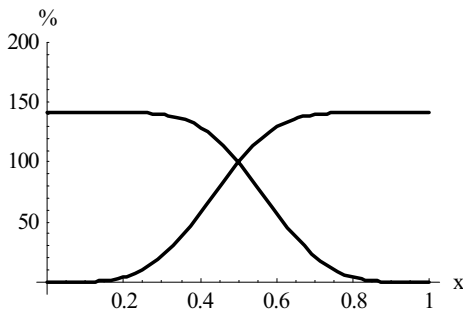


Рис. 9. АЧХ квадратурно-зеркальных фильтров банка 10/10.

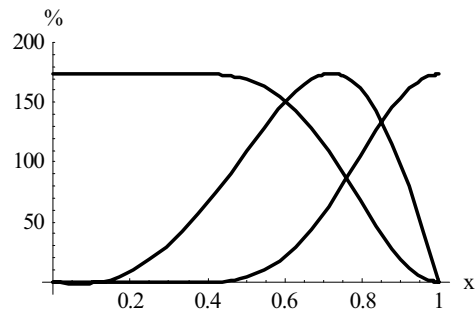


Рис. 10. Частотные характеристики трехполосного банка фильтров 9/9/9.

**Заключение**

Предложенные варианты расчета банка фильтров дискретного вейвлет-преобразования позволяют выбрать оптимальные варианты преобразований сигналов (в том числе и многомерных) по эффективности преобразований и требованиям к вычислительной мощности соответствующих цифровых систем.

Предложенный принцип расчета может быть использован также и для расчета фильтров многополосных вейвлет-преобразований.

В качестве примера приведем характеристики рассчитанного трехполосного банка фильтров 9/9/9,

содержащего фильтры нижних частот  $H(x)$ , средних частот  $B(x)$  и верхних частот  $G(x)$ . В данном случае выбраны следующие соотношения:

- для фильтра нижних частот  $h_n = h_{-n}$ ;
- для фильтра средних частот  $b_n = -b_{-n}, b_0 = 0$ ;
- для фильтра верхних частот  $g_n = g_{-n}$ .

Частотные характеристики этих фильтров приведены на рис.10.

В таблицах 4 и 5 приведены соответственно значения дискретных компонентов этих фильтров и восстанавливающих цепей  $Kh(x), Kb(x)$  и  $Kg(x)$ .



Таблица 4

$n$	0	1	2	3	4
$h_n$	1.25844	0.378886	-0.189443	0.0541266	-0.00676582
$b_n$	0.0	0.654084	-0.351267	0.0328772	-0.0125453
$g_n$	0.473608	-0.378886	0.189443	-0.0541266	0.00676582

Таблица 5

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\bar{h}_n$	0.577350	0.458638	0.204140	0.0	-0.0583726	-0.028569	0.0	0.001515
$\bar{b}_n$	0.0	-1.28250	-0.729767	0.0	0.038708	0.0	0.0	0.0
$\bar{g}_n$	0.577350	-1.69498	-1.15859	0.0	0.013910	-0.028569	0.0	0.001515

### Литература

1. S. Mallat A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. IEEE Pattern Anal. and Machine Intel, 1989, vol. 11, N 7, pp. 674-693
2. И. Добеши Десять лекций по вейвлетам. Пер. с англ. Е. В. Мищенко под ред. А. П. Петухова. М.: РХД, 2001
3. C. Sidney Burrus, Ramesh A. Gopinath, and Haitao Guo Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms. A Primer. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458, 1998
4. В. И. Воробьев, В. Г. Грибунин Теория и практика вейвлет-преобразований. С-Пб.: ВУС, 1999
5. В. П. Дьяконов Вейвлеты. От теории к практике. М.: Солон-Р, 2002
6. ITU-T Recommendation T.800 / Information Technology -- JPEG 2000 Image Coding System: Core Coding System, 2004
7. ISO/IEC 14496-2 – Information Technology -- Coding of Audio-Visual Objects -- Part 2: Visual, 2004 (MPEG-4 Video)
8. Р. Гонсалес, Р. Вудс Цифровая обработка изображений. Пер. с англ. под ред. П. А. Чочиа. М.: Техносфера, 2005

### Уважаемые коллеги !

Приглашаем вас принять участие в формировании тематических выпусков журнала «Цифровая обработка сигналов» в 2006\2007 гг.

Научно-технический журнал «Цифровая обработка сигналов» выпускается на регулярной основе с 2000 года. Цель его издания – содействие развитию и широкому применению методов цифровой обработки сигналов (ЦОС) и современных информационных технологий реального времени в разработках отечественных ученых и специалистов. Журнал «Цифровая обработка сигналов» внесен в дополнительный Перечень периодических изданий, в которых рекомендуется публикация основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора технических наук.

Просим вас выразить свое отношение к данному предложению по сотрудничеству с редакцией журнала. Желательно заранее сообщить ориентировочное название статей и их предполагаемый объем (максимальный объем – до 20 страниц для обзорных статей и до 12 страниц для оригинальных работ).

**При подготовке ваших предложений просим учесть, что предпочтение отдаётся статьям обзорного характера и работам, посвященным решению проблем эффективного проектирования и технической реализации систем ЦОС с применением сигнальных процессоров и ПЛИС, а также различным приложениям технологий обработки сигналов и изображений в реальном времени.**

По всем вопросам, связанным с требованиями и порядком предоставления материалов статей, обращайтесь на сайт журнала: [www.dsra.ru](http://www.dsra.ru).

Предварительные заявки и материалы работ на рецензирование и публикацию принимаются по E-mail: [tor@rgta.rayzan.ru](mailto:tor@rgta.rayzan.ru).

Ждем ваших предложений.

Зам. главного редактора, профессор

В.В. Витязев