

УДК 621.391.26

МОДИФИКАЦИЯ БАНКА ФИЛЬТРОВ ВЕЙВЛЕТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Л.В. Новиков

Введение

Благодаря исследованиям в области математики, выполненным в конце 80-х годов, появился новый инструмент для обработки сигналов – вейвлеты. Они производят, по существу, частотно-локальный анализ и особенно эффективны для обработки финитных сигналов и обнаружения аномалий на фоне некоторого стационарного процесса. Для цифровой обработки сигналов чаще всего применяется дискретные вейвлетные преобразования (ДВП), построенные на основе теории кратномасштабного (мультиразрешающего) анализа (КМА) и реализуемые с помощью быстрых вычислительных алгоритмов [1–3]. Широкое применение ДВП нашло в различных приложениях, например, для аппроксимации и сжатия сигналов [4], обработки изображений [5], при измерении тока пучка ионов на тераваттном ускорителе [6], в системах регулирования быстропротекающими процессами, когда по результатам обработки принимаются необходимые управляющие решения [7], в аналитической химии [8], радиолокации [9] и др. областях [10,11].

КМА основан на идее использования масштабирующих $\varphi(t)$ и вейвлетных $\psi(t)$ функций, сдвиги и масштабирование которых образуют базисы для сигналов с соответствующим частотным спектром [1–3]. Масштабирующие функции

$$\left\{ \varphi_{j_0,k}(t) = 2^{\frac{j_0}{2}} \varphi(2^{j_0} t - k) \right\}$$

обеспечивают грубое представление сигнала в некотором пространстве низкочастотных колебаний (включая $\omega = 0$) при значении масштаба j_0 . Это представление затем улучшается дополнением высокочастотных деталей сигнала из вейвлетных пространств с базисом в каждом из них

$$\left\{ \psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k) \right\}$$

при значениях масштаба $j = j_0, j_0 + 1, \dots, J$.

Тогда любой сигнал с ограниченным частотным спектром может быть представлен в виде

Предложен подход расширяющий функции классического банка фильтров быстрых вейвлетных преобразований. Подход основан на использовании аппаратно – ориентированных вейвлетов приспособленных к решению определенного круга задач с учетом априорной информации об импульсном отклике измерительного тракта. Новый банк фильтров решает задачу оценки полезного сигнала (или его линейных преобразований) искаженного измерительным трактом и шумом. Применение предложенного подхода позволяет более чем на порядок повысить скорость обработки данных по сравнению с комбинированными алгоритмами

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j_0}(k) \varphi_{j_0,k}(t) + \sum_{j=j_0}^J \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_j(k) \psi_{j,k}(t), \quad (1)$$

где первое слагаемое является грубым приближением сигнала, второе – его уточнениями вплоть до самого высокого разрешения при значении масштаба J ; $c_{j_0}(k)$ и $d_j(k)$ – коэффициенты разложения сигнала по масштабирующим и вейвлетным функциям соответственно; j_0 – значение масштаба грубого разрешения.

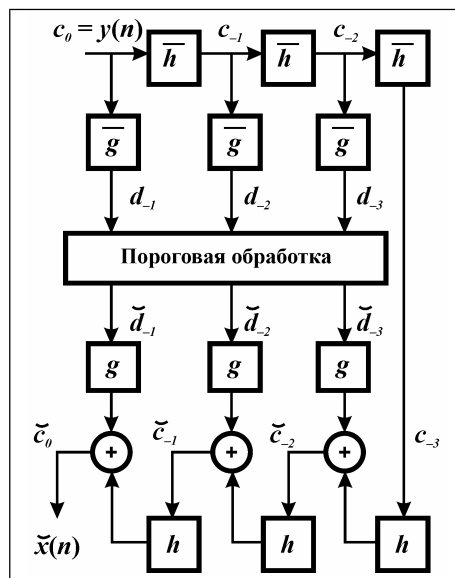
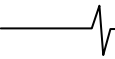


Рис1. Банк фильтров обработки сигналов, синтезированный на основе ортонормированных вейвлетов (например, вейвлетов Добеши).

Функция $\varphi(t)$ должна удовлетворять масштабирующему уравнению



$$\varphi(t) = \sum_n h(n) \sqrt{2} \varphi(2t - n), \quad (2a)$$

а вейвлетные функции – соотношению

$$\psi(t) = \sum_n g(n) \sqrt{2} \varphi(2t - n), \quad (2b)$$

где h и g – масштабирующие и вейвлетные коэффициенты (их еще называют, соответственно, низкочастотным и высокочастотным фильтрами), причем

$$g(n) = (-1)^{1-n} h(1-n) \quad (3)$$

Рассмотрим одну из распространенных задач, решаемых с помощью вейвлетной обработки. Пусть $y(t)$ – наблюдаемый сигнал, представляющий собой смесь полезного сигнала $x(t)$ и шума $u(t)$:

$$y(t) = x(t) + u(t)$$

Требуется оценить функцию $x(t)$. Решение этой задачи предложено в работе [12] и состоит из трех этапов: ДВП – пороговая обработка – обратное ДВП. Пример трехкаскадного банка фильтров, реализующего эту процедуру обработки, показан на рис.1. Вычисление вейвлетного спектра, содержащего низкочастотные

$$\{c_j(k)\}$$

и высокочастотные

$$\{d_j(k)\}$$

компоненты (где масштаб $j = 0, -1, -2, \dots$; и $k \in Z$ – положение спектральной составляющей) при каждом значении масштаба j осуществляется с помощью каскадного алгоритма Малла [2,3]:

$$c_j(k) = \sum_n h(n-2k) c_{j+1}(n) = \quad (4)$$

$$= c_{j+1} * \bar{h}(2k)$$

$$d_j(k) = \sum_n g(n-2k) c_{j+1}(n) = \quad (5)$$

$$= c_{j+1} * \bar{g}(2k)$$

где $(*)$ обозначает свертку;

$$\bar{h}(k) = h(-k), \bar{g}(k) = g(-k).$$

После выполнения операции свертки осуществляется прореживание отсчетов вдвое (децимация).

Этот алгоритм осуществляет преобразование «от тонкого к грубому разрешению» [3] и при самом тонком значении масштаба $j = 0$ полагают коэффициенты $c_0(n) = y(n)$, т.е. они являются отсчетами наблюдаемого сигнала.

В вейвлетной области при удачном выборе вейвлетного базиса подчеркиваются полезные компоненты наблюдаемого сигнала. Поэтому целью пороговой обработки является удаление компонент сигнала очень низкого уровня, не влияющие на конечный результат и компонент шума, энергия которого обычно равномерно распределяется по всему спектру. В результате происходит сжатие сигнала: число оставшихся спектральных составляющих значительно меньше объема массива ис-

ходных данных $y(n)$.

Восстановление сигнала (см. рис.1) производится по рекуррентной формуле

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{j+1}(k) &= \\ &= \sum_n \tilde{c}_j(n) h(k-2n) + \sum_n \tilde{d}_j(n) g(k-2n) = \quad (6) \end{aligned}$$

$$= \tilde{c} * h(k) + \tilde{d} * g(k),$$

где \tilde{c} , \tilde{d} – низкочастотные и высокочастотные спектральные компоненты после пороговой обработки;

$$\tilde{c}(n) = \begin{cases} \tilde{c}(k), & n = 2k \\ 0, & n = 2k + 1 \end{cases},$$

$$\tilde{d}(n) = \begin{cases} \tilde{d}(k), & n = 2k \\ 0, & n = 2k + 1 \end{cases},$$

т.е. до выполнения операции свертки производится увеличение числа отсчетов вдвое прореживанием коэффициентов $\tilde{c}(k)$ и $\tilde{d}(k)$ нулями (интерполяция).

При $j = -1$ получаем оценку полезного сигнала $x(t)$ в виде отсчетов $\tilde{x}(n) = \tilde{c}_0(n)$.

Однако в практике обработки сигналов часто требуется решение более сложной задачи: оценка сигнала $x(t)$ или его линейного преобразования при наличии двух видов искажений, вызванных шумом и измерительной системой с известным импульсным откликом (приборной функцией) $H(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) H(t-\tau) d\tau + u(t). \quad (7)$$

Решение этой задачи обычно осуществляется комбинированными алгоритмами, включающими ДВП в качестве составной части, и фильтр Винера, дифференцирующий или другой фильтр в зависимости от того, какое преобразование над сигналом необходимо осуществить [см., например, 13]. Вместо этих алгоритмов в настоящей работе рассматривается подход, основанный на применении вейвлетов, синтезированных под решаемую задачу, т.н. аппаратно – ориентированных вейвлетов [14]. Банк фильтров, построенный на основе этих вейвлетов, обеспечивает одновременно получение оценки линейного преобразования сигнала, подавление шума и влияния приборной функции. В зависимости от постановки задачи обработки может быть выбран один из двух способов синтеза таких банков фильтров, рассматриваемых ниже.

Банк фильтров модифицированных вейвлетов

Приведем сначала некоторые расчетные соотношения. Предположим, что оценка линейного преобразования сигнала в модели (7) осуществляется с помощью фильтра $G(t)$. Тогда

$$\tilde{x}(t) = (G * y)(t), \quad (8)$$

где $G(t)$ выбирается в зависимости от решаемой задачи: в частности, это может быть фильтр Винера – Тихо-

нова, определяемый через преобразование Фурье как

$$\widehat{G}(\omega) = \frac{\overline{\widehat{H}(\omega)}}{|\widehat{H}(\omega)|^2 + \beta},$$

где β – параметр регуляризации.
Решение ищем в виде

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) = & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_{j_0}(k) \varphi_{j_0,k}(t) + \\ & + \sum_{j=j_0}^J \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{d}_j(k) \psi_{j,k}(t) \end{aligned} \quad (9)$$

где $\varphi_{j_0,k}(t) = 2^{\frac{j_0}{2}} \varphi(2^{j_0} t - k)$,

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k) -$$

известные ортонормированные масштабирующие и вейвлетные функции (например, вейвлеты Добеши [1]).

Для того чтобы найти оценку $\tilde{x}(t)$ по формуле (9), необходимо определить коэффициенты $\tilde{c}_{j_0}(k)$ и $\tilde{d}_j(k)$ по наблюдаемому сигналу $y(t)$.

Из формулы (9) с учетом (8) наблюдаемый сигнал можно представить в виде

$$\begin{aligned} y(t) = & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_{j_0}(k) \theta_{j_0,k}(t) + \\ & + \sum_{j=j_0}^J \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{d}_j(k) \eta_{j,k}(t) \end{aligned} \quad (10)$$

где $\theta_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \theta_j(t - 2^{-j} k)$ и

$$\eta_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \eta_j(t - 2^{-j} k) \quad (j, k \in Z)$$

масштабирующие и вейвлетные функции, Фурье – образы которых определяются выражениями

$$\widehat{\theta}_j(\omega) = \widehat{G}^{-1}(\omega) \widehat{\varphi}(2^{-j} \omega), \quad (11a)$$

$$\widehat{\eta}_j(\omega) = \widehat{G}^{-1}(\omega) \widehat{\psi}(2^{-j} \omega). \quad (11b)$$

Существуют двойственные базисные функции такие, что

$$\widehat{\widetilde{\theta}}_j(\omega) = \overline{\widehat{G}(\omega)} \widehat{\varphi}(2^{-j} \omega), \quad (11b)$$

$$\widehat{\widetilde{\eta}}_j(\omega) = \overline{\widehat{G}(\omega)} \widehat{\psi}(2^{-j} \omega). \quad (11g)$$

Функции (11) образуют семейство модифицированных вейвлетов, т.к. получены модификацией известных вейвлетов импульсным откликом фильтра $G(t)$.

Функции $\theta_{j,k}(t)$ и $\psi_{j,k}(t)$ биортогональны по отношению к собственным сдвигам, функции $\eta_{j,k}(t)$ и $\widetilde{\eta}_{j,k}(t)$ биортогональны по отношению к сдвигам и масштабу, а все они обеспечивают кратномасштабный анализ сигналов из $L^2(\mathbf{R})$. Биортогональными являются также функции $\theta_{j,k}(t)$ и $\widetilde{\eta}_{j,k}(t)$, $\psi_{j,k}(t)$ и $\eta_{j,k}(t)$.

Учитывая это обстоятельство, можно показать, что функции $\theta_{j,k}(t)$ и $\widetilde{\eta}_{j,k}(t)$ должны удовлетворять соотношениям, аналогичным (2), с масштабирующими и вейвлетными коэффициентами, которые обозначим соответственно, как $\widetilde{\alpha}_j(n)$ и $\widetilde{\beta}(n)$. В работе [15] показано, что в этом случае спектральные компоненты $\tilde{c}_j(k)$ и $\tilde{d}_j(k)$ вычисляются по рекуррентным формулам (4) и (5) кроме первого каскада, где они определяются как:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{-1}(k) &= \sum \widetilde{\alpha}_0(m - 2k) y(m) \\ \tilde{d}_{-1}(k) &= \sum_m \widetilde{\beta}_0(m - 2k) y(m) \end{aligned}$$

Синтез оценки полезного сигнала так же как и в случае обычного вейвлет-анализа производится по рекуррентной формуле (6).

Банк фильтров, реализующий процедуру вейвлетной обработки по оценке полезного сигнала $\tilde{x}(t)$ в модели (8) показан на рис.2. Он отличается от банка фильтров рис.1 только коэффициентами фильтров в первом каскаде.

Коэффициенты $\widetilde{\alpha}_0$ и $\widetilde{\beta}_0$ вычисляются по формулам

$$\widetilde{\alpha}_0(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\widehat{G}(\omega)} \widehat{h}(\omega) \exp(i\omega n) d\omega, \quad (12a)$$

$$\widetilde{\beta}_0(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\widehat{G}(\omega)} \widehat{g}(\omega) \exp(i\omega n) d\omega, \quad (12b)$$

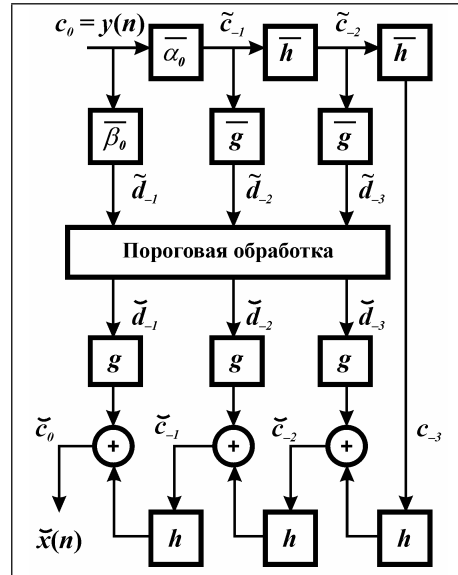


Рис. 2. Банк фильтров обработки сигналов, синтезированный на основе ортонормированных вейвлетов, модифицированных импульсным откликом линейной системы.

Если же функция $\widehat{G}(\omega)$ представляет собой частотный отклик дискретного фильтра, тогда справедливо равенство

$$\widehat{G}(\omega) = \widehat{G}(\exp(i\omega)) = G_0(z),$$

где $z = \exp(i\omega)$. Так как $h(n)$ и $g(n)$ также являются дискретными фильтрами, то коэффициенты $\widetilde{\alpha}_0(n)$ и

$\tilde{\beta}_0(n)$ могут быть получены путем перемножения их Z -преобразований:

$$\tilde{\alpha}_0(z) = (\tilde{G} * h)(z) \quad (12в)$$

$$\tilde{\beta}_0(z) = (\tilde{G} * g)(z) \quad (12г)$$

Тогда искомые коэффициенты будут коэффициентами z -преобразований $\tilde{\alpha}_0(z)$ и $\tilde{\beta}_0(z)$.

Если необходимо вычислить, например, p -ю производную оценки полезного сигнала (с подавлением влияния аппаратной функции), то коэффициенты $\tilde{\alpha}_0(z)$ и $\tilde{\beta}_0(z)$ необходимо определять по формулам (12а) и (12б), помножив функцию $G(\omega)$ на $(i\omega)^p$. Если же необходимо вычислить производную наблюдаемого сигнала, то коэффициенты $\tilde{\alpha}_0(z)$ и $\tilde{\beta}_0(z)$ необходимо определять по формулам (12в) и (12г), положив в этих формулах в качестве функции \tilde{G} частотный отклик некоторого дифференцирующего дискретного фильтра.

Банк фильтров квазивейвлетов

С целью решения задачи оценки функции $x(t)$ в модели (7) может быть применен другой подход, основанный на прямом синтезе вейвлетов с использованием импульсного отклика $H(t)$.

Как отмечено в [1], кратномасштабный анализ можно построить с использованием некоторых функций $f(t)$, обладающих свойством частотно-временной локализации, сдвиги которых с относительным шагом b_0 формируют базис Рисса $\{f_k(t) = f(t - b_0 k), k \in Z\}$ и удовлетворяющих масштабирующему уравнению (2а). Ограничения, налагаемые на «кандидатов» в масштабирующие функции обсуждаются в работе [16]. Однако функции $f(t)$, особенно выбранные из некоторых практических соображений, удовлетворяют требованиям, предъявляемым к масштабирующим функциям, с некоторым приближением. Очевидно, что для таких функций равенство в (2) также будет приближенным. Именно поэтому масштабирующие и вейвлетные функции, синтезированные в этих условиях целесообразно назвать квазивейвлетами. Как и ранее приведем некоторые расчетные соотношения для синтеза коэффициентов банка фильтров.

Рассматриваемый подход применен в том случае, когда импульсный отклик линейной системы (прибора, экспериментальной установки и т.п.) $H(t)$ можно аппроксимировать функцией, заданной аналитически и имеющей экспоненциально убывающие фронты (т.е. имеющей вид пика). Тогда, положив

$$f(t) = \frac{H(-t)}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(t)|^2 dt},$$

путем сдвига с шагом b образуем множество функций

$$\left\{ f_k(t) = f\left(\frac{t - bk}{\mu}\right) = f(t - b_0 k) \right\}, k \in Z,$$

где $b_0 = b/\mu$, μ – среднеквадратическая ширина или

ширина на половине высоты (полуширина).

Выберем относительный шаг b_0 из интервала $0,8 \dots 1,6$ и воспользуемся вавшишь модифицированным способом ортогонализации Грамма-Шмидта, предложенным в [17], образуем из системы функций $\{f_k(t)\}$ ортонормированный базис $\{\varphi_k(t) = \varphi(t - b_0 k)\}$:

$$\varphi(t) = \sum_m \gamma(m) f(t - b_0 m), \quad (13)$$

где γ – коэффициенты ортогонализации.

Одним из инженерных способов проверки «удачного» выбора b_0 является быстрое убывание γ

Коэффициенты масштабирующего уравнения h вычисляем по формуле

$$h(n) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \varphi(2t - b_0 n) dt$$

Коэффициенты $g(n)$ вычисляются по формуле (3).

Дополнительно можно проверить удовлетворяют ли коэффициенты $h(n)$ и $g(n)$ некоторым обязательным соотношениям [3]:

ортгональность по отношению к двойному сдвигу

$$\sum_n h(n) h(n - 2k) = \delta(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0 \\ 0, & \text{если } k \neq 0; \end{cases}$$

нормировка

$$\sum_n h(n) = 1;$$

Можно допустить, что все приведенные выше равенства должны соблюдаться с точностью, например, до четвертого знака после запятой. Коэффициенты γ , h и g зависят только от выбранной функции $H(t)$, описывающей импульсный отклик, и параметра сдвига b_0 и не изменяются при сохранении настройки прибора.

Покажем теперь, что синтезированный выше базис решает задачу оценки $x(t)$. Пусть сигнал $x(t)$ и масштабирующие функции $\{\varphi_k(t), k \in Z\}$ принадлежат одному подпространству. Тогда справедливо равенство

$$x(t) = \sum_k c_0(k) \varphi_k(t). \quad (14)$$

С учетом (13) для коэффициентов $c_0(k)$ получим вычислительный алгоритм

$$\begin{aligned} c_0(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \varphi_k(t) dt = \\ &= \sum_n y(bn) \gamma(n - k) = \sum_n y(bn) \bar{\gamma}(k - n) \end{aligned}$$

где $\bar{\gamma}(k) = \gamma(-k)$;

$$y(bn) = y\left(\frac{bn}{\mu}\right) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(t)|^2 dt} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) H\left(\frac{bn - t}{\mu}\right) dt$$

– отсчеты выходного сигнала прибора, взятые с интервалом $b = b_0 \mu$, $k, n \in N$. Так как интервал дискретизации наблюдаемого сигнала из-за наличия шума должен быть меньше b , вычисление $c_0(k)$ должно быть выпол-

нено для всех временных отсчетов $y(n)$.

Чтобы получить алгоритм вычисления искомой оценки $x(t)$ по коэффициентам $\tilde{c}_0(k)$, из формулы (14) с учетом (13) получим:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \sum_k \tilde{c}_0(k) \varphi_k(t) = \\ &= \sum_n f\left(\frac{t-bn}{\mu}\right) \sum_k \tilde{c}_0(k) \gamma(n-k) \end{aligned}$$

Следовательно, для полного восстановления сигнала $x(t)$ необходимо $\tilde{c}_0(k)$ пропустить через фильтр $\gamma(k)$, после чего, воспользовавшись функцией $f(t)$, получаем искомую оценку $\tilde{x}(t)$.

Банк фильтров реализующий рассматриваемый алгоритм, показан на рис. 3. Полезный сигнал $x(t)$, который требуется оценить, искаженный приборной функцией $H(t)$ и шумом в виде дискретных временных отсчетов $y(n)$ поступает на вход дискретного фильтра с откликом γ . Выход этого фильтра подвергается ДВП фильтрами h и g (на рис.3 показаны три каскада ДВП) с последующей пороговой обработкой, после чего выполняется обратное ДВП фильтрами h и g . Выходная дискретная последовательность обрабатывается фильтром γ и затем, с помощью фильтра с импульсным откликом $f(t)$ вычисляется искомая оценка сигнала $\tilde{x}(t)$. Коэффициенты фильтров γ , h и g находятся по формулам, приведенным выше.

В практике обработки сигналов, как правило, возникает необходимость регуляризации решения задачи деконволюции с целью подавления ложных выбросов и автоколебаний. Этого можно достичь путем корректировки усиления верхних частот (аналогичный параметр имеется в фильтре Винера-Тихонова [13]) и частотной настройки банка фильтров.

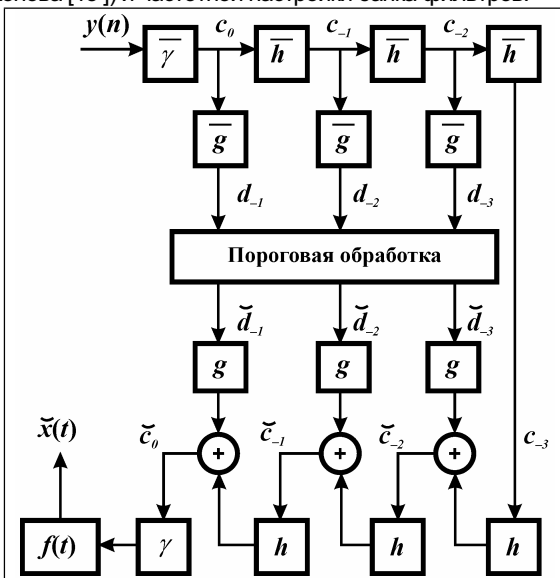


Рис. 3. Банк фильтров обработки сигналов на основе квазивейвлетов

Коррекция усиления верхних частот производится следующим образом:

- построить фильтр нижних частот $w(m)$ с коэффициентами, полученными, например, как

$$w(m) = \exp\left\{-m^2/2\beta^2\right\}$$

- для $m = 0,1,2,\dots$, где β – параметр регуляризации;
- нормировать коэффициенты $w_0(m) = w(m)/\sum w(m)$;
- выполнить свертку коэффициентов γ с $w_0(m)$;

Частотная настройка производится путем варьирования шагом отбора b отсчетов $y(bn)$ на входе, и, соответственно, шириной функции $f(t)$ (так как $b = b_0 \mu$) на выходе банка фильтров рис.3.

Приведенные выше подходы для синтеза банка фильтров является одним из способов адаптации вейвлетов к решению конкретных задач обработки сигналов. Их применение позволяет более чем на порядок повысить скорость обработки данных по сравнению с комбинированными алгоритмами.

Список литературы

1. Daubechies I. Ten lectures on Wavelets. Philadelphia, PA: SIAM, 1992 (Перевод: Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М: РХД, 2002.)
2. Mallat S. A wavelet Tour of Signal Processing. San Diego: Academic Press, 1999. (Перевод: Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005.)
3. Burrus C.S., Gopinath R.A., Haitao Guo. Introduction to Wavelets and Wavelet Transform. New Jersey: Prentice Hall, 1998.
4. Vetterly M. Wavelets, Approximation, and Compression // IEEE Signal Proc. Magazine, 2001. September. P.59.
5. Shen L., Sun Q. Biorthogonal Wavelet System for High-Resolution Image Reconstruction // IEEE Transaction on Signal Processing. 2004. V.52, №7. P.1997.
6. Борисенко Н.А., Фертман А.Д. Автоматизированный анализ экспериментальных данных с применением вейвлет-преобразования // ПТЭ, 2003. №2. С.28.
7. Шищенко В.А., Любимов В.В., Иванова Т.И. Автоматизация и современные технологии, 2002. №1. С.3.
8. Shao X.-G., Leung A. K.-M., Chau F.-T. Wavelet: A New Trend in Chemistry // Accounts of Chemical Research. 2003. V.36, №4. P. 276-283.
9. Бессонов Д.П., Сизов А.С. Проблемы автоматического распознавания сложных радиотехнических сигналов и пути их решения на основе применения вейвлет-преобразования // Изв. вузов. Приборостроение. 2005. №2. С.31–34.
10. Дремин И. М., Иванов О.В., Нечитайло В.А. Вейвлеты и их использование. //УФН. 2001. Т.171, №5. С.465.
11. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения. //УФН. 1998. Т.166, №11. С.1145.
12. Donoho D., Johnstoune I. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. // Biometrika. 1994. V.81. P. 425.
13. Neelamani R., Choi H., Baraniuk R.G. Wavelet – Domain Regularized Deconvolution for Ill – Conditioned Systems. // IEEE Transaction on Signal Processing, 2004. V.52, №2. P.418.
14. Новиков Л.В. Аппаратно – ориентированные вейвлеты и их применение в обработке экспериментальных данных// ПТЭ. 2005. №6. С.13
15. Новиков Л.В. Модифицированные вейвлеты в обработке данных аналитических приборов. I. Основы теории // Научное приборостроение. 2006. Т. 16. №1. С.
16. Strang G., Zhou D.-X. The Limits of Refinable Functions// Trans. American Math. Soc. 2001. V. 353. P.1971-1984
17. Новиков Л.В. Адаптивный вейвлет-анализ сигналов //Научное приборостроение. 1999. Т. 9. №2. С.30.